llow
1 7/8 x 6 3/16
Inside
9 5/8 x 6.

QK1
.S66
1910
v.34

ANNALES

DE LA

SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE

DE BRUXELLES

TRENTE-QUATRIÈME ANNÉE, 1909-1910

LOUVAIN
SECRÉTARIAT DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE
(J. THIRION)
11, RUE DES RÉCOLLETS, 11

1910

SHOUT
SHARE
IT

REVUE DES QUESTIONS SCIENTIFIQUES

PUBLIÉE PAR LA

SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE DE BRUXELLES

CONDITIONS D'ABONNEMENT

Cette revue, publiée en exécution de l'article 3 des statuts, paraît tous les 3 mois, depuis janvier 1877, par livraison de 350 pages environ. Elle forme chaque année deux forts volumes in-8°.

Le prix d'abonnement est de 20 francs par an, pour tous les pays de l'Union postale.

Les membres de la Société ont droit à une réduction de 25 %.

ON S'ABONNE

au secrétariat de la Société scientifique de Bruxelles

11, rue des Récollets, 11

LOUVAIN

Le volume des ANNALES DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE paraît en 4 fascicules trimestriels ; il coûte 20 francs pour les personnes qui ne sont pas membres.

ADRESSE DU SECRÉTAIRE : **M. Paul Mansion**, *6, Quai des Dominicains, Gand.*

ANNALES

DE LA

SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE

DE BRUXELLES

TRENTE-QUATRIÈME ANNÉE, 1909-1910
PREMIER FASCICULE

LOUVAIN
SECRÉTARIAT DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE
(J. THIRION)
11, RUE DES RÉCOLLETS, 11

1910

TABLE DES MATIÈRES

PREMIÈRE PARTIE

DOCUMENTS ET COMPTES RENDUS

PAGES

Statuts 5

Règlement pour l'encouragement des recherches scientifiques . . . 9

Lettres pontificales 11

Listes des membres de la Société scientifique de Bruxelles, année 1910. 17

Session du 28 octobre 1910, à Louvain 65

  Séances des Sections 65

    Première Section 65

    Deuxième 106

    Troisième — 136

    Quatrième — 146

    Cinquième — 148

    Sixième — 148

  Assemblée générale 162

SECONDE PARTIE

MÉMOIRES

L'Électromètre bifilaire et ses applications, par le P. Théod. Wulf, S. J. 1

Un émule de Viète : Ludolphe van Ceulen, Analyse de son « Traité du Cercle », par le P. H. Bosmans, S. J. 88

Contribution à la faune des diptères du copal récent de Zanzibar, de Madagascar et d'Accra, par M. Fernand Meunier 140

Le volume des Annales de la Société scientifique paraît en 4 fascicules trimestriels ; il coûte 20 francs pour les personnes qui ne sont pas membres.

S'adresser pour tout ce qui concerne la **Rédaction** de la Revue et des Annales, et l'**Administration** de ces deux publications et de la *Société scientifique,* au Secrétariat, 11, rue des Récollets, Louvain.

Adresse du secrétaire général : **M. Paul Mansion,**
6, quai des Dominicains, Gand.

SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE

DE BRUXELLES

Louvain. — Imprimerie F. & R. Ceuterick
60, rue Vital Decoster, 60

ANNALES

DE LA

SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE

DE BRUXELLES

> *Nulla unquam inter fidem et rationem vera dissensio esse potest.*
>
> CONST. DE FID. CATH., C. IV.

TRENTE-QUATRIÈME ANNÉE, 1909-1910

LOUVAIN
SECRÉTARIAT DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE
(J. THIRION)
11, RUE DES RÉCOLLETS, 11

1910

MO. BOT. GARDEN
1911

PREMIÈRE PARTIE

DOCUMENTS ET COMPTES RENDUS

STATUTS

Article premier. — Il est constitué à Bruxelles une association qui prend le nom de *Société scientifique de Bruxelles*, avec la devise : « *Nulla unquam inter fidem et rationem vera dissensio esse potest* (*). »

Art. 2. — Cette association se propose de favoriser, conformément à l'esprit de sa devise, l'avancement et la diffusion des sciences.

Art. 3. — Elle publiera annuellement le compte rendu de ses réunions, les travaux présentés par ses membres, et des rapports sommaires sur les progrès accomplis dans chaque branche (**).

Elle tâchera de rendre possible la publication d'une revue destinée à la vulgarisation (***).

Art. 4. — Elle se compose d'un nombre illimité de membres, et fait appel à tous ceux qui reconnaissent l'importance d'une culture scientifique sérieuse pour le bien de la société.

(*) Const. de Fid. cath., c. IV.

(**) Dans sa séance du 18 février 1907, le Conseil a décidé de ne plus publier des travaux trop étendus qui sont plutôt des livres que des mémoires.

(***) Depuis le mois de janvier 1877, cette revue paraît, par livraisons trimestrielles, sous le titre de Revue des Questions scientifiques. Elle forme, chaque année, deux volumes in-8° de 700 pages.

Art. 5. — Elle est dirigée par un Conseil de vingt membres renouvelable annuellement par quart à la session de Pâques. Le Conseil choisit, dans son sein, le Président, les Vice-Présidents, le Secrétaire, le Trésorier. Toutefois, il peut choisir, en dehors du Conseil, le Président ou le premier Vice-Président. Parmi les membres du Bureau, le Secrétaire et le Trésorier sont seuls rééligibles (*). En cas de décès ou de démission d'un membre du Bureau ou du Conseil, le Conseil peut lui donner un successeur pour achever son mandat (**).

Art. 6. — Pour être admis dans l'Association, il faut être présenté par deux membres. La demande, signée par ceux-ci, est adressée au Président, qui la soumet au Conseil. L'admission n'est prononcée qu'à la majorité des deux tiers des voix.

L'exclusion d'un membre ne pourra être prononcée que pour des motifs graves et à la majorité des deux tiers des membres du Conseil.

Art. 7. — Les membres qui souscrivent, à une époque quelconque, une ou plusieurs parts du capital social, sont *membres fondateurs*. Ces parts sont de 500 francs. Les *membres ordinaires* versent une cotisation annuelle de 15 francs, qui peut toujours être rachetée par une somme de 150 francs, versée une fois pour toutes.

Le Conseil peut nommer des *membres honoraires* parmi les savants étrangers à la Belgique.

Les noms des membres fondateurs figurent en tête des listes par ordre d'inscription, et ces membres reçoivent autant d'exemplaires des publications annuelles qu'ils ont souscrit de parts du capital social. Les membres ordinaires et les membres honoraires reçoivent un exemplaire de ces publications.

Tous les membres ont le même droit de vote dans les assemblées générales.

(*) Ancien art. 5. — Elle est dirigée par un Conseil de vingt membres, élus annuellement dans son sein. Le Président, les Vice-Présidents, le Secrétaire et le Trésorier font partie de ce Conseil. Parmi les membres du Bureau, le Secrétaire et le Trésorier sont seuls rééligibles (Cf. Annales de la Société scientifique, 1901, t. XXV, 1re partie, p. 235).

(**) D'après une décision du Conseil du 27 novembre 1907, les membres du Conseil, sortants ou démissionnaires, en restent membres honoraires avec voix consultative, s'ils le désirent.

Art. 8. — Chaque année, il y a trois sessions. La principale se tiendra dans la quinzaine qui suit la fête de Pâques, et pourra durer quatre jours. Le public y sera admis sur la présentation de cartes. On y lit les rapports annuels (*).

Les deux autres sessions se tiendront en octobre et en janvier. Elles pourront durer deux jours, et auront pour objet principal de préparer la session de Pâques.

Art. 9. — Lorsqu'une résolution, prise par l'Assemblée générale, n'aura pas été délibérée en présence du tiers des membres de la Société, le Conseil aura la faculté d'ajourner la décision jusqu'à la prochaine session de Pâques. La décision sera alors définitive, quel que soit le nombre des membres présents.

Art. 10. — La Société ne permettra jamais qu'il se produise dans son sein aucune attaque, même courtoise, à la religion catholique ou à la philosophie spiritualiste et religieuse.

Art. 11. — Dans les sessions, la Société se répartit en six sections : I. *Sciences mathématiques*. II. *Sciences physiques*. III. *Sciences naturelles*. IV. *Sciences médicales*. V. *Sciences économiques*. VI. *Sciences techniques* (**).

Tout membre de l'Association choisit chaque année la section à laquelle il désire appartenir. Il a le droit de prendre part aux travaux des autres sections avec voix consultative.

Chaque section peut avoir des réunions extraordinaires, en dehors des sessions, pourvu que les travaux scientifiques auxquels ces réunions donnent lieu soient soumis à la section, pendant les sessions ordinaires de la Société (***).

(*) Ancien art. 8. — Chaque année, la Société tient quatre sessions. La principale, en octobre, pourra durer quatre jours. Le public y sera admis sur la présentation de cartes. On y lit les rapports annuels et l'on y nomme le Bureau et le Conseil pour l'année suivante. Les trois autres sessions, en janvier, avril et juillet, pourront durer trois jours, et auront pour objet principal de préparer la session d'octobre (Cf. Annales, 1878, t. II, 1re partie, p. 169 ; 1901, t. XXV, 1re partie, p. 235).

(**) Sur la création de la section des *sciences techniques*, détachée de la section des sciences mathématiques, voir les Annales, t. XXX (1906), 1re partie, pp. 79, 117, 265, et t. XXXI (1907), 1re partie, p. 307.

(***) Ce dernier paragraphe, voté par le Conseil général le 25 février 1902, a été soumis à l'Assemblée générale et approuvé le 10 avril 1902 (Cf. Annales, t. XXVI, 1902, 1re partie, p. 198).

Art. 12. — La session comprend des séances générales et des séances de section.

Art. 13. — Le Conseil représente l'Association. Il a tout pouvoir pour gérer et administrer les affaires sociales. Il place en rentes sur l'État ou en valeurs garanties par l'État les fonds qui constituent le capital social.

Il fait tous les règlements d'ordre intérieur que peut nécessiter l'exécution des statuts, sauf le droit de contrôle de l'Assemblée générale.

Il délibère, sauf les cas prévus à l'article 6, à la majorité des membres présents. Néanmoins, aucune résolution ne sera valable qu'autant qu'elle aura été délibérée en présence du tiers au moins des membres du Conseil dûment convoqué (*).

Art. 14. — Tous les actes, reçus et décharches sont signés par le Trésorier et un membre du Conseil, délégué à cet effet.

Art. 15. — Le Conseil dresse annuellement le budget des dépenses de l'Association et présente dans la session de Pâques le compte détaillé des recettes et dépenses de l'exercice écoulé. L'approbation de ces comptes, après examen de l'Assemblée, lui donne décharge.

Art. 16. — Les statuts ne pourront être modifiés que sur la proposition du Conseil, à la majorité des deux tiers des membres et dans l'Assemblée générale de la session de Pâques.

Les modifications ne pourront être soumises au vote qu'après avoir été proposées dans une des sessions précédentes. Elles devront figurer à l'ordre du jour dans les convocations adressées à tous les membres de la Société.

Art. 17. — La devise et l'article 10 ne pourront jamais être modifiés.

En cas de dissolution, l'Assemblée générale, convoquée extraordinairement, statuera sur la destination des biens appartenant à l'Association. Cette destination devra être conforme au but indiqué dans l'article 2.

(*) Peuvent assister aux séances du Conseil, avec voix consultative : 1° Les Présidents, et, en cas d'empêchement des Présidents, les Secrétaires des sections. 2° Les membres du Conseil, sortants ou démissionnaires, qui en sont restés membres honoraires.

RÈGLEMENT

ARRÊTÉ PAR LE CONSEIL POUR L'ENCOURAGEMENT DES RECHERCHES SCIENTIFIQUES

1. — Le Conseil de la *Société scientifique de Bruxelles* a résolu d'instituer des concours et d'accorder des subsides pour encourager les recherches scientifiques.

2. — Le Conseil peut, sur la proposition de la section compétente, accorder des encouragements pécuniaires ou des médailles aux auteurs des meilleurs travaux présentés par les membres de cette section. L'ensemble de ces récompenses ne peut dépasser annuellement 1000 francs.

3. — Chaque année, l'une des sections désignera une question à mettre au concours. L'ordre dans lequel les sections feront cette désignation sera déterminé par le sort. Toute question, pour être posée, devra être approuvée par le Conseil qui donnera aux questions la publicité convenable.

4. — Les questions auxquelles il n'aura pas été répondu d'une manière satisfaisante, resteront au concours. Le Conseil pourra cependant inviter les sections compétentes à les remplacer par d'autres.

5. — Aucun prix ne pourra être inférieur à 500 francs. Une médaille sera en outre remise à l'auteur du mémoire couronné.

6. — Ces concours ne seront ouverts qu'aux membres de la Société.

7. — Ne sont admis que les ouvrages et les planches manuscrits.

8. — Le choix de la langue dans laquelle seront rédigés les mémoires est libre. Ils seront, s'il y a lieu, traduits aux frais de la Société ; la publication n'aura lieu qu'en français.

9. — Les auteurs ne mettront pas leur nom à ces mémoires, mais seulement une devise qu'ils répéteront dans un billet cacheté renfermant leur nom et leur adresse.

10. — Les jurys des concours seront composés de trois membres présentés par la section compétente et nommés par le Conseil.

11. — Les prix sont décernés par le Conseil sur le rapport des jurys.

12. — Toute décision du Conseil ou des sections relative aux prix sera prise au scrutin secret et à la majorité absolue des suffrages.

13. — La Société n'a l'obligation de publier aucun travail couronné ; les manuscrits de tous les travaux présentés au concours restent la propriété de la Société. En cas de publication, cent exemplaires seront remis gratuitement aux auteurs.

14. — Les résultats des concours seront proclamés et les médailles remises dans l'une des assemblées générales de la session de Pâques. Les rapports des jurys devront être remis au Conseil six semaines avant cette session. Le 1er octobre de l'année qui suit celle où a été proposée la question, est la date de rigueur pour l'envoi des mémoires au secrétariat.

15. — Pour être admis à demander un subside, il faut être membre de la Société depuis un an au moins.

16. — Le membre qui demandera un subside devra faire connaître par écrit le but précis de ses travaux, au moins d'une manière générale ; il sera tenu, dans les six mois de l'allocation du subside, de présenter au Conseil un rapport écrit sur les résultats de ses recherches, quel qu'en ait été le succès.

17. — Le Conseil, après avoir pris connaissance des diverses demandes de subsides, à l'effet d'en apprécier l'importance relative, statuera au scrutin secret.

18. — Les résultats des recherches favorisées par les subsides de la Société devront lui être présentés, pour être publiés dans ses Annales s'il y a lieu.

LETTRES
DE
S. S. LE PAPE LÉON XIII
AU PRÉSIDENT ET AUX MEMBRES
DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE DE BRUXELLES

I

Dilectis Filiis Praesidi ac Membris Societatis scientificae Bruxellis constitutae

LEO PP. XIII

DILECTI FILII, SALUTEM ET APOSTOLICAM BENEDICTIONEM

Gratae Nobis advenerunt litterae vestrae una cum Annalibus et Quaestionibus a vobis editis, quas in obsequentissimum erga Nos et Apostolicam Sedem pietatis testimonium obtulistis. Libenter sane agnovimus Societatem vestram quae a scientiis sibi nomen fecit, et quae tribus tantum abhinc annis laetis auspiciis ac Iesu Christi Vicarii benedictione Bruxellis constituta est, magnum iam incrementum cepisse, et uberes fructus polliceri. Profecto cum infensissimi religionis ac veritatis hostes nunquam desistant, imo magis magisque studeant dissidium rationem inter ac fidem propugnare, opportunum est ut praestantes scientia ac pietate viri ubique exsurgant, qui Ecclesiae doctrinis ac documentis ex animo obsequentes, in id contendant, ut demonstrent *nullam unquam inter fidem et rationem veram dissensionem esse posse*; quemadmodum Sacrosancta Vaticana Synodus, constantem Ecclesiae et Sanctorum Patrum doctrinam affirmans, declaravit Constitutione IV^{a} de fide catholica. Quapropter gratulamur quod Societas vestra hunc primo

finem sibi proposuerit, itemque in statutis legem dederit, ne quid a sociis contra sanam christianae philosophiae doctrinam committatur; simulque omnes hortamur ut nunquam de egregio eiusmodi laudis tramite deflectant, atque ut toto animi nisu praestitum Societatis finem praeclaris exemplis ac scriptis editis continuo assequi adnitantur. Deum autem Optimum Maximum precamur, ut vos omnes caelestibus praesidiis confirmet ac muniat; quorum auspicem et Nostrae in vos benevolentiae pignus, Apostolicam benedictionem vobis, dilecti filii, et Societati vestrae ex animo impertimur.

Datum Romae, apud S. Petrum, die 15 Ianuarii 1879, Pontificatus Nostri Anno Primo.

LEO PP. XIII.

A nos chers Fils le Président et les Membres de la Société scientifique de Bruxelles

LÉON XIII, PAPE

CHERS FILS, SALUT ET BÉNÉDICTION APOSTOLIQUE

Votre lettre Nous a été agréable, ainsi que les Annales et les Questions publiées par vous et offertes en témoignage de votre piété respectueuse envers nous et le Siège Apostolique. Nous avons vu réellement avec plaisir que votre Société, qui a adopté le nom de Société scientifique, et s'est constituée à Bruxelles, depuis trois ans seulement, sous d'heureux auspices avec la bénédiction du Vicaire de Jésus-Christ, a déjà pris un grand développement et promet des fruits abondants. Certes, puisque les ennemis acharnés de la religion et de la vérité ne se lassent point et s'obstinent même de plus en plus à proclamer l'opposition entre la raison et la foi, il est opportun que partout surgissent des hommes distingués par la science et la piété, qui, attachés de cœur aux doctrines et aux enseignements de l'Église, s'appliquent à démontrer qu'*il ne peut jamais exister de désaccord réel entre la foi et la raison*, comme l'a déclaré dans la Constitution IV *de fide catholica*, le Saint Concile du Vatican affirmant la doctrine constante de l'Église et des Saints Pères. C'est pourquoi

Nous félicitons votre Société de ce qu'elle s'est d'abord proposé cette fin, et aussi de ce qu'elle a mis dans ses statuts un article défendant à ses membres toute attaque aux saines doctrines de la philosophie chrétienne ; et en même temps Nous les exhortons tous à ne jamais s'écarter de la voie excellente qui leur vaut un tel éloge, et à poursuivre continuellement, de tout l'effort de leur esprit, l'objet assigné à la Société, par d'éclatants exemples et par leurs publications. Nous prions Dieu très bon et très grand, qu'Il vous soutienne tous et vous fortifie du céleste secours : en présage duquel, et comme gage de Notre bienveillance envers vous, Nous accordons du fond du cœur à vous, chers fils, et à votre Société la bénédiction Apostolique.

Donné à Rome, à Saint-Pierre, le 15 janvier 1879, l'An Un de Notre Pontificat.

Léon XIII, Pape.

II

Dilectis Filiis, Sodalibus Consociationis Bruxellensis a scientiis provehendis Bruxellas

LEO PP. XIII

Dilecti Filii, salutem et Apostolicam benedictionem

Quod, pontificatu Nostro ineunte, de Sodalitate vestra fuimus ominati, id elapso iam ab institutione eius anno quinto et vicesimo, feliciter impletum vestris ex litteris perspicimus. In provehendis enim scientiarum studiis, sive eruditorum coetus habendo, sive Annalium volumina edendo, nunquam a proposito descivistis, quod coeptum fuerat ab initio, ostendendi videlicet *nullam inter fidem et rationem dissensionem veram esse posse*. Benevolentiam Nostram ob vestras industrias testamur ; simulque hortamur, ut coeptis insistatis alacres, utpote temporum necessitati opportunis admodum. Naturae enim cognitio, si recto quidem et vacuo praeiudiciis animo perquiratur, ad divinarum rerum notitiam conferat necesse est, divinaeque revelationi fidem adstruat. Hoc ut vobis, vestraque opera, quam multis accidat, Apostolicam benedictionem, munerum coelestium auspicem, Sodalitati vestrae amantissime impertimus.

Datum Romae, apud S. Petrum, die 20 Martii Anno 1901, Pontificatus Nostri Vicesimo Quarto.

Leo PP. XIII.

A nos chers Fils, les Membres de la Société scientifique de Bruxelles, à Bruxelles

LÉON XIII, PAPE

Chers Fils, salut et bénédiction Apostolique

Ce qu'au début de Notre pontificat, Nous avions présagé de votre Société, aujourd'hui, vingt-cinq ans après sa fondation, vos lettres Nous en apprennent l'heureux accomplissement. En travaillant au progrès des études scientifiques, soit par vos réunions savantes, soit par la publication de vos Annales, vous ne vous êtes jamais départis de votre dessein initial, celui de montrer que *entre la foi et la raison, aucun vrai désaccord ne peut exister*. Nous vous exprimons Notre bienveillance pour vos efforts, et Nous vous exhortons en même temps à poursuivre avec ardeur votre entreprise si bien en rapport avec les nécessités actuelles. Car l'étude de l'univers, si elle est menée avec droiture et sans préjugé, doit aider à la connaissance des choses de Dieu, et établir la foi à la révélation divine. Pour que ce bonheur vous advienne et par vous à beaucoup d'autres, Nous accordons avec la plus vive sympathie à votre Société, la bénédiction Apostolique, gage des faveurs célestes.

Donné à Rome, à Saint-Pierre, le 20 Mars 1901, l'An Vingt-quatrième de Notre Pontificat.

Léon XIII, Pape.

LETTRE
DE
S. É. LE CARD. R. MERRY DEL VAL
Secrétaire d'État de
S. S. LE PAPE PIE X
AU PRÉSIDENT DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE DE BRUXELLES
EN RÉPONSE A L'ADRESSE AU SAINT-PÈRE

Illmo Signore

Trasmesso da Mons. Nunzio di Bruxelles, è pervenuto al Santo Padre il nobile indirizzo della Società scientifica, di cui la S. V. Illma è degno Presidente. Per incarico quindi dell' Augusto Pontefice mi è grato significarle che Sua Santità si è vivamente compiaciuta dell'omaggio reso alla Sua Venerata Persona da cotesto illustre sodalizio, il quale stimò suo precipuo dovere di umiliare ossequio ed osservanza al Vicario di Cristo fin dalla prima assemblea tenuta sotto il novello Pontificato. La Santità Sua, bene apprezzando siffatto officio, e rilevando d'altra parte con alta soddisfazione il rettissimo ed onorevole programma della sullodata Società, la cui divisa è ispirata ai principii sanciti anche nel Concilio Vaticano, ha tributato assai volontieri un particolare encomio a Lei ed a tutti i socii, e mentre ha espressi i più caldi ringraziamenti per un atto così cortese, non ha indugiato a dichiarare che integra ed anzi di gran lunga accresciuta perdura nell' animo Suo la benevolenza, onde il detto Sodalizio fu onorato da Pio IX et da Leone XIII, di sa : me : Il Santo Padre confida inoltre, che i singoli socii, del cui sapere ama nutrire la stima più lusinghiera, si studieranno incessantemente di meritare sempre meglio della Religione e delle scienze, e mentre ha invocati su di loro gli aiuti celesti, li ha di gran cuore benedetti.

Colgo poi con piacere l'opportunità per dichiararmi con sensi di distinta stima,

Di V. S. Illma

Affmo per servirla
R. Card. Merry del Val.

Roma, 5 maggio 1904.

ILLUSTRISSIME SEIGNEUR

La noble adresse de la Société scientifique, dont Votre Seigneurie illustrissime est le digne Président, est parvenue au Saint-Père par l'entremise de Mgr le Nonce de Bruxelles. Il m'est agréable de vous faire savoir, au nom de l'Auguste Pontife, que Sa Sainteté a reçu avec grande joie l'hommage rendu à Sa Personne Vénérée par cette illustre association qui s'est fait un impérieux devoir de témoigner son humble et respectueuse soumission au Vicaire du Christ dès sa première assemblée tenue sous le nouveau Pontificat. Sa Sainteté, appréciant justement cet hommage et considérant d'autre part avec une vive satisfaction le programme, si sage et si honorable, de votre Société, dont la devise s'inspire des principes mêmes sanctionnés par le Concile du Vatican, vous a très volontiers accordé, à vous et à tous les membres, un éloge spécial ; et en même temps qu'Elle exprimait ses remerciements les plus chaleureux pour votre aimable attention, Elle n'a pas hésité à déclarer que la bienveillance dont votre Société a été honorée par Pie IX et Léon XIII, de sainte mémoire, demeure entière et qu'elle s'est même de beaucoup accrue dans son cœur. Le Saint-Père a l'espoir fondé que tous les membres, pour le savoir desquels Il aime à nourrir l'estime la plus flatteuse, s'efforceront sans trêve de mériter toujours davantage de la Religion et des sciences, et tandis qu'Il invoquait pour eux les secours célestes, Il les a bénis de grand cœur.

Je saisis avec plaisir cette occasion de me déclarer, avec des sentiments de considération distinguée,

De Votre Seigneurie illustrissime

le très affectionné serviteur
R. Card. MERRY DEL VAL.

Rome, le 5 mai 1904.

LISTES

DES

MEMBRES DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE DE BRUXELLES

ANNÉE 1910

Liste des membres fondateurs

S. É. le cardinal Dechamps (*), archevêque de	Malines.
François de Cannart d'Hamale (*) . . .	Malines.
Charles Dessain	Malines.
Jules van Havre (*)	Anvers.
Le chanoine Maes (*).	Bruges.
Le chanoine De Leyn (*)	Bruges.
Leirens-Eliaert	Alost.
Frank Gillis (*)	Bruxelles.
Joseph Saey	Bruxelles.
Le Ch^{er} de Schoutheete de Tervarent (*) .	Saint-Nicolas.
Le Collège Saint-Michel	Bruxelles.
Le Collège Notre-Dame de la Paix . . .	Namur.
Le Duc d'Ursel, sénateur (*)	Bruxelles.
Le P^{ce} Gustave de Croy (*).	Le Rœulx (Hainaut).
Le C^{te} de T'Serclaes (*)	Gand.
Auguste Dumont de Chassart (*)	Mellet (Hainaut).
Charles Hermite, membre de l'Institut (*) .	Paris.
L'École libre de l'Immaculée-Conception .	Vaugirard-Paris.
L'École libre Sainte-Geneviève	Paris.
Le Collège Saint-Servais	Liége.
Le C^{te} de Bergeyck (*)	Beveren-Waes.
L'Institut Saint-Ignace	Anvers.
Philippe Gilbert (*), correspond^{t} de l'Instit.	Louvain.
Le R. P. Provincial de la Compagnie de Jésus en Belgique	Bruxelles.

(*) Décédé.

Le Collège Saint-Jean Berchmans	Louvain.
Le Collège Saint-Joseph	Alost.
Le chanoine de Wouters (*)	Braine-le-Comte.
Antoine d'Abbadie (*), membre de l'Institut.	Paris.
S. É. le cardinal Haynald (*), archevêque de Kalocsa et Bàcs	Kalocsa (Hongrie).
S. É. le cardinal Séraphin Vannutelli	Rome.
S. G. Mgr Du Roussaux (*), évêque de	Tournai.
S. É. le cardinal Goossens (*), archevêque de	Malines.
R. Bedel	Marseille.
S. G. Mgr Belin (*), évêque de	Namur.
Eugène Pecher (*)	Bruxelles.
S. É. le cardinal Ferrata	Rome.
S. É. le cardinal Nava di Bontife	Catane.
S. Exc. Mgr. Rinaldini, nonce apostolique.	Madrid.
S. Exc. Mgr Granito di Belmonte, nonce apostolique	Vienne.
Éd. Goedseels	Uccle.

Liste des membres honoraires

S.A.R. Charles-Théodore (*), duc en Bavière	Possenhofen.
Antoine d'Abbadie (*), membre de l'Institut	Paris.
Amagat, membre de l'Institut	Paris.
Mgr Baunard, recteur de l'Univers. cathol.	Lille.
Joachim Barrande (*)	Prague.
Barrois, membre de l'Institut	Lille.
A. Béchamp (*)	Paris.
Aug. Béchaux, correspondant de l'Institut.	Paris.
Le Prince Boncompagni (*), de l'Académie des Nuovi Lincei	Rome.
Boussinesq, membre de l'Institut	Paris.
L. de Bussy (*), membre de l'Institut	Paris.
Dr Desplats	Lille.
P. Duhem, correspondant de l'Institut	Bordeaux.

(*) Décédé.

J.-H. Fabre	Sérignan (France).
D^{r} Fiessinger, correspondant de l'Académie de Médecine	Paris.
Le docteur Foerster (*)	Aix-la-Chapelle.
J. Gosselet, correspondant de l'Institut	Lille.
C. Grand' Eury, correspondant de l'Institut	Saint-Étienne (France).
Haton de la Goupillière, membre de l'Inst.	Paris.
P. Hautefeuille (*), membre de l'Institut.	Paris.
D^{r} Heis (*)	Münster.
Charles Hermite (*), membre de l'Institut.	Paris.
G. Humbert, membre de l'Institut	Paris.
Le vice-amiral de Jonquières (*), membre de l'Institut	Paris.
Camille Jordan, membre de l'Institut	Paris.
A. de Lapparent (*), secrétaire perpétuel de l'Académie des sciences	Paris.
G. Lemoine, membre de l'Institut	Paris.
F. Le Play (*)	Paris.
D^{r} W. Lossen (*)	Heidelberg.
Le général J. Newton	New-York.
D.-P. Œhlert, correspondant de l'Institut.	Laval (France).
Louis Pasteur (*), membre de l'Institut	Paris.
R. P. Perry, S. J. (*), de la Société Royale de Londres	Stonyhurst.
É. Picard, membre de l'Institut	Paris.
Victor Puiseux (*), membre de l'Institut	Paris.
A. Barré de Saint-Venant (*), membre de l'Institut	Paris.
Paul Sabatier, correspondant de l'Institut.	Toulouse.
R. P. A. Secchi, S. J. (*), de l'Académie des Nuovi Lincei	Rome.
Paul Tannery (*)	Pantin (France).
Pierre Termier, membre de l'Institut	Paris.
R. P. Wasmann, S. J.	Luxembourg.
Aimé Witz, correspondant de l'Institut.	Lille.
Wolf, membre de l'Institut	Paris.
R. Zeiller, membre de l'Institut.	Paris.

(*) Décédé.

Liste générale des membres de la Société scientifique de Bruxelles (1910)

Abaurrea (Luis), Molviedro, 6. — Séville (Espagne).
Adan de Yarza (Ramon), ingénieur des Mines, 7, 1°, calle de Moreto. — Madrid.
d'Adhémar (Vte Robert), professeur aux Facultés catholiques, 14, place de Genevières. — Lille (Nord — France).
Alexis-M. Gochet (Frère), rue de Bruxelles. — Namur.
Allard (François), industriel. — Châtelineau (Hainaut).
Alliaume (Maurice), 7, avenue Victor Jacobs. — Anvers.
Amagat, membre de l'Institut, examinateur d'admission à l'École polytechnique, 19, avenue d'Orléans. — Paris.
André (J.-B.), inspecteur général au Ministère de l'Agriculture, 127, avenue Brugmann. — Bruxelles.
Annycke (Abbé Th.), maître de conférences à la Faculté libre des Sciences, 6, rue Auber. — Lille (Nord — France)
d'Annoux (Cte H.), 74, boulevard Alexandre Martin. — Orléans (Loiret — France).
Arduin (Abbé Alexis), à N.-D. d'Aiguebelle, par Grignan (Drôme — France).
Ariès (Lieutenant-colonel), 9, boulevard du Roi. — Versailles (Seine-et-Oise — France).
Attout-Van Cutsem (E.), rue de Fer. — Namur.
Baivy (Dr Zénon), place Saint-Aubain. — Namur.
Balbas (Thomas), ingénieur des Mines. — San-Sebastian (Espagne).
Barbé (Maurice), ingénieur des Arts et Manufactures, 20, rue Eugène Manuel. — Paris (VIe).
Barrois, membre de l'Institut, 41, rue Pascal. — Lille (Nord — France).
Baseil (Abbé), professeur au Séminaire. — Floreffe.
Baunard (Mgr), recteur honoraire de l'Université catholique, 60, boulevard Vauban. — Lille (Nord — France).
Bauwens (Dr Isidore), rue de la Station. — Alost.
Bayet (Adrien), 33, Nouveau Marché aux Grains. — Bruxelles.
Beaujean (Charles), 208, avenue de la Couronne. — Ixelles (Bruxelles).
Beauvois (Eug.), à Corberon (Côte d'Or — France).

BÉCHAUX (Aug.), correspondant de l'Institut, 56, rue d'Assas. — Paris.

BÉCO (Dr L.), professeur de clinique médicale à l'Université, correspondant de l'Académie royale de médecine, 25, rue Beeckman. — Liége.

BEDEL (Abbé René), 125, boulevard National. — Marseille (Bouches-du-Rhône — France).

BEERNAERT (Auguste), Ministre d'État, membre de l'Académie royale de Belgique et associé de l'Institut de France, 11, rue d'Arlon. — Bruxelles.

BELPAIRE (Frédéric), ingénieur, 192, avenue du Margrave. — Anvers.

BERLEUR (Adolphe), ingénieur, 17, rue Saint-Laurent. — Liége.

BERLINGIN (Melchior), directeur des Laminoirs de la Vieille-Montagne. — Penchot, par Viviers (Aveyron — France).

BERTRAND (Léon), 9, rue Crespel. — Bruxelles.

DE BÉTHUNE (Bon Gaston), lieutenant au 5e régiment d'artillerie, répétiteur à l'École militaire, 39, avenue de la Cascade. — Bruxelles.

DE BEUGHEM DE HOUTEM (Vte), commissaire d'arrondissement à Malines, château de Mélis, par Puers.

BIBOT (Dr), place Léopold. — Namur.

DE BIEN (Fernand), 150, rue du Trône. — Bruxelles.

BLEUSET, S. J. (R. P. J.), 53, Tongersche straat. — Maestricht (Hollande).

BLONDEL (Alfred), ingénieur, 1, place du Parc. — Tournai.

BLONDEL (G.), professeur à l'École des Hautes-Études commerciales, 31, rue de Bellechasse. — Paris.

DE LA BOËSSIÈRE-THIENNES (Mis), 19, rue aux Laines. — Bruxelles; ou, château de Lombise, par Lens (Hainaut).

BOLS (Abbé), professeur de sciences naturelles au Collège Saint-Rombaut. — Malines.

BOLSIUS, S. J. (R. P. Henri), 18A, Kerkstraat. — Oudenbosch (Pays-Bas).

BOSCHMANS (Conego, Ricardo), Gymnasio Espirito Santo. — Jaguarão (Estado do Rio Grande do Sul, Brazil).

BOSMANS, S. J. (R. P. H.), professeur de mathématiques, Collège Saint-Michel, 22, boulevard St-Michel. — Bruxelles.

Boule, S. J. (R. P.), Oude Kasteel, Gemert (via Helmond, Noord-Brabant. — Pays-Bas).

Bourgeat (Chan.), professeur aux Facultés catholiques, 15, rue Charles de Muyssart. — Lille (Nord — France).

Boussinesq, membre de l'Institut, professeur à la Faculté des Sciences de l'Université, 22, rue Berthollet. — Paris.

du Boys (Paul), ingénieur en chef des Ponts et Chaussées. — La Combe de Lancey, par Villard-Bonnot (Isère — France).

Branly (Édouard), professeur à l'Institut catholique, 21, avenue de Tourville. — Paris.

Breithof (F.), 14a, place du Peuple. — Louvain.

Brifaut (Valentin), avocat, 131, rue de Stassart. — Bruxelles.

Bruyer (Frantz), à Ottignies (Brabant).

de Brouwer (Michel), ingénieur, 14, rue d'Elverdingen. — Ypres.

van der Bruggen (B^{on} Maurice), ancien Ministre de l'Agriculture, 18, rue du Gouvernement. — Gand.

Bruylants (G.), professeur à l'Université, membre de l'Académie royale de médecine, 32, rue des Récollets. — Louvain.

Bulliot (J.), professeur à l'Institut catholique, 114, rue de Vaugirard. — Paris.

Cabeau (Abbé Charles), professeur au Collège St-Joseph. — Virton.

Capart (Jean), 17, avenue de la Station. — Auderghem (Brabant).

Capelle (Abbé Éd.), 79, avenue de Breteuil. — Paris (XV^e).

Cappellen (Guillaume), commissaire d'arrondissement, 4, place Marguerite. — Louvain.

Caratheodory (Costa), professeur à la Technische Hochschule, 9, Alleestrasse. — Hannovre (Allemagne).

Carlier (Joseph), ingénieur, 7, rue Joseph II. — Bruxelles.

Carrara, S. J. (R. P. B.), 1, via Briosco. — Padoue (Italie).

Cartuyvels (Jules), ingénieur honoraire des Mines, inspecteur général au Ministère de l'Agriculture, professeur honoraire de l'Université de Louvain, 215, rue de la Loi. — Bruxelles.

Casarès (Firmino), farmacia, 93, calle San Andrès. — La Coruña (Espagne).

Casteels, docteur en sciences physiques et mathématiques, à l'Observatoire royal. — Uccle (Bruxelles).

Castelein (R. P.), Collège N.-D. de la Paix, 45, rue de Bruxelles. — Namur.

Charles, S. J. (R. P. Jean), 11, rue des Récollets. — Louvain.

Cirera y Salse (Dr Luis), profesor libre de electroterapia, 13, pràl, calle Fontanella. — Barcelone (Espagne).

Cirera, S. J. (R. P. Richard), Observatoire de l'Èbre. — Tortosa (Espagne).

Claerhout (Abbé J.), directeur des Écoles catholiques de Pitthem (Flandre occidentale).

Cocheteux (Chan.), directeur de l'Institut Saint-Louis, rue du Marais. — Bruxelles.

Coffey (Denis J.), docteur en médecine, F. R. U. I., professeur de physiologie à l'École de médecine de l'Université catholique, Medical School, Cecilia Street. — Dublin (Irlande).

Cogels (J.-B.-Henri), 181, avenue des Arts. — Anvers.

Colegio de Estudios Superiores de Deusto (R. P. J. Man. Obeso, S. J.). — Bilbao (Espagne).

Collangettes, S. J. (R. P.), professeur de physique à l'Université Saint-Joseph. — Beyrouth (Syrie).

Collège Notre-Dame de la Paix, 45, rue de Bruxelles. — Namur.

Collège Saint-François-Xavier, 10 and 11, Park Street. — Calcutta (Indes anglaises, via Brindisi).

Collège Saint-Jean Berchmans, 11, rue des Récollets. — Louvain.

Collège Saint-Joseph, 13, rue de Bruxelles. — Alost.

Collège Saint-Michel (R. P. H. Bosmans, S. J.), 22, boulevard Saint-Michel. — Bruxelles.

Collège Saint-Servais, 92, rue Saint-Gilles. — Liége.

Convent (Alf.), docteur en médecine. — Woluwe-Saint-Lambert (Brabant).

Conway (Arthur, W.) M. A., F. R. U. I., professeur de physique au Collège de l'Université catholique, Cosy Hook, 100, Leinster Road. — Rathmines (Dublin, Irlande).

Coomans (Léon), pharmacien, 5, rue des Brigittines. — Bruxelles.

Coomans (Victor), chimiste, 5, rue des Brigittines. — Bruxelles.

Cooreman (Gérard), 1, place du Marais. — Gand.

Coppieters de Stockhove (Abbé Ch.), directeur des Dames de l'Instruction chrétienne. — Bruges.

Costanzo (R. P. Jean), barnabite, membre de l'Académie des Nuovi Lincei, Collège Saint-Louis. — Bologne (Italie).

Coulon (H.), docteur en médecine, 9, rue des Chanoines. — Cambrai (Nord — France).

Cousin (L.), ingénieur, professeur honoraire de l'Université de Louvain, 27, rue de Vienne. — Bruxelles.

Cousot (Dr Georges), membre de la Chambre des Représentants. — Dinant.

Crame (Auguste), capitaine commandant d'artillerie, adjoint d'État-Major, 44, quai des Moines. — Gand.

Craninckx (Bon Oscar), 51, rue de la Loi. — Bruxelles.

Cuylits (Jean), docteur en médecine, 44, boulevard de Waterloo. — Bruxelles.

Daniels (Dr Fr.), professeur à l'Université catholique de Fribourg (Suisse).

Dardel (Jean), à Aix-les-Bains (Savoie) ; ou, 13, avenue Auber. — Nice (Alpes Maritimes — France).

Daubresse (Paul), ingénieur, professeur à l'Université, 98, rue de Paris. — Louvain.

Dauwe (Dr Ferdinand), assistant à la clinique médicale de l'Université, 9, rue des Douze Chambres. — Gand.

David (P.), docteur en droit et en sciences politiques. — Stavelot.

De Baets (Herman), 11, rue des Boutiques. — Gand.

Debaisieux (T.), professeur à l'Université, 14, rue Léopold. — Louvain.

De Becker (Chan. Jules), professeur à l'Université, 112, rue de Namur. — Louvain.

De Bloo (Julien), ingénieur, 91, boulevard Frère-Orban. — Gand.

De Brabandère (Victor), avocat près la Cour d'Appel, 57, rue du Marteau. — Bruxelles.

De Brouwer (Chan.), curé-doyen. — Ypres.

Dechevrens, S. J. (R. P. Marc), directeur de l'Observatoire du Collège Saint-Louis. — Saint-Hélier (Jersey — Iles-de-la-Manche — Angleterre).

Declercq, ingénieur, directeur du laboratoire d'électricité à l'Université, 38, rue Neuve Saint-Pierre. — Gand.

De Coster (Charles), ingénieur civil des Mines, 23, rue Coenraets. — Saint-Gilles (Bruxelles).

Degive (A.), membre de l'Académie royale de médecine, 84, rue de Stassart. — Bruxelles.

De Grave (Dr Henri), 39, rue Thiéfry. — Bruxelles.

De Greef (Jules), conseiller au Conseil des Mines, 26, rue Breydel. — Bruxelles (Q.-L.).

De Greeff, S. J. (R. P. Henri), professeur à la Faculté des Sciences, Collège Notre-Dame de la Paix, 45, rue de Bruxelles. — Namur.

De Jaer (Jules), directeur général des Mines, 16, avenue de la Floride. — Uccle (Bruxelles).

Dejardin (L.), directeur général des Mines, 124, rue Franklin. — Bruxelles.

De Jonghe, 29, rue Saint-Quentin. — Bruxelles.

De Laet (Jean), docteur en philosophie, 6, rue du Canal. — Malines.

De Lantsheere (Dr J.), oculiste, 215, rue Royale. — Bruxelles.

De Lantsheere (Léon), Ministre de la Justice, 83, rue du Commerce. — Bruxelles.

Delaunois (Dr G.), à Bon-Secours, par Péruwelz (Hainaut).

Delcroix (Dr A.), 18, chaussée de Louvain. — Bruxelles.

Delemer (Jules), professeur à la Faculté libre des Sciences, 24, rue Voltaire. — Lille (Nord — France).

Delétrez (Dr A.), 7, rue de la Charité. — Bruxelles.

Delmer (Alexandre), ingénieur au Corps des mines, 14, place de la Reine. — Schaerbeek (Bruxelles).

Delvigne (Chan. Adolphe), curé émérite de Saint-Josse-ten-Noode, 18, rue de la Pacification. — Saint-Josse-ten-Noode (Bruxelles).

Delvosal (Jules), docteur en sciences physiques et mathématiques, astronome-adjoint à l'Observatoire royal de Belgique, 84, rue Rouge. — Uccle (Bruxelles).

Demanet (Chan. S.), docteur en sciences physiques et mathématiques, professeur à l'Université, 23, rue de Bériot. — Louvain.

De Munnynck, O. P. (R. P.), professeur à l'Université Albertinum. — Fribourg (Suisse).

De Muynck (Chan. R.), professeur à l'Université, 9, place Saint-Jacques. — Louvain.

Denoël, ingénieur au Corps des Mines, 93, rue Bois-l'Évêque. — Liége.

Denys (Dr J.), professeur à l'Université, Institut bactériologique, 96, rue Vital Decoster. — Louvain.

Deploige (Mgr), professeur à l'Université, Président de l'Institut supérieur de Philosophie, 1, rue des Flamands. — Louvain.

De Preter (Herman), ingénieur, 59, rue du Marais. — Bruxelles.

Deroitte (Dr Victor), 188, avenue Albert. — Bruxelles.

De Smedt, S. J. (R. P. Charles), président de la Société des Bollandistes, correspondant de l'Institut de France, Collège Saint-Michel, 22, boulevard St-Michel. — Bruxelles.

Desplats (Dr), professeur aux Facultés catholiques, 56, boulevard Vauban. — Lille (Nord — France).

Desplats (Dr René), 181, rue Nationale. — Lille (Nord — France).

Dessain (Charles), libraire-éditeur, rue de la Blanchisserie. — Malines.

De Vadder (Victor), avocat à la Cour d'appel, 16, rue Blanche. — Ixelles (Bruxelles).

De Veer, S. J. (R. P.), directeur der Vereenigingen G. en W., 70, Wijnhaven. — Rotterdam (Pays-Bas).

De Walque (François), professeur à l'Université, 26, rue des Joyeuses-Entrées. — Louvain.

De Wildeman (É.), conservateur au Jardin Botanique de l'État, 122, rue des Confédérés. — Bruxelles (N.-E.).

D'halluin (Dr Maurice), chef des travaux de physiologie à la Faculté catholique de Médecine, 8, rue Nicolas Leblanc. — Lille (Nord — France).

Dierckx, S. J. (R. P. Fr.), professeur à la Faculté des Sciences, Collège Notre-Dame de la Paix, 45, rue de Bruxelles. — Namur.

Dochain-Defer (Félix), industriel. — Couillet.

de Dorlodot (Chan. H.), docteur en théologie, professeur à l'Université, 44, rue de Bériot. — Louvain.

de Dorlodot (Sylvain), château de Floriffoux. — Floreffe (prov. de Namur).

Drion (Bon Adolphe), avocat. — Gosselies.

Dubois (Ernest), directeur de l'Institut supérieur de commerce, membre du Conseil colonial, 36, rue de Vrière. — Anvers.

Dubois (Victor), docteur en géographie, professeur à l'École moyenne, 47, rue Saint-Jacques. — Binche.

Dufrane (Dr C.), chirurgien à l'hôpital, 36, rue d'Havré. — Mons.

Duhem (Pierre), correspondant de l'Institut, associé de l'Académie royale de Belgique, professeur de physique à la Faculté des Sciences, 18, rue de la Teste. — Bordeaux (Gironde — France).

Dumas-Primbault (Henri), ingénieur, château de la Pierre. — Cérilly (Allier — France).

Dumez (Abbé Robert), docteur en sciences naturelles, professeur au Petit Séminaire. — Roulers (Flandre occidentale).

Dumont (André), professeur à l'Université, 18, rue des Joyeuses-Entrées. — Louvain.

Dumortier, conseiller à la Cour d'appel, 7, place Van Artevelde. — Gand.

Duplat (G.), avocat à la Cour d'appel, 48, rue aux Laines. — Bruxelles.

Dupont (Dr Émile), médecin de bataillon, chef des laboratoires de bactériologie et de radiographie à l'Hôpital militaire, 12, rue Goffart. — Bruxelles.

Dupriez (Léon), professeur à l'Université, 194, rue de Bruxelles. — Louvain.

Dupuis (Henri), ingénieur, administrateur de la Société anonyme des Usines de Montcherret. — Acoz (Hainaut).

Duquenne (Dr Louis), 11, rue Lonhienne. — Liége.

Duret (Dr), doyen de la Faculté catholique de médecine, 21, boulevard Vauban. — Lille (Nord — France).

Dusausoy (Clément), professeur à l'Université, 107, chaussée de Courtrai. — Gand.

Dusmet y Alonso (José Maria), docteur en sciences naturelles, 7, plaza de Santa-Cruz. — Madrid.

Duthoit (E.), professeur à la Faculté catholique de Droit, 141, rue Jacquemars-Gielée. — Lille (Nord — France).

Dutilleux (Maurice), ingénieur, 4, place François-Bossuet. — Bruxelles.

Dutordoir (Hector), ingénieur en chef, directeur du service technique provincial, 339, boulevard du Château. — Gand.

École libre de l'Immaculée-Conception. — Vaugirard-Paris.

École libre Sainte-Geneviève, rue des Postes. — Paris.

Eeckhout (G.), avocat à la Cour d'appel, 28, rue Dautzenberg. — Bruxelles.

Egan, S. J. (R. P. Michel), M. A., F. R. U. I., Miltown Park. — Dublin (Irlande).

Fabre (J.-H.), naturaliste. — Sérignan, par Vaucluse (Vaucluse — France.

Fabry (Louis), docteur ès sciences, astronome à l'Observatoire, 2, place de la Corderie. — Marseille (Bouches-du-Rhône — France).

Fagnart (Émile), docteur en sciences physiques et mathématiques, professeur à l'Université de Gand, 9, place des Gueux. — Bruxelles (N.-E.).

Farina (Paul), docteur en médecine, 20, rue de la République. — Menton (Alpes Maritimes — France).

de Favereau de Jenneret (Bon), ancien Ministre des Affaires étrangères. — Bruxelles.

Fenaert (Abbé Florent), maître de conférences à l'Université catholique, 81, rue Denfert-Rochereau. — Lille (Nord — France).

Fenaux (Édouard), directeur honoraire de la prison centrale, chaussée de Tirlemont. — Louvain.

Fernandès (Dr Rob.), 13, avenue Galilée. — Saint-Josse-ten-Noode (Bruxelles).

Ferrata (S. É. le cardinal). — Rome.

Fiessinger (Dr),membre correspondant de l'Académie de médecine de Paris, 4, rue de la Renaissance. — Paris.

Fita y Colomé, S. J. (R. P. Fidel), 12, calle de Isabel la Catolica. — Madrid.

de Fooz (Guillaume), ingénieur, 27, rue de Paris. — Tientsin (Chine).

Fournier O. S. B. (Dom Grégoire), 55, boulevard de Jodoigne extérieur. — Louvain.

Francotte (Henri), professeur à l'Université, 1, rue Lebeau. — Liége.

Francotte (Xavier), docteur en médecine, professeur à l'Université, 15, quai de l'Industrie. — Liége.

Gaillard, S. J. (R. P. J.), 11, rue des Récollets. — Louvain.

de Garcia de la Vega (Bon Victor), docteur en droit, 37, rue du Luxembourg. — Bruxelles.

Gauthier (Chanoine), 21, rue Louise. — Malines.

Gelin (l'Abbé E.), docteur en philosophie et en théologie, professeur de mathématiques supérieures au Collège Saint-Quirin. — Huy.

Gendebien (Paul), docteur en droit, 53, rue Montoyer. — Bruxelles.

Georgetown College Observatory (Rev. Director of the). — Washington D. C. (États-Unis d'Amérique).

Gerard (Ern.), secrétaire général du Ministère des Chemins de fer, Postes et Télégraphes, 15, avenue de la Renaissance. — Bruxelles.

Gesché (L.), professeur à l'Université, 20, rue d'Egmont. — Gand.

Giele (Frédéric), docteur en médecine. — Jette-Saint-Pierre (Brabant).

Gilbert (Paul), ingénieur. — Heer-Agimont (Namur).

Gillès de Pélichy (B^{on} Ch.), membre de la Chambre des Représentants, château d'Iseghem (Flandre occidentale).

Glibert (D.), docteur en médecine, inspecteur du Travail. — Uccle (Bruxelles).

Glorieux, docteur en médecine, 36, rue Jourdan. — Bruxelles.

Godfrind (Victor), pharmacien militaire de 1^{re} classe, chimiste du Magasin central d'habillement de l'Armée, 114, avenue de la Couronne. — Ixelles (Bruxelles).

Goedseels (Édouard), administrateur-inspecteur de l'Observatoire royal de Belgique, professeur à l'Université de Louvain, 140, rue de Bruxelles. — Louvain.

Goffart, chargé de cours à l'Université de Gand, 11, chaussée de Louvain. — Bruxelles.

Gollier (Th.), professeur à l'Université de Liége, château de Glain. — Rixensart (Brabant).

Gonzalez de Castejon (Miguel), comte d'Aybar, lieutenant colonel d'État-Major, secrétaire de S. M. le Roi d'Espagne, Real palacio. — Madrid.

Goris (Ch.), docteur en médecine, 181, rue Royale. — Bruxelles.

Gosselet (Jules), correspondant de l'Institut, docteur honoraire de l'Université de Louvain, professeur émérite de la Faculté des Sciences, 18, rue d'Antin. — Lille (Nord — France).

Graffin (Mgr), professeur à l'Institut catholique, 47, rue d'Assas. — Paris.

GRAND' EURY (Cyrille), correspondant de l'Institut, professeur honoraire à l'École des Mines, 5, Cours Victor Hugo. — Saint-Étienne (Loire — France).

GRANITO DI BELMONTE (S. Exc. Mgr), nonce apostolique. — Vienne.

GRÉGOIRE (Chan. Victor), professeur à l'Université, 44, rue de Bériot. — Louvain.

GREINDL (B^{on}), capitaine commandant d'État-Major, professeur à l'École de guerre, 19, rue Tasson-Snel. — Bruxelles.

GRINDA (Jésús), ingénieur des Ponts et Chaussées, Fuencarral, 74 y 76. — Madrid.

DE GROSSOUVRE (A.), ingénieur en chef des Mines, 4, rue Petite Armée. — Bourges (Cher — France).

GUELTON (Georges), attaché au Ministère de l'Intérieur et de l'Instruction publique, 119, rue Marie-Thérèse. — Louvain.

GUERMONPREZ (D^{r}), professeur aux Facultés catholiques, membre correspondant de l'Académie royale de médecine de Belgique et de la Société de chirurgie de Paris, 63, rue d'Esquermes. — Lille (Nord — France).

HACHEZ (F.), professeur à l'Université de Louvain, 19, rue de Pavie. — Bruxelles.

HAGEN, S. J. (R. P.), directeur de l'Observatoire du Vatican. — Rome.

HAIBE (D^{r} Achille), directeur de l'Institut provincial de Bactériologie, rue Louise. — Namur.

HALOT (Alex.), consul du Japon, secrétaire du Conseil supérieur de l'État indépendant du Congo, 318, avenue Louise. — Bruxelles.

HAMONET (Abbé), professeur à l'Institut catholique, 74, rue de Vaugirard. — Paris.

HANS (Jules), lieutenant d'artillerie, 28, rue Dothée. — Liége.

HARMANT (Émile), ingénieur, 121, rue de Pâturages. — Wasmes (Hainaut).

HATON DE LA GOUPPILLIÈRE (J.-N.), membre de l'Institut, directeur honoraire de l'École des Mines, 56, rue de Vaugirard. — Paris.

HAVENITH (J.), lieutenant adjoint d'État-Major, 128, avenue de la Couronne. — Bruxelles.

HEBBELYNCK (Mgr A.), recteur magnifique honoraire de l'Université de Louvain. — Meirelbeke (Gand).

HÉLIN (Henri), 485, chaussée de Waterloo. — Ixelles (Bruxelles).

HELLEPUTTE (G.), Ministre des Chemins de fer, Postes et Télégraphes. — Bruxelles.

DE HEMPTINNE (Alexandre), professeur à l'Université de Louvain, 51, rue Basse des Champs. — Gand.

HENRARD (Dr Étienne), 105, avenue du Midi. — Bruxelles.

HENRARD (Dr Félix), 216, boulevard du Hainaut. — Bruxelles.

HENRY (Albert), avocat, 45, rue de la Ruche. — Bruxelles.

HENRY (Comdt J.), boulevard Dolez. — Mons.

HENRY (Louis), professeur à l'Université, correspondant de l'Institut, membre de l'Académie royale de Belgique, 2, rue du Manège. — Louvain.

HENRY (Paul), professeur à l'Université, 11, rue des Joyeuses-Entrées. — Louvain.

HENSEVAL (Dr Maurice), inspecteur chargé de la direction du laboratoire du service de santé et d'hygiène, 178, avenue Georges-Henri. — Bruxelles.

HERVIER (Abbé Joseph), 31, Grande rue de la Bourse. — Saint-Étienne (Loire — France).

HEYLEN (S. G. Mgr), évêque de Namur.

HEYMANS (J. F.), docteur en sciences, professeur à l'Université, 7, boulevard de l'Hospice. — Gand.

HEYNEN (Dr W.), membre de la Chambre des Représentants. — Bertrix (prov. de Luxembourg) ; ou, 85, rue du Commerce. — Bruxelles.

HUMBERT (G.), membre de l'Institut, ingénieur en chef des Mines, professeur à l'École polytechnique, 10, rue Daubigny. — Paris.

HUWART (Jules), directeur du Laboratoire de recherches relatives à la pêche maritime, 11, rue du Vélodrome. — Ostende.

HUYBERECHTS (Dr Th.), 10, rue Hôtel des Monnaies. — Bruxelles.

INIGUEZ Y INIGUEZ (Francisco), catedrático de astronomia en la Universidad, director del Observatorio astronomico. — Madrid.

INSTITUT SAINT-IGNACE, 47, Courte rue Neuve. — Anvers.

JACOBS (Mgr), curé-doyen émérite de Sainte-Gudule, 246, avenue de la Couronne. — Bruxelles.

Jacobs (Fernand), président de la Société belge d'astronomie, 21, rue des Chevaliers. — Bruxelles.

Jacopssen, S. J. (R. P. Raymond), Collège Notre-Dame, 39, rue des Augustins. — Tournai.

Janssens (Félix), avocat, 29, rue Ernest Solvay. — Ixelles (Bruxelles).

Javaux (Dr), 79, rue des Éburons. — Bruxelles.

de Joannis (Abbé Joseph), 7, rue Coëtlogon. — Paris.

Joly (Albert), juge au tribunal de première instance, 8, rue de la Grosse-Tour. — Bruxelles.

Joly (Léon), conseiller au Conseil des Mines, 56, avenue Brugmann. — Bruxelles.

Jordan (Camille), membre de l'Institut, professeur à l'École polytechnique, 48, rue de Varenne. — Paris.

Jourdain (Louis), ingénieur, 12, rue Montagne-aux-Herbes-Potagères. — Bruxelles.

Kaisin (Félix), professeur à l'Université, Institut géologique, 10, rue Saint-Michel. — Louvain; ou, Floreffe (prov. de Namur).

Kersten (Joseph), inspecteur général des charbonnages patronnés par la Société Générale, 3, Montagne du Parc. — Bruxelles.

Kieffer (Abbé J. Jacques), professeur au Collège Saint-Augustin. — Bitsch (Lorraine — Allemagne).

Kirsch, C. S. C. (R. P. Alexandre-M.). Université de Notre-Dame (Indiana — États-Unis).

Kirsch (Mgr J.-P.), professeur à l'Université. — Fribourg (Suisse).

de Kirwan (Charles), ancien inspecteur des Forêts, Villa Dalmassière. — Voiron (Isère — France).

Koltz (Eugène), ingénieur, 184, rue de Malines. — Louvain.

Kowalski (Eug.), ingénieur des Arts et Manufactures, 18, rue d'Alzon. — Bordeaux (Gironde — France).

Kurth (Godefroid), membre de l'Académie royale de Belgique. — Assche (Brabant); ou, Institut historique belge, 18, place Resticucci. — Rome.

Ladeuze (Mgr P.), recteur magnifique de l'Université, 110, rue de Namur. — Louvain.

Laflamme (Mgr), Université Laval. — Québec (Canada).

Lagasse-de Locht (Charles), inspecteur général des Ponts et Chaussées, directeur général au Ministère des Travaux publics, président de la Commission royale des monuments, 167, chaussée de Wavre. — Bruxelles.

Lahousse (D^{r}), professeur à l'Université, St-Denis-Westrem (Gand).

Lambert (Camille), ingénieur en chef des Chemins de fer de l'État. — Woluwe-Saint-Lambert (Brabant).

Lambert (Maurice), ingénieur.— Woluwe-Saint-Lambert (Brabant).

Lambin (A.), ingénieur des Ponts et Chaussées, chef de cabinet du Ministre des Finances et des Travaux publics, 181, avenue de Tervueren. — Woluwe-lez-Bruxelles.

Lambiotte (Omer), directeur-gérant des charbonnages Élisabeth. — Auvelais (prov. de Namur).

Lambo, S. J. (R. P. Charles), Collège Saint-Louis, 61, quai de Longdoz. — Liége.

Lambot (Oscar), professeur à l'Athénée royal d'Ixelles, 89, chaussée Saint-Pierre. — Bruxelles.

Laminne (Chanoine Jacques), professeur à l'Université, 7b, rue de Bériot. — Louvain.

Lannoy, S. J. (R. P. J.), 11, rue des Récollets. — Louvain.

Laruelle (D^{r}), 22, rue du Congrès. — Bruxelles.

Laurent (D^{r} Camille), 5, rue Joseph Jacquet. — Bruxelles.

de Laveleye (Paul), 16, rue de Neuchâtel. — St-Gilles (Bruxelles).

Lebrun (D^{r} Hector), 25, avenue Verte. — Woluwe-Saint-Pierre (Brabant).

Lecat (Maurice), docteur en sciences physiques et mathématiques, docteur en sciences naturelles, ingénieur civil des Mines. — Watermael (Bruxelles).

Lechalas (G.), ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, 13, quai de la Bourse. — Rouen (Seine Inférieure — France).

Leclercq (Jules), vice-président au tribunal de première instance, membre de l'Académie royale de Belgique, 89, rue de la Loi. — Bruxelles.

Leconte (Félix), ingénieur-conseil., 25, rue Royale. — Tournai.

Lefebvre (Mgr Ferdinand), professeur à l'Université, 34, rue de Bériot. — Louvain.

Lefebvre (R. P. Maurice), docteur en sciences naturelles, missionnaire, Roman catholic church.—Manilla (Philippines).

Legrand (Chanoine Alfred), 37, rue de Bruxelles. — Namur.

Leirens-Eliaert, rue du Pont. — Alost.

Lejeune de Schiervel (Charles), ingénieur des Mines, 23, rue du Luxembourg. — Bruxelles.

Lejeune-Simonis, château de Sohan. — Pepinster (prov. de Liége).

Lemaire (Abbé), 65, rue Traversière. — Bruxelles.

Lemoine (Georges), membre de l'Institut, inspecteur général des Ponts et Chaussées, professeur de chimie à l'École polytechnique, 76, rue Notre-Dame des Champs. — Paris.

Lenoble, professeur aux Facultés catholiques, 28$^{\text{ter}}$, rue Négrier.— Lille (Nord — France).

Le Paige (G.), membre de l'Académie royale de Belgique, administrateur-inspecteur de l'Université, Plateau de Cointe. — Liége.

Leplae (E.), professeur à l'Université, 74, rue de Namur. — Louvain.

Lesire, 14, rue Francart. — Bruxelles.

Lhoest (Henri), ingénieur, directeur des travaux des charbonnages Gosson-Lagasse. — Montegnée (prov. de Liége).

de Liedekerke de Pailhe (C$^{\text{te}}$ Éd.), 47, avenue des Arts. — Bruxelles.

du Ligondès (V$^{\text{te}}$), colonel d'Artillerie en retraite, château de Rochefort. — Saint-Bonnet de Rochefort (Allier — France).

de Limburg-Stirum (C$^{\text{te}}$ Adolphe), membre de la Chambre des Représentants, 72, rue du Trône. — Bruxelles.

Limpens (Émile), avocat. — Termonde.

de Locht (Léon), professeur à l'Université de Liége, château de Trumly. — Trooz (prov. de Liége).

Lucas, S. J. (R. P. J.-D.), professeur à la Faculté des Sciences, Collège Notre-Dame de la Paix, 45, rue de Bruxelles. — Namur.

Maes (Abbé), curé de Saint-Job. — Uccle.

Maes, docteur en géographie, 41, rue de la Pépinière. — Bruxelles.

Mansion (Hubert), ingénieur, 188, avenue du Margrave. — Anvers.

Mansion (Paul), professeur à l'Université, inspecteur des Études à l'École préparatoire du Génie civil et des Arts et Manufactures, membre de l'Académie royale de Belgique, 6, quai des Dominicains. — Gand.

Maréchal, S. J. (R. P. J.), docteur en sciences naturelles, Freinberg. — Linz (Haute-Autriche).

Martin (Dr), 9, boulevard Ad aquam. — Namur.

Masen (Aimé), docteur en médecine, 30, rue Middelbourg. — Boitsfort (Brabant).

Matagne (Henri), docteur en médecine, 31, avenue des Courses.— Bruxelles.

Maubert (Frère), des Frères des Écoles chrétiennes, au Scolasticat de Jesu Placet. — Louvain.

de Maupeou (Cte), ingénieur, directeur du Génie maritime, 4, place du Gast. — Laval (Mayenne — France).

Meessen (Dr Wilhelm), 28, rue Froissard. — Bruxelles.

de Meeus (Cte Henri), ingénieur, rue du Vert-Bois. — Liége.

Mennes (Dr), 21, Rosier. — Anvers.

Mercier (S. É. le cardinal), archevêque de Malines.

Merten (Albert), ingénieur, professeur à l'Université, 25, boulevard Albert. — Gand.

Meunier (Fernand), conservateur du Musée de la Société royale de zoologie d'Anvers, professeur à l'Institut supérieur pour jeunes filles, 15, rue du Grand Chien.— Anvers.

Meurice, professeur à l'Université de Liége, bourgmestre de Visé, 13, rue des Récollets. — Visé (prov. de Liége).

Meuwissen, ingénieur, professeur à l'Université, 1, avenue Clémentine. — Gand.

Michotte (Albert), professeur à l'Université de Louvain, 294, rue Royale. — Bruxelles.

Miranda Bistuer (S. G. Mgr), évêque de Ségovie (Espagne).

Moëller (Dr A.), membre de l'Académie royale de médecine, 1, rue Montoyer. — Bruxelles.

Moëller (Dr Nicolas), 18, rue Ortélius. — Bruxelles.

de Moffarts (Bon Paul), château de Botassart, par Noirefontaine (prov. de Luxembourg).

de Monge (Vte Joseph), ingénieur, 12, rue Marie de Bourgogne. — Bruxelles.

de Monge (Vte Paul), château de Wallay. — Ohey (prov. de Namur).

de Montessus de Ballore (Cte F.), directeur du service sismologique du Chili, 302, Av. Republica.— Santiago (Chili).

de Montessus de Ballore (Vte Robert), professeur suppléant à l'Université catholique, 8, place Genevières. — Lille (Nord — France).

de Moreau d'Andoye (B^{on}), 11, rue Archimède. — Bruxelles.

Morelle (D^{r} Aimé), chef du service d'urologie et de dermatologie à l'Institut chirurgical, 26, rue Archimède. — Bruxelles.

Moreux (Abbé Th.), directeur de l'Observatoire. — Bourges (Cher — France).

Morisseaux, directeur général au Ministère de l'Industrie et du Travail, 25, rue du Berceau. — Bruxelles.

Mullie (Gilbert), inspecteur vétérinaire adjoint au Ministère de l'Agriculture, 23, avenue Jean Linden. — Bruxelles.

Muthnon, S. J. (R. P.), Oude Kasteel. — Gemert (Hollande).

Nava di Bontifé (S. É. le cardinal), archevêque de Catane (Sicile — Italie).

Navas, S. J. (R. P. Longin), Colegio del Salvador. — Zaragoza (Espagne).

Nerinx (Alfred), professeur à l'Université de Louvain, secrétaire de l'Institut de Droit international, 8, rue Bosquet. — Saint-Gilles (Bruxelles).

Neuberg (J.), membre de l'Académie royale de Belgique, professeur à l'Université, 6, rue de Selessin. — Liége.

Newton (Général John), 279, Adelphi street. — Brooklyn (New-York — États-Unis).

Noguier de Malijay (Abbé N.), professeur de sciences, 14, rue de Bagneux. — Paris (VI^{e}).

Nollée de Noduwez, membre honoraire du Corps diplomatique de S. M. le Roi des Belges, camérier secret de S.S. Pie X, 14, avenue de Marnix. — Bruxelles.

Nys (Chanoine), professeur à l'Université, président du Séminaire Léon XIII, 6, rue Vésale. — Louvain.

Nyssens (Julien), ingénieur, 44, rue Juste-Lipse. — Bruxelles.

Nyssens (Pierre), directeur du Laboratoire agricole de l'État, 16, rue du Jambon. — Gand.

Obeso, S. J. (R. P. J. Manual), Colegio de Estudios Superiores de Deusto. — Bilbao (Espagne).

d'Ocagne (Maurice), ingénieur en chef des ponts et chaussées, répétiteur à l'École polytechnique, 30, rue de la Boëtie. — Paris.

Œhlert (D.-P.), correspondant de l'Institut, conservateur du Musée d'histoire naturelle, 29, rue de Bretagne. — Laval (Mayenne — France).

d'Orjo de Marchovelette, major adjoint d'État-Major, chef du Cabinet du Ministre de la Guerre, 97, rue Froissard. — Bruxelles.

Pasquier (Alfred), docteur en médecine. — Châtelet (Hainaut).

Pasquier (Ern.), professeur à l'Université, 22, rue Marie-Thérèse, — Louvain.

Pauwels, S. J. (R. P. J.), docteur en sciences naturelles, 11, rue des Récollets. — Louvain.

Peeters (Jules), docteur en droit, 51, rue Saint-Martin. — Tournai.

Picard (É.), membre de l'Institut, professeur à la Sorbonne, 4, rue Bara. — Paris (VI^{e}).

Pieraerts (J.), professeur à l'Université, 19, rue Notre-Dame. — Louvain.

de Pierpont (Édouard), château de Rivière. — Profondeville (prov. de Namur).

Pierre (Abbé Oscar), directeur de l'École Saint-Grégoire, rue Mazy. — Jambes (Namur).

Poskin (Paul), professeur de Physique à l'Institut agricole de l'État. — Gembloux).

Poullet (Prosper), associé de l'Institut de Droit international, professeur à l'Université, 28, rue des Joyeuses-Entrées. — Louvain.

Proost (Alphonse), directeur général au Ministère de l'Intérieur et de l'Agriculture, 13, rue Marie de Bourgogne. — Bruxelles ; ou, Mousty-lez-Ottignies (Brabant).

Proost (Chanoine), aumônier honoraire de la Cour, rue Mercelis. — Ixelles (Bruxelles).

Provincial (R. P.) de la Compagnie de Jésus, 165, rue Royale. — Bruxelles.

Rachon (Abbé Prosper), curé de Ham, par Longuyon (Meurthe-et-Moselle — France).

Raclot (Abbé V.), aumônier des Hospices et directeur de l'Observatoire. — Langres (Haute-Marne — France).

Rector (R. P.) del Colegio Catolico del Sagrado Corazon de Jesus, calzada del Aguazul (Antiguo velodromo). — Puebla (Mexique).

Rector (R. P.) del Colegio del Jesus. — Tortosa (Tarragona — Espagne).

Renaud, professeur de métallurgie à l'Université, 22, quai des Moines. — Gand.

Renier (Armand), ingénieur au Corps des Mines, 74, rue Fabri. — Liége.

de Renette de Villers-Perwin (B^{on}), capitaine commandant adjoint d'État-Major au 2^{me} Guides, 69, rue d'Arlon. — Bruxelles.

de Reul (Gustave), ingénieur, directeur de l'École industrielle, 10, boulevard Cauchy. — Namur.

de Ribaucourt (C^{te}), 27, rue de Loxum. — Bruxelles ; ou, château de Perck, par Vilvorde (Brabant).

de Ribaucourt (C^{te} Adrien), ingénieur agricole, 344, avenue Louise. — Bruxelles.

Richald (Jos.), ingénieur principal des Ponts et Chaussées, professeur à l'Université de Gand, 69, rue Archimède. — Bruxelles.

Rinaldini (S. Exc. Mgr), nonce apostolique. — Madrid.

Roberti (Max), notaire, rue de Namur. — Louvain.

Rodriguez Risueno (Emiliano), catedrático de historia natural en la Universidad, 16, prâl, calle Duque de la Victoria. — Valladolid (Espagne).

Roersch (A.), professeur à l'Université, 75, rue de l'Avenir. — Gand.

Rogie (D^{r}), professeur à la Faculté catholique de médecine, 108, rue Jacquemars-Gielée. — Lille (Nord — France).

Roland (Pierre), ingénieur, 55, rue Vital Decoster. — Louvain.

Rose (J.), professeur de mathématiques à l'Athénée royal. — Chimay (Hainaut).

Roux (Cl.), professeur aux Facultés catholiques, 25, rue du Plat. — Lyon (Rhône — France).

Rutten (S. G. Mgr), évêque de Liége.

Ryan (Hugh), M. A., F. R. U. I., membre de l'Académie royale irlandaise, professeur de chimie à l'École de médecine de l'Université catholique, au Collège de l'Université de Dublin et au Collège Saint-Patrick de Maynooth, Medical School, Cecilia Street. — Dublin (Irlande).

Sabatier (Paul), professeur de chimie à l'Université. — Toulouse (Haute-Garonne. — France).

Sageret, château de Kervihan, par Carnac (Morbihan — France).

de Saintignon (C^{te}), maître de Forges. — Longwy-Bas (Meurthe-et-Moselle — France).

de Salvert (V^{te}), professeur aux Facultés catholiques de Lille, 45, rue des Missionnaires. — Versailles (Seine-et-Oise — France) ; ou, château de Villebeton, par Châteaudun (Eure-et-Loir — France).

Sanz (Pelegrin), ingeniero de Caminos, 5, 2°, calle Bordadores. — Madrid.

Sarret (Jean), agrégé à l'Université, professeur de physique au Lycée Impérial Ottoman, 13, rue Aïnali tchesmé. — Constantinople (Turquie).

Schaffers, S. J. (R. P. V.), docteur en sciences physiques et mathématiques, 11, rue des Récollets. — Louvain.

Scheuer, S. J. (R. P. P.), 11, rue des Récollets. — Louvain.

de Schilde (B^{on}), château de Schilde (prov. d'Anvers).

de Schilde (B^{on} G.), 48, rue Kipdorp. — Anvers.

Schmidt (Alfred), chimiste de la maison E. Leybold's Nachfolger, 7, Bruderstrasse. — Cologne (Allemagne).

Schmitz, S. J. (R. P. G.), directeur du Musée géologique des bassins houillers belges, 11, rue des Récollets. — Louvain.

Schmitz (Théodore), ingénieur civil des Mines, 31, rue Jordaens. — Anvers.

Schockaert (R.), professeur à l'Université, 13, place du Peuple. — Louvain.

Schollaert, Ministre de l'Intérieur et de l'Agriculture. — Bruxelles ; ou, Vorst (prov. d'Anvers).

Schoolmeesters (Mgr Émile), vicaire-général, 14, rue de l'Évêché. — Liége.

Schoonjans, S. J. (P. Ch.), 11, rue des Récollets. — Louvain.

Schreiber, agronome de l'État. — Hasselt.

Schul, S. J. (R. P.), 11, rue des Récollets. — Louvain.

de Selliers de Moranville (Ch^{er} A.), général-major commandant la Gendarmerie nationale, 46, chaussée de Charleroi. — Bruxelles.

Senderens (Abbé), professeur à l'Université catholique, 36, rue de la Fonderie. — Toulouse (Haute-Garonne — France).

Sentroul (Mgr), professeur à la Faculté libre de philosophie et lettres, Mosteiro de Sao Bento. — Sao Patulo (Brésil).

Sépulchre (Émile), ingénieur, château d'Awans. — Bierset-Awans (prov. de Liége).

Sibenaler (N.), professeur à l'Université, 31, boulevard de Jodoigne. — Louvain.

Sièges, 93, rue du Trône. — Bruxelles.

Simon (Dr), 134, rue de la Loi. — Bruxelles,

Simonart (Dr), 33a, rue du Canal. — Louvain.

de Sinéty, S. J. (R. P. Robert), Oude Kasteel. — Gemert (Hollande).

Siret (Henri), ingénieur, directeur général de la Cie des Chemins de fer du Congo Supérieur aux Grands Lacs africains, 27, avenue Brugmann. — Bruxelles.

Siret (Louis), ingénieur, 11, rue Jordaens. — Anvers.

Slingeneyer de Goeswin, capitaine commandant d'État-major, Écuyer, 62, avenue Isabelle. — Anvers.

Smedts (Arthur), répétiteur à l'Université, 58, boulevard de la Citadelle. — Gand.

Smekens (Théoph.), président honoraire du tribunal de 1re instance, 34, avenue Quentin Metsys. — Anvers.

Smets (Dr), 104, rue Van de Weyer. — Bruxelles.

Smits (Eugène), ingénieur, rue Marie-Thérèse. — Bruxelles.

Soisson (G.), ingénieur, docteur en sciences, professeur à l'Athénée grand-ducal, 19, rue Joseph II. — Luxembourg (Grand-Duché).

Solano y Eulate (José-Maria), Marqués del Socorro, professeur de géologie au Musée d'histoire naturelle, 41, bajo, calle de Jacometrezo. — Madrid.

Solé (Dr Victor), 262, rue Royale. — Bruxelles.

Somville (Oscar), docteur en sciences physiques et mathématiques, 120, rue Beeckman. — Uccle (Bruxelles).

de Sparre (Cte), professeur aux Facultés catholiques de Lyon, château de Vallière. — Saint-Georges-de-Reneins ; ou, 7, avenue de l'Archevêché. — Lyon (Rhône — France).

Springael (Auguste), ingénieur, 74, rue de Locht. — Schaerbeek.

Stainier (Xavier), professeur à l'Université de Gand, membre de la Commission géologique de Belgique, 27, Coupure. — Gand.

van den Steen de Jehay (C^{te} Frédéric), chef du Cabinet du Ministre des Affaires Étrangères, château de Bassinnes, par Avins-en-Condroz (prov. de Namur) ; ou, 202, rue de la Loi. — Bruxelles.

Stillemans (S. G. Mgr Ant.), évêque de Gand.

Stillemans (Jean), ingénieur, directeur des travaux d'Etterbeek, 5, rue Fétis. — Bruxelles.

Stinglhamber (Émile), docteur en droit, 43, avenue Ernestine. — Bruxelles.

Stoffaes (Chan.), professeur à la Faculté catholique des Sciences, directeur de l'Institut des Arts et Métiers, 6, rue Auber. — Lille (Nord — France).

Storms (Ernest), ingénieur, 6, rue du Receveur. — Bruges.

Stouffs (D^{r}), rue de Charleroi. — Nivelles.

Stouffs (D^{r} Jules), 205, avenue Louise. — Bruxelles.

Struelens (Alfred), docteur en médecine, 18, rue Hôtel des Monnaies. — Saint-Gilles (Bruxelles).

Supérieur du Collège des Joséphites, Vieux-Marché. — Louvain.

Supérieur du Collège Saint-Jean-Berchmans, 35, place de Meir.— Anvers.

Suttor, ingénieur honoraire des Ponts et Chaussées, 19, rue des Bogards. — Louvain.

Swolfs (D^{r} Oscar), 59, rue Vilain XIIII. — Bruxelles.

Taymans (Émile), notaire. — Tubize (Brabant).

Terlinden, 15, rue de Livourne. — Bruxelles.

Termier (Pierre), membre de l'Institut, 164, rue de Vaugirard.— Paris.

Théron (Joseph), docteur en sciences physiques et mathématiques, préfet des études à l'Athénée royal. — Chimay.

Thiébaut (Fernand), industriel, bourgmestre de Monceau-sur-Sambre (Hainaut).

Thiéry (Chan. Armand), Institut supérieur de Philosophie, 1, rue des Flamands. — Louvain.

Thirion, S. J. (R. P. J.), 11, rue des Récollets. — Louvain.

Thiry (François), bourgmestre. — Pecq (Hainaut).

Tibbaut (Émile), avocat à la Cour d'Appel, membre de la Chambre des Représentants, 4, avenue de l'Astronomie. — Bruxelles.

Timmermans (François), ingénieur, directeur-gérant de la Société anonyme des ateliers de construction de la Meuse, 22, rue de Fragnée. — Liége ; ou, Seraing (prov. de Liége).

Tits (A.), oculiste, 49, rue des Joyeuses-Entrées. — Louvain.

Tits (Abbé Léon), docteur en sciences physiques et mathématiques, Institut Saint-Louis, rue du Marais. — Bruxelles.

Torroja Caballe (Eduardo), architecte, professeur de géométrie descriptive à la Faculté des Sciences de l'Université, membre correspondant de l'Académie royale des Sciences, 9-11e rue Requena. — Madrid.

de Trazegnies (Mis). — Corroy-le-Château, par Mazy (prov. de Namur).

de T'Serclaes (Mgr Charles), président du Collège belge.— Rome.

de T'Serclaes (Cte Jacques), colonel, chef d'État-Major, professeur à l'École de guerre, 34, rue Jordaens. — Ixelles (Bruxelles).

d'Ursel (Cte Aymard), capitaine d'artillerie, château de Bois-de-Samme, par Wauthier-Braine (Brabant) ; ou, 25, rue de la Science. — Bruxelles.

de la Vallée Poussin (Ch.-J.), membre de l'Académie royale de Belgique, professeur à l'Université, 151, rue de la Station. — Louvain.

Van Aubel (Dr Ch.), directeur de la Maternité Sainte-Anne, 29, avenue de Cortenberg. — Bruxelles.

Van Ballaer (Chanoine), curé de N.-D. du Sablon, 6, rue Bodenbroeck. — Bruxelles.

Van Bastelaer (Léonce), ingénieur civil des Mines, 13, rue Newton, — Bruxelles.

Van Biervliet (J.), professeur à l'Université, 5, rue Metdepenningen. — Gand.

Van Brabandt (L.), ingénieur des Ponts et Chaussées, 20, rue du Grand Chien. — Anvers.

Van Caeneghem (Abbé F.), directeur de l'École Supérieure commerciale et consulaire, Grand'Place. — Mons.

Van den Bossche (Abbé). — Ophasselt (Flandre orientale).

Van den Bossche (G.), professeur à l'Université, 14, rue Basse. — Gand.

Van den Gheyn (Chanoine Gabriel), 13, avenue des Moines. — Gand.

Van den Gheyn, S. J. (R. P. Joseph), conservateur à la Bibliothèque royale, 14, rue des Ursulines. — Bruxelles.

Vandenpeereboom (E.), ingénieur, 15, rue d'Artois. — Liége.

Vanderlinden, ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, administrateur-inspecteur de l'Université, 27, Cour du Prince. — Gand.

Vanderlinden (E.), assistant au service météorologique de l'Observatoire royal. — Uccle (Bruxelles).

Van der Mensbrugghe (A.), 131, Coupure. — Gand.

Van der Mensbrugghe (G.), membre de l'Académie royale de Belgique, professeur émérite de l'Université, 131, Coupure. — Gand.

Van der Mensbrugghe (R.), ingénieur des Chemins de fer de l'État, 131, Coupure. — Gand.

Van der Smissen (Édouard), avocat, professeur à l'Université de Liége et à l'École de Guerre, 13, rue des Cultes. — Bruxelles.

Vanderstraeten (Dr A.), 68, rue du Trône. — Bruxelles.

Van der Vaeren, agronome de l'État, 220, chaussée d'Alsemberg, — Uccle (Bruxelles).

Vandevyver, professeur à l'Université, 63, boulevard de la Citadelle. — Gand.

Vandevyver (M.), docteur en droit, 63, boulevard de la Citadelle. — Gand.

Van Durme, docteur en médecine, professeur à l'Université, 8, quai des Tonneliers. — Gand.

Van Gehuchten (A.), professeur à l'Université, 36, rue Léopold. — Louvain.

Van Hoeck (Dr Ém.), 13, rue Traversière. — Bruxelles.

Van Keerberghen, docteur en médecine, 21, rue du Trône. — Bruxelles.

Van Laethem (Dr Alban), 426, chaussée d'Alsemberg. — Uccle (Bruxelles).

Van Mollé (Abbé J.), professeur au Petit Séminaire. — Malines.

Vannutelli (S. É. le cardinal Séraphin). — Rome.

Van Ortroy (Fernand), professeur à l'Université, 37, quai des Moines. — Gand.

Van Swieten (Raymond), 80, avenue de la Toison d'or. — Bruxelles.

Van Velsen, docteur en médecine, 270, rue Royale. — Bruxelles.

Van Ysendyck (William), docteur en médecine, 77, chaussée de Charleroi. — Bruxelles.

Verhelst (Abbé F.), aumônier du Pensionnat du Sacré-Cœur, 24, rue d'Oultremont. — Bruxelles.

Vermeersch, S. J. (R. P. A.), docteur en droit et en sciences politiques et administratives, 11, rue des Récollets. — Louvain.

Verriest (G.), docteur en médecine, professeur à l'Université, 40, rue du Canal. — Louvain.

Verriest (Gustave), docteur en sciences physiques et mathématiques, ingénieur civil des Mines, professeur à l'Université, 40, rue du Canal. — Louvain.

Verschaffel (A.), chargé des travaux astronomiques à l'Observatoire d'Abbadia, par Hendaye (Basses-Pyrénées — France).

Versteylen, membre de la Chambre des Représentants, rue d'Hérenthals. — Turnhout.

Vervaeck, docteur en médecine, 4, place de la Chapelle. — Bruxelles.

Viaene, docteur en géographie, attaché au Bureau ethnographique international, 67, rue Van der Borght. — Jette-Saint-Pierre.

Vicent, S. J. (R. P. Antonio), Colegio de San José. — Valencia (Espagne).

Visart de Bocarmé, avocat, 10, rue Grandgagnage. — Namur.

Visart de Bocarmé (C^te^ Amédée), membre de la Chambre des Représentants, bourgmestre de Bruges.

Vollen (E.), avocat-avoué, place du Peuple. — Louvain.

de Vorges (Alb.), 4, avenue Thiers. — Compiègne (Oise — France).

de Vorges (C^te^ E. Domet), 86, rue de Miromesnil. — Paris.

de Vrégille, S. J. (R. P.), Collège de la Ste-Famille. — Caire (Égypte).

Waffelaert (S. G. Mgr), évêque de Bruges.

Walravens (S. G. Mgr), évêque de Tournai.

Warlomont (René), docteur en médecine et en sciences naturelles, médecin de régiment de 1re classe à l'Institut ophtalmique de l'armée, 66, avenue de Cortenberg. — Bruxelles.

Wasmann, S. J. (R. P.), Bellevue.— Luxembourg (Grand-Duché).

Wasteels (C.), professeur à l'Université, 17, rue d'Akkergem. — Gand.

de Wavrin (M^{is}), 3, place du Comte de Flandre. — Gand.

Wéry (D^{r} Aug.). — Selayn (prov. de Namur).

Wibo (D^{r} Maurice), 39, rue Duquesnoy. — Bruxelles.

Willaert, S. J. (R. P. Fernand), docteur en sciences physiques et mathématiques, 11, rue des Récollets. — Louvain.

Willame (Aimé), ingénieur, 21, place Dailly. — Schaerbeek.

Wilmart (L.), 169, rue de Livourne. — Bruxelles.

Wilmotte (Abbé). — Saint-Servais (Namur).

Wittmann (D^{r} Jules), 3, rue du Sac. — Malines.

Witz (Aimé), correspondant de l'Institut, professeur aux Facultés catholiques, 29, rue d'Antin.—Lille (Nord—France).

Wolf (C.), membre de l'Institut, 36, avenue de l'Observatoire. — Braine (Aisne — France).

Wolters (Frédéric), ingénieur principal des Ponts et Chaussées, professeur à l'Université, 17, avenue des Moines. — Gand.

Wolters (G.), administrateur-inspecteur honoraire de l'Université de Gand, inspecteur général honoraire des Ponts et Chaussées, 192, rue des Entrepreneurs. — Mont-Saint-Amand (Gand).

de Wouters d'Oplinter (Ch^{er} Fernand), 9, rue du Commerce. — Bruxelles.

Wulf, S. J. (R. P. Th.), professeur de physique au Collège Saint-Ignace. — Fauquemont (Limbourg Hollandais).

Yrigoyen (D^{r} Ciriaco), Fuenterrabia, 33. — Saint-Sébastien (Espagne).

Zech (Abbé), professeur à l'Institut Saint-Louis, rue du Marais.— Bruxelles.

Zeiller (René), membre de l'Institut, professeur à l'École supérieure des Mines, 8, rue du Vieux-Colombier.— Paris.

Liste géographique des membres de la Société scientifique de Bruxelles (1910)

BELGIQUE

Flandre Occidentale : **Bruges** : Coppieters de Stockhove (Abbé Ch.). — Visart de Bocarmé (C^{te} A.). — S. G. Mgr Waffelaert.

Iseghem : Gillès de Pélichy (B^{on} Ch.). — **Ostende** : Huwart. — **Pitthem** : Claerhout (Abbé J.). — **Roulers** : Dumez (Abbé R.). — **Ypres** : De Brouwer (Mich.). — De Brouwer (Chan.).

Flandre Orientale : **Gand** : van der Bruggen (B^{on}). — Cooman (G.). — Crame (Aug.). — Dauwe (D^{r} F.). — De Baets (H.). — De Bloo (J.). — Declercq. — Dumortier. — Dusausoy (Cl.). — Dutordoir (H.). — Gesché (L.). — de Hemptinne (A.). — Heymans (J.-F.). — Mansion (P.). — Merten (Alb.). — Meuwissen. — Nyssens (P.). — Renaud. — Roersch (A.). — Stainier (X.). — S. Gr. Mgr Stillemans. — Van Biervliet (J.). — Van den Bossche (G.). — Van den Gheyn (Chan. G.). — Vanderlinden. — Van der Mensbrugghe (A.). — Van der Mensbrugghe (G.). — Van der Mensbrugghe (R.). — Vandevyver. — Vandevyver (M.). — Van Durme (D^{r}). — Van Ortroy (F.). — Wasteels (C.). — de Wavrin (M^{is}). — Wolters (F.).

Alost : Bauwens (D^{r} Isid.). — Collège Saint-Joseph. — Leirens-Eliaert. — **Meirelbeke** : Mgr A. Hebbelynck. — **Mont-Saint-Amand** (Gand) : Wolters (G.). — **Ophasselt** : Van den Bossche (abbé). — **Termonde** : Limpens (Émile). — **Saint-Denis-Westrem** : Lahousse (D^{r}).

Province d'Anvers : **Anvers** : Alliaume (M.). — Belpaire (F.). — Cogels (J.-B.-Henri). — Dubois (E.). — Institut Saint-Ignace. — Mansion (H.). — Mennes. — Meunier. — de Schilde (B^{on} G.). — Schmitz (Th.). — Siret (L.). — Slingeneyer de Goeswin (Écuyer). — Smekens (Th.). — Supérieur du Collège Saint-Jean-Berchmans. — Van Brabandt.

Malines : De Laet (J.). — Dessain (Ch.). — Gautier (Chan.). — Lemaire (Abbé). — S. É. le cardinal Mercier. — Van Mollé (Abbé J.). — Wittmann (Dr J.). — **Mélis** : de Beughem de Houtem (Vte). — **Schilde** : de Schilde (Bon). — **Turnhout** : Versteylen.

LIMBOURG : **Hasselt** : Schreiber.

LUXEMBOURG : **Bertrix** : Heynen (W.). — **Noirefontaine** : de Moffarts (Bon P.). — **Virton** : Cabeau (Abbé Ch.).

BRABANT : **Bruxelles** : André (J.-B.). — Bayet (A.). — Beernaert (Aug.). — Bertrand (L.). — de Béthune (Bon G.). — de Bien (F.). — de la Boëssière-Thiennes (Mis). — Brifaut. — Carlier (J.). — Cartuyvels (J.). — Cocheteux (Chan.). — Collège Saint-Michel (R. P. H. Bosmans, S. J.). — Coomans (L.). — Coomans (V.). — Cousin (L.). — Craninx (Bon O.). — Cuylits (Dr J.). — Davignon (J.). — De Brabandère — De Coster (C.). — Degive. — De Grave (Dr). — De Greef. — Dejardin. — De Jonghe. — De Lantsheere (Dr J.). — De Lantsheere (L.). — Delcroix (Dr A.). — Delétrez (Dr A.). — De Preter (H.). — Deroitte (Dr V.). — De Smedt, S. J. (R. P. Ch.). — De Wildeman (É.). — Duplat. — Dupont (E.). — Dutillieux (M.). — Eeckhout (G.). — Fagnart (E.). — de Favereau de Jenneret (Bon). — Fernandès (Dr R.). — de Garcia de la Vega (Bon V.). — Gendebien. — Gérard (E.). — Glorieux (Dr). — Goffart. — Goris (Ch.). — Greindl (Bon). — Hachez (F.). — Halot (A.). — Havenith. — Hélin (E.). — Helleputte (G.). — Henrard (Dr É.). — Henrard (Dr F.). — Henry (A.). — Henseval (Dr M.). — Heynen (W.). — Huybrechts (Dr Th.). — Mgr Jacobs. — Jacobs (F.). — Javaux (D.). — Joly (A.). — Joly (L.). — Jourdain (L.). — Kersten (J.). — Lagasse-de Locht (Ch.). — Lambot (O.). — Laruelle (Dr). — Laurent (Dr C.). — de Laveleye, — Leclercq (J.). — Lejeune de Schiervel (Ch.). — Lemaire (Abbé). — de Liedekerke de Pailhe (Cte Éd.). — de Limburg-Stirum (Cte Ad.). — Maes. — Matagne (Dr H.). — Meessen (Dr W.). — Michotte (Abbé). — Moëller (Dr). — Moëller (Dr N.). — de Monge (Vte J.). — de Moreau d'Andoy (Bon). — Morelle (Dr A.). — Morisseaux. — Mullie (G.). — Nollée de Noduwez. — Nyssens (J.). —

d'Orjo de Marchovelette (major). — Proost (A.). — Provincial (R. P.) de la Compagnie de Jésus. — de Rennette de Villers-Perwez (B^{on}). — de Ribaucourt (C^{te}). — de Ribaucourt (C^{te} Adrien). — Richald (J.). — Schollaert. — de Selliers de Moranville (Ch^{er} A.). — Sièges. — Simon (D^{r}). — Siret (H.). — Smets (D^{r}). — Smits (E.). — Stillemans (J.). — Stinglhamber (É.). — Stouffs (D^{r} J.). — Terlinden. — de Trazegnies (M^{is}). — d'Ursel (C^{te} A.). — Van Aubel (Ch.). — Van Ballaer (Ch.). — Van Bastelaer (L.). — Van den Gheyn, S. J. (R. P. J.). — Van der Smissen (Éd.). — Vanderstraeten (D^{r} A.). — Van Hoeck (D^{r} Ém.). — Van Keerbergen (D^{r}). — Van Swieten (R.). — Van Velsen (D^{r}). — Van Ysendyck (D^{r}). — Verhelst (Abbé F.). — Vervaeck (D^{r}). — Warlomont (D^{r} R.). — Wibo (D^{r} W.). — Wilmart (L.). — de Wouters d'Oplinter (Ch^{er} F.). — Zech.

Assche : Kurth. — **Auderghem** : Capart (J.). — **Boitsfort** : Masen (A.) — **Etterbeek** : François. — **Ixelles** (Bruxelles) : Beaujean (Ch.). — De Vadder (V.). — Godfrind (V.). — Janssens. — Lesire. — Proost (Chan.). — de T'Serclaes (C^{te} J.). — **Jette-Saint-Pierre** : Giele (D^{r} Fréd.). — Viaene. — **Watermael** : Lecat (M.).

Louvain : Breithof (F.). — Bruylants. — Cappellen (G.). — Charles, S. J. (R. P. J.). — Collège Saint-Jean-Berchmans. — Daubresse (P.). — Debaisieux. — De Becker (Chan. J.). — Demanet (Chan.). — De Muynck (Chan. R.). — Denys (D^{r} J.). — Deploige (Mgr). — De Walque (F.). — de Dorlodot (Chan. H.). — Dumont (A.). — Dupriez. — Fenaux (Éd.). — Fournier, O.S.B. (Dom Gr.). — Gaillard, S. J. (R. P. J.). — Goedseels (Éd.). — Grégoire (Abbé V.). — Guelton (G.). — Henry (L.). — Henry (P.). — Kaisin (F.). — Koltz (E.). — Mgr P. Ladeuze. — Laminne (Chan. J.). — Lannoy, S. J. (R. P. J.). — Mgr F. Lefebvre. — Leplae (E.). — Maubert (Frère). — Micha. — Nys (Chan.). — Pasquier (Ern.). — Pauwels, S. J. (R. P. J.). — Pieraerts. — Poullet (Pr.). — Roberti (M.). — Roland (P.). — Schaffers, S. J. (R. P. V.). — Scheuer, S. J. (R. P. P.). — Schmitz, S. J. (R. P. G.). — Schockaert (R.). — Schoonjans, S. J. (R. P. Ch.). — Schul, S. J. (R. P.). — Sibenaler (N.). — Simonart (D^{r}). — Supérieur du Collège des Joséphites. — Suttor. — Thiéry (Abbé A.). — Thirion, S. J. (R. P. J.). — Tits (D^{r} A.). — de la Vallée Poussin

(Ch.-J.). — Van Gehuchten. — Vermeersch, S. J. (R. P. A.). — Verriest (Dr G.). — Verriest. — Vollen (E.). — Willaert, S. J. (R. P. F.).

Mousty-lez-Ottignies : Proost (A.). — **Nivelles** : Stouffs (Dr). — **Ottignies** : Bruyer. — **Perck** (par Vilvorde) : de Ribaucourt (Cte). — **Rixensart** : Gollier. — **Saint-Gilles** (Bruxelles) : Nerincx (A.). — Struelens (Dr). — **Saint-Josse-ten-Noode** (Bruxelles) : Delvigne (Chan. A.). — **Schaerbeek** (Bruxelles) : Delmer. — Springael (Aug.). — Willame (A.). — **Tubize** : Taymans (É.). — **Uccle** (Bruxelles) : Casteels. — De Jaer (J.). — Delvosal (J.). — Denoël. — Glibert (Dr D.). — Maes (Abbé). — Smedts (Arthur). — Somville (O.). — Vanderlinden (É.). — Van Laethem (Dr). — **Wauthier-Braine** : d'Ursel (Cte A.). — **Woluwe-lez-Bruxelles** : Lambin (A.). — **Woluwe-Saint-Lambert** : Convent (Dr A.). — Lambert (C.). — Lambert (M.). — **Woluwe-Saint-Pierre** : Lebrun (Dr H.).

Province de Liége : **Liége** : Béco (Dr L.). — Berleur (Ad.). — Collège Saint-Servais. — Duquenne (Dr L.). — Francotte (H.). — Francotte (Dr X.). — Hans (J.). — Lambo, S. J. (R. P. Ch.). — Le Paige (C.). — de Meeus (Cte H.). — Neuberg (J.). — Renier (A.). — S. G. Mgr Rutten. — Mgr Schoolmeesters. — Timmermans (F.). — Vandenpeereboom (E.). — **Bierset-Awans** : Sépulchre (É.). — **Huy** : Gelin (Abbé E.). — **Montegnée** : Lhoest (H.). — **Pepinster** : Lejeune-Simonis. — **Seraing** : Timmermans (F.). — **Stavelot** : David (P.). — **Trooz** : de Locht (L.). — **Visé** : Meurice.

Hainaut : **Mons** : Dufrane (Dr). — Henry (Cdt J.). — Van Caeneghem (Abbé F.).

Acoz : Dupuis (H.). — **Ath** : Clément (Abbé H.). — **Binche** : Dubois (V.). — **Châtelet** : Pasquier (Dr A.). — **Châtelineau** : Allard (F.). — **Chimay** : Rose (J.). — Théron (J.). — **Couillet** : Dochain-Defer. — **Gosselies** : Drion (Bon Ad.). — **Monceau-sur-Sambre** : Thiébaut (F.). — **Pecq** : Thiry (Fr.). — **Péruwelz** : Delaunois (Dr G.). — **Tournai** : Blondel (A.). — Jacopssen, S. J. (R. P. R.). — Leconte (F.). — Peeters (J.). — S. G. Mgr Walravens. — **Wasmes** : Harmant.

PROVINCE DE NAMUR : **Namur** : Alexis-M. Gochet (Frère). — Attout-Van Cutsem. — Baivy (Dr). — Bibot (Dr). — Castelein, S. J. (R. P.). — Collège Notre-Dame de la Paix. — Dierckx, S. J. (R. P. Fr.). — de Greeff, S. J. (R. P. H.). — Haibe (Dr). — S. G. Mgr Heylen. — Legrand (Chan. A.). — Lucas, S. J. (R. P. J.-D.). — Martin (Dr). — de Reul (G.). — Visart de Bocarmé.

Auvelais : Lambiotte (O.). — **Bassinnes** (Avins-en-Condroz) : van den Steen de Jehay (Cte Fréd.). — **Corroy-le-Château** (Mazy) : de Trazegnies (Mis). — **Dinant** : Cousot (Dr). — **Floreffe** : Baseil (Abbé). — de Dorlodot (S.). — **Gembloux** : Bouckaert. — Poskin (P.). — **Heer-Agimont** : Gilbert (P.). — **Jambes** : Pierre (Abbé O.). — **Ohey** : de Monge (Vte P.). — **Profondeville** : de Pierpont (Éd.). — **Saint-Servais** : Wilmotte (Abbé). — **Sclayn** : Wéry (Dr A.).

FRANCE

Paris : Amagat. — Béchaux. — Blondel. — Boussinesq. — Branly (Éd.). — Bulliot (J.). — Capelle (Abbé Éd.). — Dardel (Dr). — École libre de l'Immaculée-Conception. — École libre de Sainte-Geneviève. — Fiessinger (Dr). — Mgr Graffin. — Hamonet (Abbé). — Haton de la Goupillière (J.-N.). — Humbert (G.). — de Joannis (Abbé). — Jordan (C.). — Lemoine (G.). — Noguier de Malijay (Abbé N.). — d'Ocagne (M.). — Picard (É.). — Termier (P.). — de Vorges (Cte E. Domet). — Zeiller (R.).

Départements : *Aisne* : **Braine** : Wolf. — *Allier* : **Cérilly** : Dumas-Primbault (H.). — **Saint-Bonnet de Rochefort** : du Ligondès (Vte). — *Alpes-Maritimes* : **Menton** : Farina (Dr). — **Nice** : Dardel (Dr). — *Aveyron* : **Penchot** (par Viviers) : Berlingin (M.). — *Basses-Pyrénées* : **Abbadia** (par Hendaye) : Verschaffel (A.). — *Bouches-du-Rhône* : **Marseille** : Bedel (Abbé R.). — Fabry (L.). — *Cher* : **Bourges** : de Grossouvre (A.). — Moreux (Abbé Th.). — *Côte-d'Or* : **Corberon** : Beauvois (Eug.). — *Drôme* : **Aiguebelle** (par Grignan) : Arduin (Abbé A.). — *Eure-et-Loir* : **Villebeton** (par Châteaudun) : de Salvert (Vte). — *Gironde* : **Bordeaux** : Duhem (P.). — Kowalski (Eug.). — *Haute-Garonne* :

Toulouse . Sabatier (P.). — Senderens (Abbé). — *Haute-Marne :* **Langres** : Raclot (Abbé V.). — *Isère :* **Lacombe de Lancey** (par Villard-Bonnot) : du Boys (P.). — **Voiron** : de Kirwan (Ch.). — *Loire :* **Saint-Étienne** : Grand'Eury (C.). — Hervier (Abbé J.). *Loiret :* **Orléans** : d'Annoux (Cte H.). — **Laval** : de Maupeou (Cte). — Ehlert (D.-P.). — *Meurthe-et-Moselle :* **Ham** (par Longuyon) : Rachon (Abbé P.). — **Longwy** : de Saintignon (Cte). — *Morbihan :* **Kervihan** : Sageret. — *Nord :* **Cambrai** : Coulon (Dr). — **Lille** : d'Adhémar (Vte R.). — Annycke (Abbé Th.). — Barrois. — Mgr Baunard. — Bourgeat (Chan.). — Delemer (J.). — Desplats (Dr H.). — Desplats (Dr René). — D'halluin (Dr M.). — Duret (Dr). — Duthoit (E.). — Fenaert (Abbé). — Gosselet (J.). — Guermonprez (Dr). — Lenoble. — de Montessus de Ballore (Vte R.). — Rogie (Dr). — Stoffaes (Chan.). — Witz (A.). — *Oise :* **Compiègne** : de Vorges (A.). — *Rhône :* **Lyon** : Roux (Cl.). — de Sparre (Cte). — *Savoie :* **Aix-les-Bains** : Dardel (Dr). — *Seine-et-Oise :* **Versailles** : Ariès (Lieut. colonel). — de Salvert (Vte). — *Seine-Inférieure :* **Rouen** : Lechalas (G.). — *Vaucluse :* **Sérignan** (par Vaucluse) : Fabre (J.-H.).

ESPAGNE

Madrid : Adan de Yarza (R.). — Dusmet y Alonso (J.-M.). — Fita y Colomé, S. J. (R. P. F.). — Gonzalez de Castejon. — Grinda (J.). — Iniguez y Iniguez (Fr.). — S. Exc. Mgr Rinaldini. — Sanz (P.). — Solano y Eulate (Mis). — Torroja Caballe (Ed.). — **Barcelone** : Cirera y Salse (Dr L.). — **Bilbao** : Colegio de Estudios Superiores de Deusto (R. P. J. Man. Obeso, S. J.). — **La Coruna** : Casarès (F.). — **San Sebastian** : Balbas (Th.). — Yrigoyen (Dr C.) — **Segovia** : S. G. Mgr Miranda Bistuer. — **Séville** : Abaurrea (L.). — **Tortosa** (Tarragona) : Cirera, S. J. (R. P. R.). — R. P. Rector del Colegio del Jesùs. — **Valencia** : Vincent, S. J. (R. P.). — **Valladolid** : Rodriguez-Risueno (E.). — **Zaragoza** : Navas, S. J. (R. P. L.).

PAYS DIVERS

Allemagne : **Bitsch** (Lorraine) : Kieffer (Abbé J.-J.). — **Cologne** : Schmidt (A.). — **Hannovre** : Caratheodory (Costa).

Angleterre : **Dublin** (Irlande) : Coffey (D.-J.). — Conway (A. W.). — Egan, S. J. (R. P. M.). — Ryan (H.). — **Saint-Hélier** (Jersey — Iles-de-la-Manche) : Dechevrens, S. J. (R. P. M.).

Autriche : **Vienne** : S. Exc. Mgr Granito di Belmonte. — **Linz** : Maréchal, S. J. (R. P. J.).

Italie : **Rome** : S. É. le cardinal Ferrata. — Hagen, S. J. (R. P.). — Kurth. — Mgr Ch. de T'Serclaes. — S. É. le cardinal S. Vannutelli. — **Bologna** : Costanzo (R. P. J.). — **Catane** (Sicile) : S. É. le cardinal Nava di Bontifé. — **Padoue** : Carrara, S. J. (R. P. B.).

Pays-Bas : **Fauquemont** (Limbourg hollandais) : Wulf, S. J. (R. P. Th.). — **Gemert** : Boule, S. J. (R. P. L.). — Muthuon, S. J. (R. P.). — de Sinéty, S. J. (R. P. R.). — **Maestricht** : Bleuset, S. J. (R. P. J.). — **Oudenbosch** : Bolsius, S. J. (R. P. H.).— **Rotterdam** : De Veer, S. J. (R. P.).

Grand-Duché de Luxembourg : **Luxembourg** : Soisson (G.). — Wasmann, S. J. (R. P.).

Suisse : **Fribourg** : Daniels (D^{r} Fr.). — De Munnynck, O. P. (R. P.). — Kirsch (Mgr J. P.).

Turquie : **Constantinople** : Sarret (J.).

Canada : **Québec** : Mgr Laflamme.

États-Unis : **Brooklyn** (New-York) : Newton (Génér. J.). — **Notre-Dame** (Indiana) : Kirsch (R. P. Al. M.). — **Washington** : Georgetown College Observatory.

Brésil : **Jaguarâo** : Boschmans (R. P.). — **Sao Paulo** : Sentroul (Abbé).

Chili : **Santiago** : Cte de Montessus de Ballore.

Mexique : **Puebla** : Colegio del Sagrado Corazon.

Indes Anglaises : **Calcutta** : Collège Saint-François-Xavier.

Égypte : **Caire** : de Vrégille, S. J. (R. P. P.).

Syrie : **Beyrouth** : Collangettes, S. J. (R. P.).

Chine : **Tientsin** : de Fooz (G.).

Philippines : **Manille** : Lefebvre (R. P. Maurice).

Membres décédés

S. A. R. Charles-Théodore, duc en Bavière	Bad-Kreuth (Bavière).
Fauvel	Cherbourg (France).
de Foville (Abbé)	Paris.
Gilson	Gand.
Grandmont	Taormina (Sicile).
Lambiotte (V.)	Tamines.
Cte de Mérode-Westerloo	Bruxelles.
Swolfs (Chanoine)	Malines.
Mis de Wavrin	Gand.

Listes des membres inscrits dans les sections (*).

1re Section

Mathématiques. Astronomie. Géodésie. — Mécanique.

MM. V^{te} d'Adhémar.
Alliaume.
Balbas.
*Barbé.
Belpaire.
*Berlingin.
*B^{on} G. de Béthune.
de Bien.
R. P. H. Bosmans, S. J.
Boussinesq.
du Boys.
*Breithof.
Carathéodory.
Casteels.
Abbé Coppieters de Stockhove.
R. P. J. Costanzo.
*Cousin.
*Crame.
Daniels.
*Daubresse.
De Bloo.
*De Coster.
*Jules De Jaer.
*Deleu.
Dusausoy.
*Dutilleux.
Dutordoir.
R. P. M. Egan, S. J.
Fabry.
Fagnart.
*de Fooz.
R. P. J. Gaillard, S. J.
Abbé Gelin.
*Gilbert.
*Godfrind.
MM. Goedseels.
Gonzalez de Castejon.
Grinda.
*de Grossouvre.
*Hachez.
R. P. Hagen, S. J.
*Hans.
*Haton de la Goupillière.
*Havenith.
*Helleputte.
Humbert.
Iniguez.
Fern. Jacobs.
Camille Jordan.
*Jourdain.
*Koltz.
*Lagasse.
*C. Lambert.
*M. Lambert.
Lambin.
R. P. J. Lannoy, S. J.
Lecat.
*Lechalas.
Le Paige.
*V^{te} du Ligondès.
Mansion.
*C^{te} de Maupeou.
*C^{te} de Meeus.
*Merten.
Meurice.
V^{te} J. de Monge.
V^{te} R. de Montessus.
Abbé Moreux.
Neuberg.
*J. Nyssens.

(*) L'astérisque indique les membres qui désirent prendre part aux travaux de plusieurs sections (cf. Art. 11 des Statuts).

MM. *d'Ocagne.
E. Pasquier.
E. Picard.
*Richald.
Rose.
Vte de Salvert.
Pelegrin Sanz.
R. P. Schul, S. J.
*Abbé Sentroul.
Sépulchre.
*Sibenaler.
*Smits.
*Soisson.
Cte de Sparre.
R. P. Spina, S. J.
J. Stillemans.
Ch. Stoffaes.
*Storms.

MM. Suttor.
Théron.
Thiébaut.
Timmermans.
Torroja Caballe.
Cte Jacques de T'Serclaes.
*Cte Aymard d'Ursel.
Ch.-J. de la Vallée Poussin.
E. Vandenpeereboom.
Vanderlinden.
Verriest.
Verschaffel.
Wasteels.
R. P. F. Willaert, S. J.
Wolf.
F. Wolters.
*G. Wolters.

2e Section

Physique. — Chimie. — Métallurgie. — Météorologie et Physique du globe

MM. Abaurrea.
Allard.
Amagat.
*André.
Abbé Th. Annycke.
Ariès.
Abbé Baseil.
Bayet.
R. P. Bleuset, S. J.
A. Blondel.
Branly.
Bruylants.
Bulliot.
Abbé Capelle.
*Carlier.
R. P. Carrara, S. J.
Casarès.
R. P. Cirera, S. J.
Chanoine Cocheteux.
R. P. Collangettes, S. J.
Conway.
R. P. Dechevrens, S. J.
Declercq.

MM. Delemer.
Delvosal.
Chanoine Demanet.
Chanoine De Muynck.
*De Preter.
François De Walque.
Duhem.
Dumas-Primbault.
Abbé Fenaert.
Chanoine Gautier.
*E. Gerard.
Gesché.
R. P. de Greeff, S. J.
Abbé Hamonet.
de Hemptinne.
Louis Henry.
Paul Henry.
R. P. Jacopssen, S. J.
Abbé de Joannis.
Kowalski.
*O. Lambiotte.
R. P. Ch. Lambo, S. J.
Lambot.

MM. Chanoine Laminne.
Leconte.
Abbé Lemaire.
Lemoine.
Lenoble.
de Locht.
R. P. Lucas, S. J.
Abbé Maes.
Frère Maubert.
R. P. Muthuon, S. J.
Abbé Noguier de Malijay.
R. P. Pauwels, S. J.
Abbé Pierre.
Abbé Raclot.
*de Reul.
Roland.
*Ryan.
Sabatier.
Sageret.
Cte de Saintignon.
Sarret.
R. P. Schaffers, S. J.

MM. R. P. Scheuer, S. J.
Schmidt.
Abbé Senderens.
Arthur Smedts.
Somville.
*Springael.
Chanoine Thiéry.
R. P. Thirion, S. J.
Thiry.
Abbé Tits.
Abbé Van den Bossche.
E. Vanderlinden.
G. Van der Mensbrugghe.
L.-N. Vandevyver.
M. Vandevyver.
Abbé Verhelst.
R. P. de Vregille, S. J.
Willame.
L. Wilmart.
Abbé Wilmotte.
*Witz.
R. P. Th. Wulf, S. J.

3e Section

Géologie, Minéralogie. — Zoologie. — Paléontologie. — Anthropologie Ethnographie, Science du langage. — Géographie

MM. Adan de Yarza.
Frère Alexis.
Abbé Arduin.
Barrois.
Beauvois.
Abbé Bedel.
Mis de la Boëssière-Thiennes.
Abbé Bols.
R. P. H. Bolsius, S. J.
R. P. Boschmans, O. P.
Bouckaert.
R. P. Boule, S. J.
Chanoine Bourgeat.
M. de Brouwer.
*Bruyer.
Abbé Cabeau.
J. Capart.
Abbé J. Claerhout.

MM. L. Coomans.
V. Coomans.
*V. De Brabandère.
Chanoine De Brouwer.
J. Declercq.
De Jonghe.
Chanoine Delvigne.
R. P. De Munnynck, O. P.
Denoël.
De Wildeman.
R. P. Fr. Dierckx, S. J.
Chanoine H. de Dorlodot.
S. de Dorlodot.
Bon Drion.
V. Dubois.
Abbé Dumez.
*Dumont.
Dusmet y Alonso.

MM. J.-H. Fabre.
R. P. Fita, S. J.
Dom Grég. Fournier, O. S. B.
de Gerlache.
B^{on} Gillès de Pélichy.
Gollier.
Gosselet.
Mgr Graffin.
Grand'Eury.
Chanoine Grégoire.
*B^{on} Greindl.
Mgr Hebbelynck.
J. Henry.
Henseval.
Abbé Hervier.
Heynen.
Huwart.
Kaisin.
*Kersten.
Abbé Kieffer.
R. P. A.-M. Kirsch.
Mgr J.-P. Kirsch.
*de Kirwan.
Kurth.
D^{r} H. Lebrun.
Leclercq.
Mgr Ferdinand Lefebvre.
R. P. M. Lefebvre.
Lejeune de Schiervel.
Abbé Lemaire.
*Lhoest.
C^{te} Adolphe de Limburg-Stirum.
Maes.
Abbé Magnie.
R. P. J. Maréchal, S. J.
Ferdinand Meunier.
Abbé Michotte.
C^{te} F. de Montessus.

MM. R. P. L. Navas, S. J.
Nollée de Noduwez.
Chanoine Nys.
P. Nyssens.
D.-P. Œhlert.
Pieraerts.
de Pierpont.
Poskin.
Abbé Rachon.
*Renier.
C^{te} de Ribaucourt.
C^{te} Adr. de Ribaucourt.
Rodriguez Risueno.
Roux.
R. P. Schmitz, S. J.
Th. Schmitz.
Schreiber.
*Abbé Sentroul.
R. P. de Sinéty, S. J.
*H. Siret.
L. Siret.
Solano y Eulate.
Stainier.
Chanoine Swolfs.
M^{is} de Trazegnies.
Van Bastelaer.
Abbé F. Van Caeneghem.
Chan. G. Van den Gheyn.
R. P. Van den Gheyn, S. J.
Van der Vaeren.
Abbé J. Van Mollé.
Van Ortroy.
Viaene.
R. P. Vincent, S. J.
Albert de Vorges.
R. P. Wasmann, S. J.
Ch^{er} F. de Wouters.
Zeiller.

4^{e} Section

Anatomie, Physiologie. — Hygiène. — Pathologie, Thérapeutique, etc.

MM. Baivy.
Bauwens.

MM. Béco.
Bibot.

MM. L. Cirera y Salse.
Coffey.
Convent.
Coulon.
Cousot.
J. Cuylits.
Dardel.
Dauwe.
Debaisieux.
Degive.
De Grave.
De Laet.
J. De Lantsheere.
Delaunois.
Delcroix.
Delétrez.
Denys.
Deroitte.
Henri Desplats.
René Desplats.
D'halluin.
Dufrane.
E. Dupont.
Duquenne.
Duret.
Farina.
Rob. Fernandès.
Fiessinger.
X. Francotte.
Giele.
Glibert.
Glorieux.
Goris.
Guermonprez.
Haibe.
Étienne Henrard.
Félix Henrard.
Heymans.
Huyberechts.
Javaux.
Lahousse.
Laruelle.
MM. Laurent.
Lebrun.
Martin.
Masen.
Matagne.
Meessen.
Mennes.
A. Moëller.
Nicolas Moëller.
Morelle.
Mullie.
A. Pasquier.
Proost.
Rogie.
Schockaert.
Simon.
Simonart.
Smets.
Solé.
Stouffs.
Struelens.
O. Swolfs.
Tits.
Ch. Van Aubel.
Van Biervliet.
Vanderstraeten.
Van Durme.
Van Gehuchten.
Van Hoeck.
Van Keerberghen.
Van Laethem.
Van Swieten.
Van Velsen.
Van Ysendyck.
Verriest.
Vervaeck.
Warlomont.
Aug. Wéry.
Wibo.
Wittmann.
Yrigoyen.

5^{e} Section

Agronomie. — Économie sociale, Statistique. — Sciences commerciales Économie industrielle

MM. C^{te} d'Annoux.
Attout-Van Cutsem.
*Beaujean.
Béchaux.
Aug. Beernaert.
*Berleur.
Bertrand.
de Beughem de Houtem.
G. Blondel.
*V. De Brabandère.
*Brifaut.
Bruyer.
Cappellen.
Cartuyvels.
R. P. Castelein, S. J.
R. P. J. Charles, S. J.
Cooreman.
Craninex.
David.
Herman De Baets.
Mgr De Becker.
De Greef.
Léon De Lantsheere.
Mgr Deploige.
De Vadder.
C^{te} Domet de Vorges.
Ernest Dubois.
Dumortier.
Duplat.
Dupriez.
Duthoit.
Eeckhout.
Fenaux.
H. Francotte.
Gendebien.
Goffart.
Guelton.
Halot.
Albert Henry.

MM. Félix Janssens.
Albert Joly.
Léon Joly.
de Laveleye.
Chanoine Legrand.
Leplae.
Lesire.
C^{te} Éd. de Liedekerke de Pailhe.
Limpens.
*H. Mansion.
V^{te} P. de Monge.
B^{on} de Moreau d'Andoy.
Nerincx.
Jules Peeters.
Poullet.
Chanoine Proost.
B^{on} de Renette de Villers-Perwin.
Roberti.
Roersch.
B^{on} de Schilde.
B^{on} G. de Schilde.
Mgr Schoolmeesters.
*Ch^{er} de Selliers de Moranville.
Sièges.
Smekens.
C^{te} van den Steen de Jehay.
Stinglhamber.
Taymans.
Terlinden.
E. Tibbaut.
Van den Bossche.
André Van der Mensbrugghe.
Van der Smissen.
R. P. Vermeersch, S. J.
Versteylen.
C^{te} Amédée Visart de Bocarmé.
C^{te} Visart de Bocarmé.
Vollen.
Abbé Zech.

6^{e} Section

Sciences techniques

MM. *André.
*Barbé.
*Beaujean.
*Berleur.
*Berlingin.
*B^{on} G. de Béthune.
*F. Breithof.
*Carlier.
*Cousin.
*Crame.
*Daubresse.
*De Coster.
*J. De Jaer.
Dejardin.
*Deleu.
Delmer.
*De Preter.
Dochain-Defer.
*Dumont.
Dupuis.
*Dutilleux.
*de Fooz.
*E. Gerard.
*Gilbert.
*Godfrind.
*B^{on} Greindl.
*de Grossouvre.
*Hachez.
*Hans.
Harmant.
*Haton de la Goupillière.
*Havenith.
Hélin
*Helleputte.
*Jourdain.
*Kersten.
*de Kirwan.

MM. *Koltz.
*Lagasse-de-Locht.
*C. Lambert.
*M. Lambert.
*Omer Lambiotte.
*Lechalas.
*Lhoest.
*V^{te} du Ligondès.
*H. Mansion.
*C^{te} de Maupeou.
*C^{te} H. de Meeus.
*Merten.
Meuwissen.
Morisseaux.
*J. Nyssens.
*d'Ocagne.
d'Orjo de Marchovelette.
Renaud.
*Renier.
*de Reul.
*Richald.
*Ryan.
R. P. Ch. Schoonjans, S. J.
*Ch^{er} de Selliers de Moranville.
Sépulchre.
*Sibenaler.
*H. Siret.
Slingeneyer de Goeswin.
*Smits.
*Soisson.
*Springael.
*E. Storms.
*C^{te} A. d'Ursel.
Van Brabandt.
Robert Van der Mensbrugghe.
*Witz.
*G. Wolters.

MEMBRES DU CONSEIL (*)

1908-1909

Président d'honneur : M. A. Beernaert.
Président : M. G. Lemoine (1909).
1^er^ Vice-Président : M. F. De Walque (1910).
2^e^ Vice-Président : M. Éd. Van der Smissen (1911).
Secrétaire : M. P. Mansion (1911).
Trésorier : M. Éd. Goedseels (1912).
Membres : MM. Beaujean (1912).
le Marquis de la Boëssière-Thiennes (1910).
L. Cousin (1909).
L. De Lantsheere (1910).
Chanoine Delvigne (1911).
Dr X. Francotte (1912).
Ch. Lagasse-de Locht (1909).
Cte Ad. de Limburg-Stirum (1912).
E. Pasquier (1909).
A. Proost (1910).
Chanoine Swolfs (1909).
Ch.-J. de la Vallée Poussin (1910).
G. Van der Mensbrugghe (1911).
Dr A. Van Gehuchten (1912).
Dr R. Warlomont (1911).

(*) Le nom de chaque membre est suivi de l'indication de l'année où expire son mandat.

MEMBRES DU CONSEIL

1909-1910

Président-d'honneur : M. A. Beernaert.
Président : M. F. De Walque (1910).
1er Vice-Président : M. le Dr H. Desplats (1911).
2e Vice-Président : C. Beaujean (1912).
Secrétaire : M. P. Mansion (1911).
Trésorier : M. Éd. Goedseels (1912).
Membres : MM. le Marquis de la Boëssière-Thiennes (1910).
L. Cousin (1913).
É. De Wildeman (1911).
Dr X. Francotte (1912).
Chanoine Grégoire (1913).
Ch. Lagasse-de Locht (1913).
Comte Ad. de Limburg-Stirum (1912).
E. Pasquier (1913).
A. Proost (1910).
Ch.-J. de la Vallée Poussin (1910).
R. P. J. Van den Gheyn, S. J. (1910).
Éd. Van der Smissen (1911).
G. Van der Mensbrugghe (1911).
Dr A. Van Gehuchten (1912).
Dr Warlomont (1911).

Conseillers honoraires : M. L. De Lantsheere.
Chanoine Ad. Delvigne.

BUREAUX DES SECTIONS

1909-1910

1re Section

Président : M. le Vicomte R. de Montessus de Ballore.
Vice-Présidents : MM. G. Verriest.
le Baron G. de Béthune.
Secrétaire : M. H. Dutordoir.

2e Section

Président : Le R. P. Th. Wulf, S. J.
Vice-Présidents : M. L.-N. Vandevyver.
M. J. Delemer.
Secrétaire : le R. P. J.-D. Lucas, S. J.

3e Section

Président : M. É. De Wildeman.
Vice-Présidents : M. le Chanoine Swolfs (décédé).
M. A. Renier.
Secrétaire : M. F. Van Ortroy.

4e Section

Président : M. le Dr H. Desplats.
Vice-Présidents : M. le Dr C. Dufrane.
M. le Dr A. Struelens.
Secrétaire : M. le Dr R. Warlomont.

5e Section

Président : M. G. Blondel.
Vice-Présidents : M. A. Beernaert.
M. Ernest Dubois.
Secrétaire : M. Éd. Van der Smissen.

6e Section

Président : M. H. De Preter.
Vice-Présidents : M. P. Daubresse.
M. Renaud.
Secrétaire : M. le Comdt A. Crame.

SESSION DU 28 OCTOBRE 1909

A LOUVAIN

SÉANCES DES SECTIONS

Première section

M. le V^{te} d'Adhémar fait la communication suivante *sur la convergence des déterminants d'ordre infini.*

Dans sa théorie de la Lune, M. Hill a employé les déterminants d'ordre infini. M. Poincaré (*), le premier, a donné un critère de convergence.

Après lui, M. Helge von Koch (**) a écrit des travaux importants sur ce sujet. D'autre part, M. Hilbert (***), dans ses mémoires sur les équations intégrales, a résolu par des « coefficients de Fourier » des équations algébriques linéaires, en nombre infini, dont le déterminant échappe aux critères de convergence de MM. Poincaré et von Koch.

Ces critères demandent la convergence d'une certaine série, tandis que, dans les travaux de M. Hilbert, la série qui converge est formée par *les carrés des termes* de la même série.

Cette série de carrés attire l'attention vers un théorème de M. Hadamard, dont les travaux de M. Fredholm ont prouvé l'importance.

J'ai donc été amené, par la comparaison des travaux cités, à un critère de convergence un peu plus général que celui de M. Poincaré, en faisant usage du théorème de M. Hadamard, et d'une règle de Laplace, sans me servir exclusivement de la comparaison avec un *produit infini*.

(*) *Méthodes nouvelles de la Mécanique céleste*, tome 2, 1893.

(**) ACTA MATHEMATICA, tomes 16 et 18.

(***) NACHRICHTEN D. GESELLSCHAFT ZU GÖTTINGEN, 1906.

Au même moment, M. von Koch est arrivé à un critère plus général que le mien et à un énoncé d'une remarquable simplicité.

Quoique le mémoire de M. von Koch (*) soit fort intéressant, je vais cependant donner ma démonstration, parce qu'elle est plus élémentaire.

Je rappelle le théorème de M. Hadamard (**): soit le déterminant

$$\Delta = \left\| a_{hk} \right\|, \left\{\begin{matrix} h \\ k \end{matrix}\right. = 1,2 \ldots, n$$

soit S_h la somme des carrés des modules des termes de la ligne de rang h, on a :

$$|\Delta|^2 \leqq S_1 \, S_2 \ldots S_n.$$

D'où une première remarque :

Supposons que n augmente indéfiniment, et que la série $\sum\sum |a_{hk}|$ soit convergente, le déterminant d'ordre infini sera *nul.*

Et c'est pour cela que l'on prend la *diagonale principale* sous la forme :

$$1 + a_{11}, \quad 1 + a_{22}, \quad 1 + a_{33}, \ldots,$$

la série $\sum |a_{hh}|$ étant convergente, c'est-à-dire, le produit $\prod (1 + |a_{hh}|)$ étant convergent, de telle sorte que l'on pourrait aussi bien mettre partout 1, au lieu de $(1 + a_{hh})$, sur la diagonale.

Nous écrirons donc le déterminant ainsi :

$$\Delta_{n+p}=\left|\begin{array}{ccc|cc}
1+a_{1\,1} & a_{1\,2}\cdots & a_{1\,n} & a_{1\,n+1} & a_{1\,n+p}\\
a_{2\,1} & 1+a_{2\,2} & a_{2\,n} & & \\
 & & & & \\
a_{n\,1}\cdots & & 1+a_{n\,n} & a_{n\,n+1} & a_{n\,n+p}\\
\hline
a_{n+1\,1}\cdots & & & 1+a_{n+1\,n+1}\cdots & \\
 & & & & \\
a_{n+p\,1}\cdots & & & a_{n+p\,n+1}\cdots & 1+a_{n+p\,n+p}
\end{array}\right|$$

(*) Circolo Matematico di Palermo, 13 juin 1909.

(**) Bulletin des Sciences mathématiques, 1893.

Nous supposons la diagonale principale absolument convergente et la série des carrés des termes $|a_{hk}|$ convergente ($h \pm k$).

Nous avons :

$$S_h = |a_{h1}|^2 + |a_{h2}|^2 + \cdots \qquad + |1 + a_{hh}|^2 + \cdots + |a_{hk}|^2 + \cdots$$
$$< 1 + 2\,|a_{hh}| + \sum |a_{hk}|^2 = 1 + U_h.$$

U_h est le terme de rang h d'une série absolument convergente. Donc $\prod (1 + U_h)$ est absolument convergent. Donc

$$\prod S_h < P^2, \quad \text{ou} \quad |\Delta_{n+p}| < P \text{ (quels que soient } n \text{ et } p),$$

P étant un nombre *fini* que l'on peut fixer.

Posons :

$$\left\{\begin{array}{lr}
(1 + a_{1\,1})^2 + a^2_{1\,2} + \cdots & + a^2_{1\,n} = 1 + H_1 \\
a^2_{2\,1} + (1 + a_{2\,2})^2 + \cdots & + a^2_{2\,n} = 1 + H_2 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
a^2_{n\,1} + \cdots & + (1 + a_{n\,n})^2 = 1 + H_n
\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{lr}
a^2_{n+1\,1} + \cdots & + a_{n+1\,n} = \epsilon_{n+1} \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
a^2_{n+p\,1} + \cdots & + a_{n+p\,n} = \epsilon_{n+p}
\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{lr}
a^2_{1\,n+1} + \cdots & + a^2_{1\,n+p} = \rho_1 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
a^2_{n\,n+1} + \cdots & + a^2_{n\,n+p} = \rho_n
\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{lr}
(1 + a_{n+1\,n+1})^2 + \cdots & + a^2_{n+1\,n+p} = 1 + H'_{n+1} \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
a^2_{n+p\,n+1} + \cdots & + (1 + a_{n+p\,n+p})^2 = 1 + H'_{n+p}
\end{array}\right.$$

Nous supposons les *a positifs*, sinon nous les remplaçons par leurs modules.

Et, devant appliquer le théorème de M. Hadamard, nous écrirons *symboliquement* le déterminant Δ_{n+p} sous cette forme :

$$\begin{array}{c|c|c|c}
 & 1+H_1 & \rho_1 & \\
 & 1+H_2 & \rho_2 & \\
(I) & \vdots & \vdots & (IV)\\
 & 1+H_n & \rho_n & \\
\cline{2-3}
 & \epsilon_{n+1} & 1+H'_{n+1} & \\
(III) & \epsilon_{n+2} & 1+H'_{n+2} & (II)\\
 & \vdots & \vdots & \\
 & \epsilon_{n+p} & 1+H'_{n+p} &
\end{array}$$

Les cases I et II sont des carrés, les cases III et IV sont des rectangles.

Un théorème de Laplace nous apprend à développer Δ_{n+p} en une somme de produits de déterminants d'ordre n et de déterminants d'ordre p. Nous prendrons d'abord le produit des déterminants I et II, puis tous les déterminants d'ordre p tirés des cases II et IV multipliés respectivement par les déterminants correspondants tirés des cases I et III.

Par exemple, avec

$$\rho_1(1+H'_{n+2})(1+H'_{n+3})\cdots\qquad(1+H'_{n+p})$$

nous prenons

$$(1+H_2)(1+H_3)\cdots\quad\ldots\quad(1+H_n)\,\epsilon_{n+1}$$

et avec

$$\rho_1\rho_2(1+H'_{n+3})(1+H'_{n+4})\cdots\qquad(1+H'_{n+p})$$

nous prenons

$$(1+H_3)(1+H_4)\cdots\qquad(1+H_n)\,\epsilon_{n+1}\,\epsilon_{n+2},$$

le module du déterminant de la case II est moindre que le produit

$$\sqrt{(1+H'_{n+1})(1+H'_{n+2})\cdots\qquad(1+H'_{n+p})}$$

donc, quelque grands que soient n et $n+p$, Δ_{n+p} contient d'abord le terme $\Delta_n(1+q)$, q tendant vers *zéro* quand n et $n+p$ deviennent *infinis*, en vertu de la convergence du produit infini $\prod s_h$.

Il nous faut évaluer les modules de tous les produits dont nous avons parlé.

En supprimant $1+H'_{n+1}$ dans la case II, nous devons prendre ϵ_{n+1} dans la case III et, dans la case IV, ρ_1 ou ρ_2 ou ρ_3 ou... ou ρ_n.

Cela donne respectivement pour les majorantes des modules :

$$\left\{\begin{array}{l} P(1+q)\sqrt{\epsilon_{n+1}}\ \sqrt{\rho_1} \\ P(1+q)\sqrt{\epsilon_{n+1}}\ \sqrt{\rho_2} \\ \dots \\ P(1+q)\sqrt{\epsilon_{n+1}}\ \sqrt{\rho_n} \end{array}\right.$$

En supprimant $1+H'_{n+1}$ et $1+H'_{n+2}$ dans la case II nous devrons prendre ϵ_{n+1} et ϵ_{n+2} dans la case III et, dans la case IV, successivement tous les groupes :

$$\rho_1\,\rho_2,\ \rho_1\,\rho_3,\ \dots,\ \rho_{n-1},\ \rho_n.$$

Cela donnera respectivement les majorantes des modules :

$$\left\{\begin{array}{l} P(1+q)\sqrt{\epsilon_{n+1}\,\epsilon_{n+2}}\ \sqrt{\rho_1\,\rho_2} \\ P(1+q)\sqrt{\epsilon_{n+1}\,\epsilon_{n+2}}\ \sqrt{\rho_1\,\rho_3} \\ \dots \\ P(1+q)\sqrt{\epsilon_{n+1}\,\epsilon_{n+2}}\ \sqrt{\rho_{n-1}\,\rho_n} \end{array}\right.$$

Bien entendu, ce qui a été fait en mettant partout ϵ_{n+1} doit aussi être fait en mettant partout ϵ_{n+2} ou bien en mettant partout ϵ_{n+3}, etc.

De même, ce qui a été fait en mettant partout $\epsilon_{n+1}\,\epsilon_{n+2}$ doit aussi bien être fait en prenant successivement les combinaisons :

$$\epsilon_{n+1}\,\epsilon_{n+2},\quad \epsilon_{n+1}\,\epsilon_{n+3},\quad \epsilon_{n+2}\,\epsilon_{n+3},\ \dots$$

Nous obtenons donc comme majorantes des modules des produits ; en laissant de côté $P(1 + q)$:

$$\left\{\begin{array}{l}(\sqrt{\epsilon_{n+1}} + \sqrt{\epsilon_{n+2}} + \cdots + \sqrt{\epsilon_{n+p}})(\sqrt{\rho_1} + \sqrt{\rho_2} + \cdots + \sqrt{\rho_n}) \\ (\sqrt{\epsilon_{n+1}\,\epsilon_{n+2}} + \sqrt{\epsilon_{n+1}\,\epsilon_{n+3}} + \cdots)(\sqrt{\rho_1\,\rho_2} + \sqrt{\rho_1\,\rho_3} + \cdots) \\ \text{etc...}\end{array}\right.$$

Nous majorons encore, en prenant les produits suivants (puisque le terme $\sqrt{\epsilon_{n+1}\,\epsilon_{n+1}}$ y figure et ne figure pas dans les sommes précédentes, etc...) :

$$\left\{\begin{array}{c}\sum_{n+1}^{n+p} \sqrt{\epsilon_{n+h}} \times \sum_{1}^{n} \sqrt{\rho_k} \\ \sum_{n+1}^{n+p} \sqrt{\epsilon_{n+h}} \times \sum_{n+1}^{n+p} \sqrt{\epsilon_{n+h}} \times \sum_{1}^{n} \sqrt{\rho_k} \times \sum_{1}^{n} \sqrt{\rho_k}\end{array}\right.$$

etc... Représentons par Q le produit :

$$\sum_{n+1}^{\infty} \sqrt{\epsilon_{n+h}} \times \sum_{1}^{\infty} \sqrt{\rho_k}$$

Nous avons donc, en majorant, la somme :

$$Q + Q^2 + Q^3 + \cdots$$

Critère de M. Poincaré : *Si la série* $\sum\limits_{h} \sum\limits_{k}{}_{h \neq k} |a_{hk}|$ *converge, et si* $\sum |a_{hh}|$ *converge, le déterminant est convergent.*

En effet, nous avons alors :

$$|a_{n+1\,1}| + \cdots + |a_{n+1\,n}| < V_{n+1}$$

V_{n+1} tend vers zéro et la série $V_{n+1} + V_{n+2} + \cdots$ tend aussi vers zéro (*). L'on a, en même temps :

(*) Propriété immédiate d'une *série double* absolument convergente.

$$\sqrt{\epsilon_{n+1}} < V_{n+1}.$$

De même :

$$|a_{1\,n+1} + \cdots + |a_{1\,n+p}| < V_{n+1}$$

$$\sqrt{\rho_1} < V_{n+1}$$

Donc Q tend vers zéro avec 1 : n, quel que soit p, donc :

$$|\Delta_{n+p} - \Delta_n|$$

tend vers *zéro*, Δ_{n+p} a une *limite*. C. Q. F. D.

Pour aller plus loin, faisons : $p = 1$. On a alors :

$$\sqrt{\rho_1} = a_{1\,n+1}, \quad \sqrt{\rho_2} = a_{2\,n+1}, \ldots$$

$$\sqrt{\epsilon_{n+1}} = \sqrt{a^2_{n+1\,1} + \ldots + a^2_{n+1\,n}}$$

$$\Delta_{n+1} = \Delta_n\,(1 + a_{n+1\,n+1}) + M_n$$

$$|M_n| < P\sqrt{\epsilon_{n+1}}\,(a_{1\,n+1} + a_{2\,n+1} + \cdots + a_{n\,n+1}).$$

Posons :

$$\lim \sqrt{\epsilon_{n+1}} = \sqrt{a^2_{n+1\,1} + a^2_{n+1} + \cdots} = D_{n+1}.$$

et :

$$a_{1\,n+1} + a_{2\,n+1} + \cdots = L_{n+1}$$

$$\sqrt{a_{1\,n+1}{}^2 + a_{2\,n+1}{}^2 + \cdots} = D'_{n+1}.$$

Nous obtenons ces résultats :

Si $L_{n+1}\,D_{n+1}$ *est le terme d'une série convergente, le déterminant converge.*

Nous avons, d'ailleurs :

$$1 \leq \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{\sqrt{X_1{}^2 + X_2{}^2 + \ldots + X_n{}^2}} \leq \sqrt{n}.$$

Donc si $\sqrt{n}\,D_{n+1}\,D'_{n+1}$ *est le terme d'une série convergente, le déterminant converge.*

Montrons que ces critères, un peu plus compréhensifs que celui de M. Poincaré, le sont moins que celui donné récemment par von Koch. D'après M. von Koch, le déterminant converge si $\sum |a_{nn}|$ et $\underset{h \neq k}{\sum\sum} |a_{hk}|^2$ convergent. Soit le déterminant :

$$\begin{vmatrix} 1 + a_{1\,1} & a_{1\,2} & a_{1\,3} & \dots & a_{1\,n} & \dots \\ a_{2\,1} & 1 + a_{2\,2} & a_{2\,3} & \dots & a_{2\,n} & \dots \\ a_{3\,1} & a_{3\,2} & 1 + a_{3\,3} & \dots & a_{3\,n} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \end{vmatrix}, \quad |a_{hk}| \leq \frac{1}{(hk)^{\frac{1}{2}+\alpha}}$$

La méthode de M. von Koch prouve la convergence pour $\alpha > 0$.

Ma méthode demande que l'on ait : $\alpha > \frac{1}{6}\cdot$

En effet, nous avons :

$$|a_{1\,n+1}| + |a_{2\,n+1}| + \cdots$$
$$+ |a_{n\,n+1}| \leq \frac{1}{(n+1)^{\frac{1}{2}+\alpha}} \left[\frac{1}{1} + \frac{1}{2^{\frac{1}{2}+\alpha}} + \quad + \frac{1}{n^{\frac{1}{2}+\alpha}}\right]$$

Or la quantité entre crochets a pour valeur asymptotique $An^{\frac{1}{2} \leq \alpha}$ (A est une constante).

Puis :

$$|a_{n+1\,1}|^2 + \cdots \qquad + |a_{n+1\,n}|^2 + \cdots$$

a pour valeur

$$\frac{B}{(n+1)^{1+2\alpha}}$$

D'où :

$$D_{n+1}\, L_{n+1} \leq \frac{C}{n^{2\alpha}\, n^{\frac{1}{2}+\alpha}}$$

Ceci sera le terme d'une série convergente pour

$$\frac{1}{2} + 3\alpha > 1\,; \qquad \alpha > \frac{1}{6}\cdot$$

Le critère de M. Poincaré aurait demandé :

$$\frac{1}{2} + \alpha > 1\,; \qquad \alpha > \frac{1}{2}\cdot$$

M. Pasquier fait la communication suivante *sur certaines notions fondamentales de mécanique.*

Ces notions n'ayant pas toujours une signification bien définie, il se propose de rechercher le sens qu'il convient, à son avis, de leur attribuer d'après deux des meilleurs ouvrages écrits en français : le *Cours de Mécanique* de Gilbert (*) et le *Traité de Mécanique rationnelle* de M. Appell (**).

I. Gilbert énonce (***) comme il suit le *principe de l'indépendance des mouvements* (****) : « Si un point matériel libre M, animé d'une certaine vitesse et soumis à l'action de certaines forces F, F',..., vient à être sollicité par une force nouvelle P, le mouvement relatif qu'il prendra, par rapport à un système de comparaison animé d'un mouvement de translation égal au mouvement qu'aurait eu le point M sans l'intervention de la force P, sera précisément le même que si la translation commune n'existait pas et que la force P seule vînt à agir sur le point M. »

II. Comme conséquence de ce principe, Gilbert conclut (*****)

(*) Gilbert, *Cours de Mécanique analytique*, 3e édit. Paris et Louvain, 1891. Cette édition est la dernière.

(**) Appell, *Traité de Mécanique rationnelle*, t. I, 3e édit. Paris, 1909. Cette édition est la dernière.

(***) *Ouvr. cité*, p. 68.

(****) D'après certains faits de la physique moderne, les principes fondamentaux de la mécanique physique ordinaire, *tout en restant vrais pour les plus grandes vitesses de la pratique courante et même pour des vitesses pouvant peut-être atteindre 100 kilomètres à la seconde* (comme c'est le cas pour la planète Mercure), ne seraient plus applicables pour des vitesses notablement plus grandes (p. ex. 30 000 à 100 000 kilomètres à la seconde), telles que celles que l'on rencontre dans la dynamique de l'électron ; dans ces derniers cas, la masse (regardée comme le rapport de la force à l'accélération) devrait aussi être considérée, non plus comme une constante, mais comme augmentant avec la vitesse. Il y aurait une limite (la vitesse de la lumière) à la vitesse qu'un corps peut atteindre.

Cf. Eugène et François Cosserat. *Note sur la Dynamique du point et du corps invariable*, dans le t. I de l'édition française du *Traité de Physique* de Chwolson.

Poincaré, *La Dynamique de l'électron*. dans la REVUE GÉNÉRALE DES SCIENCES, n° du 30 mai 1908. — *La Mécanique nouvelle*. dans la REVUE SCIENTIFIQUE, n° du 7 août 1909.

(*****) *Ouvr. cité*, p. 68.

que la vitesse dont un point matériel est animé, à une époque quelconque, n'influe en aucune manière sur les variations que cette vitesse éprouve, à partir de cet instant, par l'action des forces qui lui sont appliquées.

Il convient de noter que cette conclusion n'implique nullement, comme on pourrait être tenté de le croire, que l'accélération d'un point, à une certaine époque, est nécessairement indépendante de la vitesse dont est animé le point à cette époque. Gilbert veut simplement dire — la démonstration qu'il donne le prouve — que *les forces* qui agissent sur un point *étant considérées comme données*, la vitesse, *par elle-même*, n'a pas d'influence sur l'accélération.

Ainsi interprétée, cette conclusion est vraie, même quand, parmi les forces qui agissent, il en est qui sont fonctions de la vitesse.

Dans ce dernier cas, l'accélération devient fonction de la vitesse, puisque l'accélération dépend des forces ; seulement elle n'en est fonction qu'indirectement et uniquement parce que certaines forces en sont elles-mêmes fonctions.

III. L'état de repos ou de mouvement d'un point, n'ayant aucune influence sur les modifications que sa vitesse subit par l'action des forces qui agissent sur lui, Gilbert conclut (*) — et cette conclusion est fondamentale — que « les conditions pour que les forces annulent réciproquement leurs effets sur un point (ou sur un corps) sont les mêmes, quel que soit le mouvement du point, que si ce point ou ce corps était au repos ».

IV. Quand les conditions dont il vient d'être question sont réalisées, Gilbert dit, par définition (**), que le point (ou le corps) est en équilibre. Ainsi, par définition, d'après Gilbert, *un point (ou un corps) est en équilibre à un certain instant sous l'action de certaines forces, quand l'état de repos ou de mouvement du point (ou du corps) à cet instant, n'est pas modifié par les forces considérées.*

Dans le même cas, le même auteur dit encore que *les forces considérées se font équilibre.*

(*) *Ouvr. cité*, p. 79, 1re remarque.
(**) *Ouvr. cité*, p. 72.

Il peut être utile de noter que les susdites forces considérées peuvent n'être qu'une partie des forces *données*, ou *directement appliquées* ou *indépendantes des liaisons* et que, sous l'action des autres forces, le point (ou le corps) peut encore être en équilibre ou non.

V. Gilbert appelle (*) *statique* la science qui détermine les conditions auxquelles il est nécessaire et suffisant que des forces satisfassent pour se faire équilibre.

En vertu de la conclusion rappelée à l'art. III, la statique peut être établie en se bornant à considérer les points (ou les corps) au repos, mais il est bien entendu qu'elle s'applique également au mouvement, dès qu'il s'agit de forces qui se font équilibre : pour chaque cas particulier, il suffit, dans les relations générales qui expriment les conditions d'équilibre et qui sont établies en statique, d'introduire les forces qui sont propres à ce cas particulier. Par exemple, lors du mouvement, on doit évidemment considérer chaque point avec la position, la vitesse et les forces qui correspondent à l'époque dont il s'agit ; à un point de vue général, les forces d'ailleurs sont elles-mêmes fonctions de cette position, de cette vitesse et du temps.

VI. Le principe des travaux virtuels est un principe très général de statique. Dans Gilbert, il y a lieu de lui attribuer la généralité que cet auteur attribue lui-même à la statique. Ce principe s'applique donc à l'équilibre lors du mouvement, tout aussi bien qu'à l'équilibre lors du repos et il peut même être appliqué, comme toute la statique, en ne considérant qu'une partie des forces qui agissent.

VII. A un point de vue purement mathématique, les équations générales du mouvement d'un point peuvent être regardées comme des équations exprimant que si la réaction d'inertie du point agissait sur celui-ci, il y aurait équilibre, en vertu des liaisons, entre cette réaction d'inertie et les forces directement appliquées.

Grâce à cette interprétation des équations du mouvement, les relations générales entre les forces qui agissent et les effets qu'elles produisent à un instant donné, sont les mêmes que les relations

---

(*) *Ouvr. cité*, p. 73.

qui exprimeraient l'équilibre entre les forces et les réactions d'inertie correspondantes à l'époque considérée.

Le principe des travaux virtuels étant un principe général d'équilibre, applicable au mouvement tout aussi bien qu'au repos, on est autorisé à l'étendre au cas d'un mouvement quelconque, à la seule condition de joindre les réactions d'inertie aux forces directement appliquées.

Ainsi entendue, l'extension du principe des travaux virtuels au principe de d'Alembert, telle qu'elle est établie par Gilbert (*), est tout à fait légitime.

VIII. Cherchons maintenant à interpréter Appell le plus correctement possible, et voyons d'abord comment il énonce le *principe de l'indépendance des effets des forces* (ou *principe de l'indépendance des mouvements*.

« L'accélération que détermine sur un point matériel quelconque M l'ensemble de plusieurs systèmes matériels S_1, S_2, S_3, ... s'obtient, dit Appell (**), en composant, d'après les règles de la composition des vecteurs, les accélérations que détermineraient isolément les systèmes S_1, S_2, S_3, ... agissant successivement sur ce point M. »

Le principe de l'indépendance d'après Appell revient, on le voit, à la conséquence rappelée à l'art. II ci-dessus et qui résulte de l'énoncé du même principe d'après Gilbert.

IX. A propos de l'équilibre, Appell s'exprime comme il suit (***) :

« Plusieurs forces appliquées à un point matériel se font équilibre, lorsque, le point étant au repos, ces forces ne lui impriment aucun mouvement.

» En général, un système matériel soumis à l'action de certaines forces est en équilibre si, ce système étant au repos, ces forces ne lui impriment aucun mouvement. »

Il résulte de ces définitions que, dans la pensée d'Appell, tout aussi bien que dans celle de Gilbert, dire qu'un point (ou un système) est en équilibre sous l'action de certaines forces ou dire que certaines forces appliquées à un point (ou à un système) se font

---

(*) *Ouvr. cité*, p. 351.

(**) *Ouvr. cité*, p. 90.

(***) *Ouvr. cité*, p. 93, n° 70.

équilibre, c'est dire exactement la même chose. Si l'on s'en tient simplement aux définitions qui viennent d'être rappelées, on pourrait croire que, pour Appell, il n'y a d'équilibre que pour les points (ou les corps) originairement au repos et restant dans cet état malgré les forces considérées. Mais si l'on examine le sens dans lequel le mot « équilibre » est ultérieurement employé par Appell, on est plutôt porté à penser que d'après cet auteur, comme d'après Gilbert, le mot « équilibre » ne doit pas seulement être appliqué aux points (ou aux systèmes) originairement au repos et restant dans cet état malgré les forces considérées, mais que plus généralement « un point (ou un système) est en équilibre sous l'action de certaines forces *quand ces forces sont telles que, si le point (ou le système) était au repos, il resterait dans cet état malgré l'action des forces* en question ».

Il y a lieu d'admettre en outre que, dans la pensée d'Appell, de même que dans celle de Gilbert, il est permis, lorsqu'on parle d'équilibre, de ne pas avoir égard à toutes les forces qui agissent (*).

A ce point de vue plus général, on peut dire que pour l'équilibre, sous l'action de certaines forces, d'un point (ou d'un système), d'ailleurs libre ou non, il est nécessaire et suffisant que le point (ou le corps) étant primitivement au repos ou supposé tel et étant considéré comme uniquement soumis à ces forces, celles-ci ne lui impriment aucun mouvement.

En interprétant de la sorte le sens attribué par Appell au mot « équilibre » son *Traité* devient clair et correct. Grâce à cette interprétation, la statique d'Appell, qui est la science de l'équilibre, acquiert la même généralité que celle de Gilbert et s'applique, en conséquence, aux corps en mouvement tout aussi bien qu'aux corps au repos. L'« état » dont il est question au chap. VI relatif à l'équilibre d'un corps solide (**) devient alors l'« état de repos ou de mouvement », comme dans Gilbert, et par suite les propriétés classiques, démontrées à ce chapitre à propos de la composition et de la décomposition des forces appliquées à un solide, conviennent, sans qu'il soit nécessaire d'y rien ajouter, lors

---

(*) Cf., par exemple, *ouvr. cité,* pp. 136 et 137.

(**) *Ouvr. cité,* pp. 136 et suiv.

du mouvement tout aussi bien que lors du repos. Le principe des travaux virtuels d'Appell s'applique alors, tout comme celui de Gilbert, au mouvement tout aussi bien qu'au repos et le passage de ce principe au principe de d'Alembert y est tout aussi correct que dans Gilbert.

X. Si, au contraire, d'après Appell, par définition, il n'y avait d'équilibre que pour les points (ou les corps) effectivement au repos, plusieurs passages de son excellent *Traité* ne répondraient plus à cette définition.

Déjà au n° 70, où il définit l'équilibre, après avoir constaté que dans le cas d'un point, la résultante des forces est nulle (*), Appell conclut à la réciproque en disant : « Cette condition nécessaire de l'équilibre est évidemment suffisante. » Cette réciproque est vraie si l'équilibre peut avoir lieu pendant le mouvement tout aussi bien qu'au repos ; mais elle ne le serait pas si le point devait être réellement au repos pour être en équilibre.

Des observations analogues peuvent être faites à propos des n^{os} 89 (p. 121), 173 (pp. 264 et 265), 208 (p. 324), 288 (p. 540), 449-451 (pp. 322-303 du t. II, 2^e édit.), etc.

Si, pour Appell, il n'y avait pas d'autre équilibre que l'équilibre au repos, il aurait dû, à l'occasion de la dynamique des solides, reprendre toute la série classique des réductions de forces et montrer que ces réductions, établies au chap. VI (**), à l'occasion du repos, sont applicables aussi lors du mouvement. Dans la même hypothèse, le principe des travaux virtuels ne serait démontré, dans Appell, que pour les systèmes au repos et l'extension de ce principe à celui de d'Alembert ne serait pas admissible. Comment, en effet, comprendre qu'il puisse alors y avoir équilibre (***) entre la réaction d'inertie et les forces qui agissent ?

Ce qui confirme encore notre interprétation quant au sens qu'Appell attribue effectivement au mot « équilibre », c'est que,

---

(*) Bien que l'auteur ne le dise pas, il ne peut être question ici que d'un point libre ou rendu tel par la pensée, grâce à la considération de la force (ou des forces) de liaison. Cf. *ouvr. cité*, p. 121, n° 89.

(**) *Ouvr. cité*, p. 137, n° 97.

(***) *Ouvr. cité*, p. 540, n° 288.

dans des passages (*) très nombreux, il applique incontestablement lui-même cette expression à des points (ou corps) en mouvement.

XI. En résumé, il y a lieu d'admettre, semble-t-il, qu'en principe, dans Appell tout aussi bien que dans Gilbert, le mot « équilibre » s'applique à un point (ou un système) en mouvement tout aussi bien qu'au repos et qu'il en est de même de la *statique*, science de l'équilibre.

La *dynamique* est alors la science générale qui s'occupe des relations entre les forces et les mouvements qu'elles produisent sur un point (ou sur un système), lorsque l'état du mouvement du point (ou du système), au lieu d'être nécessairement conservé comme en statique, peut être altéré par suite de l'intervention des forces.

XII. Dans la pratique courante, non seulement le mot « statique » a le sens qui vient d'être rappelé, mais il est souvent aussi employé pour désigner exclusivement l'état de repos, le mot « dynamique » représentant alors l'état de mouvement : c'est en employant, par exemple, ces deux mots dans ces sens qu'on distingue parfois l'équilibre « statique » et l'équilibre « dynamique ».

Dans d'autres circonstances, les mots « statique » et « dynamique », également pris adjectivement, ont une signification qui a besoin d'être soigneusement définie. En aéronautique (**), par exemple, quand il s'agit du ballon (ou du plus léger que l'air), on dit que la sustentation est « statique » ou que l'air est un support « statique ». On veut dire par là que le ballon étant formé, dans quelques-unes de ses parties, de corps plus légers que n'est l'air à la surface de la terre, le poids du fluide déplacé par le ballon l'emporte d'abord sur le poids même de celui-ci, de sorte que le ballon commence par s'élever grâce à un excès de poussée de bas

---

(*) *Ouvr. cité*, t. I, p. 152 (n° 111), p. 162 (n^{os} 8 et 9), p. 163 (n. 11) ; t. III. 2^{e} édition, 1909, p. 152 (n. 632), pp. 165-167 (n^{os} 640-642), etc. Il est vrai que, dans d'autres endroits, assez nombreux aussi, le mot « équilibre » est, dans Appell, opposé au mot « mouvement ». C'est ainsi que le t. III est intitulé *Équilibre et mouvement des milieux continus*.

(**) Commandant Paul Renard, *Terminologie aéronautique*, dans OMNIA, n^{o} 120, 18 avril 1903 et l'*Aviation*, pp. 3 et 21, Paris, Dunod, 1909. — Marchis, *Le Navire aérien*, Paris, Dunod, 1909, p. 2 et *Les Aéroplanes*, dans le MONDE MÉDICAL, 15 oct. 1909, p. 867.

en haut ; il cesse de s'élever, quand il a atteint une zone aérienne dans laquelle son propre poids est contrebalancé par le poids de l'air déplacé, moins dense dans cette zone qu'à la surface du sol. Quand il s'agit du plus lourd que l'air, on dit, au contraire, en aviation, que la sustentation est « dynamique » ou que l'air est un support « dynamique ». On veut dire par là que, contrairement à ce qui se présente pour le ballon, pour être maintenu dans l'air à une certaine hauteur au-dessus du sol, l'aéroplane doit posséder une vitesse horizontale suffisante grâce à l'intervention d'une force nouvelle provenant généralement d'un moteur.

En général, quand les mots « statique » et « dynamique » n'ont pas leur sens habituel — celui de Gilbert et d'Appell — ou bien ils sont définis, comme on cherche à le faire en aviation, d'après ce que nous venons de voir, ou bien le contexte permet de préciser sans peine le sens qui leur est donné.

Une remarque analogue peut être faite à propos du mot « équilibre » dont le sens est loin d'être toujours le même.

Mais il y a plus : il existe une « mécanique généralisée (*) qui ne s'occupe pas seulement des déplacements des points matériels comme la mécanique classique ordinaire, mais qui est en outre une *mécanique physique* et même une *mécanique chimique.* » Dans cette mécanique-là, un système en équilibre, c'est encore un système dont les diverses parties ne s'échauffent ni ne se refroidissent, sur lequel les distributions électrique et magnétique demeurent invariables, qui n'éprouve ni fusion, ni congélation, ni évaporisation, au sein duquel ne se produit aucune réaction chimique.

Dans la même mécanique, on parle donc « non seulement de l'équilibre de position et de configuration, mais encore des équilibres thermique, électrique, magnétique, chimique. La notion d'équilibre ainsi généralisée est l'objet de la *statique* généralisée. »

La note actuelle ayant spécialement pour objet l'examen de certaines notions de la mécanique classique ordinaire, il n'y a pas lieu d'insister ici sur la généralisation dont il vient d'être question, mais il était utile de la signaler brièvement.

(*) Duhem, *L'Évolution de la Mécanique*, Paris, Joanin, 1903, pp. 218-220.

Cette communication donne lieu à une discussion à laquelle prennent part le R. P. F. Willaert, S. J., MM. de la Vallée Poussin, Mansion, de Béthune.

M. Mansion fait remarquer que toutes les difficultés que l'on rencontre dans l'exposition de la mécanique viennent de ce que l'on ne distingue pas assez la mécanique rationnelle de la mécanique appliquée.

En mécanique rationnelle, si l'on définit nettement les mots *force, forces appliquées simultanément à un point, système de forces appliqué à un système de points non libres,* le tout par rapport à un certain tétraèdre de référence, on en déduit logiquement, sans peine, le principe de l'inertie, celui de l'indépendance des effets des forces et le principe dit de d'Alembert, parce que ces principes ne sont que des transformations de définitions.

En mécanique physique, on applique ces principes ou ces définitions, dans les cas où l'observation ou l'expérience permettent de croire qu'ils sont applicables, comme en géométrie pratique, on applique le théorème sur le carré de l'hypoténuse aux triangles dont on a observé ou mesuré l'orthogonalité de deux côtés.

On peut faire des remarques analogues sur les cas plus compliqués de mécanique appliquée, indiqués autrefois par M. Pasquier et sur les cas nouveaux qu'il signale aujourd'hui d'après MM. Poincaré, Lorentz, etc. Si l'on définit avec précision les circonstances nouvelles que l'on y considère, d'après les suggestions de l'observation et de l'expérience, on parviendra à des concepts nouveaux d'où l'on pourra déduire des principes de mécanique rationnelle, complémentaires des anciens principes, mais nullement en contradiction avec eux ; ces principes complémentaires pourront servir, avec les anciens, à aborder les questions de mécanique physique, de physique et d'astronomie dans lesquelles se rencontrent des conditions suffisamment rapprochées de celles qui ont donné naissance aux nouveaux concepts.

Le R. P. Bosmans présente un mémoire intitulé : *Un émule de Viète, Ludolphe van Ceulen.*

M. Mansion, qui a lu le travail du R. P. Bosmans, en propose l'impression dans la seconde partie des ANNALES. Cette proposition est adoptée par la Section.

M. Mansion exprime le vœu que l'auteur réunisse en un volume ses nombreux et importants travaux sur l'histoire des mathématiques.

M. Neuberg expose à la Section quelques recherches *sur la Parabole de Kiepert.*

Pour éviter les redites et faire connaître l'objet de la présente note, nous exposerons d'abord les notations et la terminologie que nous allons employer, et nous donnerons un court aperçu historique sur la question traitée et sa connexion avec d'autres questions.

1. Soit ABC un triangle scalène donné *(triangle fondamental).* Nous appellerons A_m, B_m, C_m les milieux des côtés, O et R le centre et le rayon du cercle ABC, H le point de concours des hauteurs AA_h, BB_h, CC_h, enfin G le centre de gravité. Les tangentes en A, B, C au cercle O forment le *triangle tangentiel* $A_tB_tC_t$; les *symédianes* AA_t, BB_t, CC_t concourent au *point de Lemoine*, K ; les côtés homologues des triangles ABC, $A_tB_tC_t$ se coupent aux points collinéaires T_a, T_b, T_c qui sont les centres des *cercles d'Apollonius* passant par un sommet de ABC et par les pieds des bissectrices intérieure et extérieure correspondantes ; ces cercles se coupent sur la droite OK aux deux *centres isodynamiques* W, W′. La droite $T_aT_bT_c$ est appelée *droite de Lemoine ;* les droites indéfinies OA_m, OB_m, OC_m sont les *médiatrices* de ABC.

2. Cela posé, si, sur les côtés de ABC comme bases, on construit, soit extérieurement, soit intérieurement trois triangles isoscèles semblables BCA_p, CAB_p, ABC_p, les droites AA_p, BB_p, CC_p concourent en un même point P. Lorsque l'angle A_pBC varie, le point P décrit une hyperbole équilatère passant par A, B, C, G ; cette conique *(hyperbole de Kiepert)* est la transformée par inversion triangulaire de la droite OK.

Les côtés homologues des triangles $A_pB_pC_p$ *(triangle de Kiepert),* ABC se coupent en trois points collinéaires P_a, P_b, P_c ; l'enveloppe de la droite $P_aP_bP_c \equiv p$ est la *parabole de Kiepert,* inscrite au triangle ABC et touchant la droite de Lemoine ; elle a été étudiée par Artzt (*Programme du Gymnase de Recklinghausen*, 1884).

3. Dans notre *Mémoire sur le Tétraèdre* (1884) nous avons rencontré la même parabole comme enveloppe de l'axe d'homologie $N_aN_bN_c \equiv n$ du triangle ABC et d'un triangle variable $A_nB_nC_n$ homothétique au triangle tangentiel $A_tB_tC_t$ par rapport à O. Les circonférences U_a, U_b, U_c décrites des points N_a, N_b, N_c comme centres et passant respectivement par A, B, C ont deux points communs N, N' qui sont en ligne droite avec O et décrivent une cubique circulaire.

L'identité des deux systèmes de droites *p* et *n* a été établie par M. M^c Cay (Mathesis, 1887, p. 217) et par M. O. Schenker (Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft in Bern, 1908). Ce dernier géomètre ayant cru ses résultats originaux, nous avons été amené à reprendre la question avec de nouveaux développements.

4. C'est également en 1884 que M. Jeřabeck nous a communiqué une étude sur le lieu du point de concours J des droites AA_n, BB_n, CC_n, étude qui a paru dans Mathesis, 1888, p. 81. Le point J décrit une hyperbole équilatère, l'*hyperbole de Jeřabeck*, qui est la transformée par inversion triangulaire de la droite HO.

Soient A_l, B_l, C_l les points de rencontre des côtés du triangle $A_nB_nC_n$ avec les droites OA, OB, OC ; on a $OA_l = OB_l = OC_l$. Les droites A_tA_l, B_tB_l, C_tC_l concourent avec un point L qui parcourt une hyperbole équilatère passant par A_t, B_t, C_t, O, K et ayant pour centre le point de contact du cercle O avec le cercle des neuf points du triangle $A_tB_tC_t$; cette dernière propriété l'a fait nommer *hyperbole de Feuerbach* du triangle $A_tB_tC_t$. Au sujet de cette courbe, le lecteur peut consulter : Assoc. franç. pour l'Avanc. des Sc., 1889, p. 203 (Lemoine) ; Journal de Math. spéc., 1890, pp. 104 et 124 (Boutin) ; Mathesis, 1893, p. 81 (Mandart) ; 1903, p. 267 (Speckman) et 1905, p. 117 (J. N.).

5. Proposons-nous les problèmes suivants :

Trouver, dans le plan du triangle scalène ABC, *le lieu d'un point* N *tel que les centres* O_a, O_b, O_c *des cercles circonscrits aux triangles* NBC, NCA, NAB *soient les sommets d'un triangle homologique avec* ABC.

Chercher l'enveloppe de l'axe d'homologie et le lieu du centre d'homologie.

Le triangle $O_aO_bO_c$ a pour côtés les perpendiculaires aux milieux A_1, B_1, C_1 des droites NA, NB, NC ; soient N_a, N_b, N_c les points de rencontre de ces côtés avec les côtés correspondants de ABC. Les cercles décrits de N_a, N_b, N_c comme centres et passant respectivement par A, B, C se coupent évidemment en N et au symétrique N′ de N par rapport à la droite $N_aN_bN_c \equiv n$.

Désignons par a, b, c les côtés de ABC, et par α, β, γ les distances NA, NB, NC. On doit avoir

$$\frac{N_aB}{N_aC} \cdot \frac{N_bC}{N_bA} \cdot \frac{N_cA}{N_cB} = 1. \qquad (1)$$

Or, si B′, C′ sont les projections de B, C sur AN, on a

$$N_aB : N_aC = A_1B' : A_1C',$$
$$\beta^2 - a^2 = 2\alpha \,.\, A_1B', \qquad \gamma^2 - b^2 = 2\alpha \,.\, A_1C',$$

d'où

$$N_aB : N_aC = (\beta^2 - c^2) : (\gamma^2 - b^2)\,;$$

on en conclut que la condition (1) est équivalente à

$$(\beta^2 - c^2)(\gamma^2 - a^2)(\alpha^2 - b^2) = (\gamma^2 - b^2)(\alpha^2 - c^2)(\beta^2 - a^2). \quad (2)$$

Elle admet l'interprétation suivante : *Trois couples de points d'une droite dont les abscisses sont proportionnelles aux quantités* a^2, α^2, b^2, β^2, c^2, γ^2 *sont en involution*. Pour cette raison nous avons appelé le quadrangle ABCN *involutif*.

L'équation (2) peut prendre la forme symétrique

$$\begin{vmatrix} a^2\alpha^2 & a^2 + \alpha^2 & 1 \\ b^2\beta^2 & b^2 + \beta^2 & 1 \\ c^2\gamma^2 & c^2 + \gamma^2 & 1 \end{vmatrix} = 0. \qquad (3)$$

On en conclut que le point A, par exemple, joue le même rôle par rapport au triangle NBC que le point N par rapport à ABC. Par conséquent, *les quatre droites* AO_a, BO_b, CO_c, NO *concourent en un même point* S, et *les côtés homologues des quadrangles* ABCN, $O_aO_bO_cO$ *se coupent aux six sommets d'un quadrilatère complet*.

6. Soient (x, y), (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) les coordonnées des points N, A, B, C par rapport à deux axes rectangulaires quelconques. En introduisant dans l'équation (3) les valeurs

$$\alpha^2 = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2, \ldots$$

et en soustrayant de la deuxième colonne la troisième multipliée par $x^2 + y^2$, on voit facilement que le lieu de N est une cubique circulaire. Nous désignerons cette courbe par la lettre Γ ; on l'a appelée *cubique des vingt et un points.*

Les équations $\alpha^2 - b^2 = 0$, $\alpha^2 - c^2 = 0$ représentent les circonférences décrites de A comme centre avec les rayons b et c. Représentons ces lignes par V_{ab}, V_{ac} et donnons aux symboles V_{ba}, V_{bc}, V_{ca}, V_{cb} une signification analogue. De l'équation (2) on conclut que *la cubique* Γ *est le lieu des points dont le produit des puissances par rapport aux cercles* V_{ab}, V_{bc}, V_{ca} *est égal au produit de leurs puissances par rapport aux cercles* V_{ba}, V_{cb}, V_{ac}.

7. Avant de poursuivre l'étude de la courbe Γ, nous allons démontrer que l'axe d'homologie des triangles ABC, $O_aO_bO_c$ enveloppe une parabole. A cet effet, considérons un triangle $A_nB_nC_n$ homothétique à $A_tB_tC_t$ par rapport à O, et appelons N_a, N_b, N_c les points de rencontre de ses côtés respectivement avec BC, CA, AB. Les cercles U_a, U_b, U_c décrits de ces points comme centres et passant respectivement par A, B, C recoupent OA, OB, OC en des points équidistants de O. Par suite, O est d'égale puissance par rapport à U_a, U_b, U_c et ces cercles ont une corde commune NN′ passant par O. Il résulte de là que la droite $N_aN_bN_c \equiv n$ est l'axe d'homologie de ABC et d'un triangle $O_aO_bO_c$.

Les points N_a, N_b, N_c se correspondent dans trois ponctuelles semblables dont les segments homologues se projettent respectivement sur les droites OA, OB, OC suivant trois segments égaux, de manière qu'ils sont inversement proportionnels à $\sin(B - C)$, $\sin(C - A)$, $\sin(A - B)$. La droite n enveloppe, par conséquent, une parabole (v) inscrite au triangle ABC.

Pour identifier cette courbe avec la parabole de Kiepert, il suffirait de trouver une quatrième tangente commune. Appelons Q_{bc}, Q_{cb} les points (OB_m, AB), (OC_m, AC), q_a la droite qui les joint, enfin Q_a le point (q_a, BC). On voit immédiatement que les cercles décrits des points Q_a, Q_{cb}, Q_{bc} comme centres et passant respectivement par A, B, C se coupent en A et au symétrique A_s de A par rapport à q_a ; donc q_a est une position de n. D'autre part, les points Q_{bc}, Q_{bc} sont deux sommets d'un triangle de Kiepert dont l'axe d'homologie avec ABC est précisément q_a.

En opérant de même dans les angles ABC, BCA, on trouve deux autres tangentes communes q_b, q_c (parallèles à A_tC_t, A_tB_t) et les points B, C, B_s, C_s appartenant à Γ.

O étant l'orthocentre des triangles $AQ_{bc}Q_{cb}$ circonscrit à (ν), la droite HO est la directrice de la parabole (ν).

Nous allons encore indiquer d'autres positions remarquables du triangle $A_nB_nC_n$ et de la droite n.

Les perpendiculaires abaissées de A sur BO et de B sur AO se coupent en un point C'_n de OC_m et rencontrent respectivement OA_m, OB_m en A'_n, B'_n ; le triangle $A'_nB'_nC'_n$ est une position particulière de $A_nB_nC_n$. Les points N_a, N_b, N_c sont maintenant B, A et le point (AB, $A'_nB'_n$) $\equiv R_c$. R_c est donc le point de contact de (ν) avec AB, et les cercles U_a, U_b qui ont pour rayon c, se coupent aux sommets X_c, X'_c des triangles équilatéraux construits sur AB ; ces sommets appartiennent donc à la courbe Γ et R_c est le centre du cercle $X_cX'_cC$. Les droites AR_a, BR_b, CR_c se coupent au point de Steiner de ABC.

Les sommets X_a, X'_a, Y_a, Y'_a des triangles équilatéraux construits sur BC, CA sont également des points de Γ, et les points de contact R_a, R_b de BC, CA avec la parabole (ν) sont les centres des cercles $X_aX'_aA$, $X_bX'_bB$.

Soient x_a, x_b, x_c les centres des triangles équilatéraux X_aBC, X_bCA, X_cAB construits extérieurement à ABC. Comme $x_ax_bx_c$ est un triangle de Kiepert et aussi une position particulière du triangle $O_aO_bO_c$ (les droites AX_a, BX_b, CX_c et les cercles X_aBC, X_bCA, X_cAB se coupent au *centre isogone* Z), Γ passe par Z. On verrait de même que le second centre isogone Z' est situé sur Γ.

D'autres positions remarquables du triangle $A_nB_nC_n$ sont : le triangle tangentiel $A_tB_tC_t$ qui donne pour N, N' les centres isodynamiques W, W' ; le triangle formé par les perpendiculaires aux milieux des rayons OA, OB, OC (N est alors en O) ; le triangle formé par les perpendiculaires en O à ces rayons.

Lorsque n se transporte à l'infini, les cercles U_a, U_b, U_c dégénèrent en les hauteurs de ABC (et la droite de l'infini) ; donc H est un point de Γ.

Deux triangles de Kiepert, $P_aP_bP_c$ et $P'_aP'_bP'_c$, tels que les angles P_aBC et P'_aBC soient complémentaires, ont avec ABC un même axe d'homologie p, et les droites joignant A, B, C aux sommets de l'un de ces triangles sont perpendiculaires aux côtés correspondants de l'autre ; de plus, les points correspondants P, P′ de l'hyperbole de Kiepert sont en ligne droite avec O et la droite OPP′ est perpendiculaire à p. Cette droite p est aussi l'axe d'homologie d'un triangle $A_nB_nC_n$ avec ABC et les points correspondants N, N′ de Γ sont situés sur la droite OPP′.

Existe-t-il une relation simple entre les couples NN′, PP′ ?

8. L'équation (3) indique immédiatement quelques points de Γ. Ainsi, la solution $a\alpha = b\beta = c\gamma$ correspond aux points W, W′ ; la solution $\alpha = \beta = \gamma$ au point O ; la solution $a^2 + \alpha^2 = b^2 + \beta^2 = c^2 + \gamma^2$ à l'orthocentre H ; la solution $\beta = c$, $\gamma = b$ au point A et à son symétrique par rapport à BC ; enfin la solution $\beta = \gamma = a$ aux points X_a, X'_a.

Pour transformer l'équation (3) en coordonnées barycentriques x, y, z, posons

$$U = a^2yz + b^2zx + c^2xy, \qquad L = x + y + z,$$

et rappelons que l'équation d'un cercle quelconque est de la forme

$$-U + L\,(uz + vy + wz) = 0\,;$$

le premier membre est égal à la puissance du point (x, y, z) si ces coordonnées vérifient l'égalité $x + y + z = 1$, et les quantités u, v, w sont les puissances des points A, B, C par rapport au cercle. Pour le cercle $\alpha^2 = 0$ (de rayon nul) on a $u = 0$, $v = b^2$, $w = c^2$; donc, si l'on fait

$$a^2y + b^2z = \lambda_a, \quad a^2z + c^2x = \lambda_b, \quad b^2x + a^2y = \lambda_c,$$

on a

$$\alpha^2 = -U + L\lambda_a, \quad \beta^2 = -U + L\lambda_b, \quad \gamma^2 = -U + L\lambda_c.$$

Par suite si, pour abréger, on dénote les déterminants par leur première ligne, l'équation (3) rendue homogène en x, y, z devient

$$|\,-a^2U + a^2L\lambda_a \quad a^2L^2 - U + L\lambda_a \quad 1\,| = 0.$$

On la simplifie en ajoutant à la deuxième colonne la troisième multipliée par U ; elle devient alors divisible par L (la solution $L = 0$ a déjà été rencontrée ci-dessus à l'occasion des cercles U_a, U_b, U_c dégénérés). Le lieu proprement dit des points N, N′ est donc représenté par

$$|\,-a^2U + a^2L\lambda_a \quad a^2L + \lambda_a \quad 1\,| = 0.$$

Cette équation se ramène à

$$U\sum(b^2-c^2)\lambda_a + L\left[L\sum a^2(b^2-c^2)\lambda_a + \sum(b^2-c^2)\lambda_b\lambda_c\right] = 0 \quad (4)$$

Comme on a

$$\lambda_b\lambda_c = b^2c^2x^2 + a^2U, \ldots, \sum a^2(b^2-c^2) = 0,$$
$$\sum a^2(b^2-c^2)\lambda_a = -\sum b^2c^2(b^2-c^2)x,$$

l'équation (4) peut s'écrire

$$U\sum(b^2-c^2)\lambda_a + L\left[-\sum x\sum b^2c^2(b^2-c^2)x + \sum b^2c^2(b^2-c^2)x^2\right] = 0$$

ou enfin

$$U\sum(b^2-c^2)(b^2+c^2-a^2)x + L\sum(b^2-c^2)(b^2+c^2-a^2)x^2 = 0.$$

Ce résultat montre que la courbe Γ passe par les points cycliques et par le point à l'infini de la droite HO qui a pour équation $\sum(b^2-c^2)(b^2+c^2-a^2)x = 0$. On en conclut aussi que la circonférence ABC rencontre Γ aux points cycliques, aux sommets A, B, C et en un sixième point situé sur la conique

$$\sum(b^2-c^2)(b^2+c^2-a^2)x^2 = 0.$$

qui est la transformée par points réciproques (isotomiques) de la droite HO.

Nous réservons d'autres développements sur le § 5 pour une communication ultérieure.

M. Pasquier fait, *à propos de la navigation aérienne,* la communication que voici :

Dans sa séance du 21 décembre 1903 et conformément au rapport de la commission nommée pour cet objet, l'Académie des Sciences de Paris décernait le prix Plumey à M. Marchis, alors professeur adjoint à l'Université de Bordeaux. « Ce prix lui est décerné, dit le rapport (*), pour l'enseignement libre de mécanique appliquée, que M. Marchis a créé et plus particulièrement pour ses remarquables leçons sur les machines à vapeur, les machines thermiques et les instruments de mesures industrielles. » A la même époque, M. Marchis inaugurait son enseignement sur la navigation aérienne et, dès le mois de juin suivant, il faisait paraître (**) un gros volume in-4°, comprenant plus de 800 pages, qui constitue l'exposé de ses leçons pendant l'année académique 1903-1904.

C'est peut-être le premier travail d'ensemble qui ait été publié sur la navigation aérienne.

Dans ce premier texte, il était à peine question, et pour cause, d'aéroplanes. Tout récemment, il n'y a pas un mois, paraissaient de nouvelles leçons autographiées, du même auteur, sur le même sujet et publiées par le même éditeur. Ces leçons ont été données pendant l'année académique 1908-1909, devant un nombreux auditoire, composé en grande partie d'ingénieurs ; elles portent pour titre : *Le Navire Aérien*, et comme sous-titre : *Architecture, équilibre, stabilité* et ne comportent pas moins de 900 pages in-4°, y compris les annexes et les tables.

Ce livre, très complet, tout à fait à jour, constitue un véritable traité de navigation aérienne. Mais venant d'apprendre, à la réunion même, par M. de Béthune, qui tend à se faire de l'aéronautique une spécialité, qu'il se propose de donner, dans la prochaine livraison de la REVUE DES QUESTIONS SCIENTIFIQUES, un compte rendu détaillé de la nouvelle et si importante publication du distingué professeur de Bordeaux, M. Pasquier croit inutile d'entretenir davantage la Section de cet objet (***).

(*) COMPTES RENDUS DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES, 2e sem., 1903, pp. 1098 et 1099.

(**) *Leçons sur la Navigation aérienne* (Ballons sphériques. Aérostation militaire. Aérostation scientifique. Aéronautique maritime. Ballons dirigeables). Paris, Ve Dunod.

(***) Le JOURNAL OFFICIEL FRANÇAIS du 28 novembre 1909 porte, p. 11 388, que par décret du 25 du même mois, M. Marchis est nommé, du 1er janvier 1910, professeur d'aviation à la Faculté des sciences de l'Université de Paris. Merci à M. de Béthune d'avoir attiré mon attention sur ce point (Note ajoutée lors de la revision des épreuves).

M. de Béthune fait une communication *sur le point en ballon pendant la nuit. Détermination simultanée de la latitude et de la longitude par l'observation de deux hauteurs d'astres.*

Les diverses méthodes de point en ballon (*) comportent au moins deux observations de hauteurs d'astres, de manière à obtenir la latitude, au moyen d'une valeur approchée de l'heure sidérale locale, et la longitude, au moyen d'une valeur approchée de la latitude.

Pour la détermination de la latitude, le procédé le plus commode repose sur une observation de la polaire (**), mais on peut lui faire une objection grave : la polaire peut être cachée par le ballon et dans ce cas la détermination de la latitude et, comme conséquence, celle de la longitude sont rendues plus laborieuses (***).

Le but de ce travail est de donner une solution graphique aisée du problème par la mise en œuvre des observations de deux astres faites à un petit intervalle de temps.

Soient A et B les deux astres ; soient D_a, T_{ag}, A_a, la déclinaison, l'angle horaire et l'ascension droite de A, h_a sa hauteur corrigée de la réfraction (****) ; nous représentons par L la latitude et par T_{sg} l'heure sidérale locale ; on a

$$(1)\quad \left\{ \begin{aligned} \sin h_a &= \sin L \sin D_a + \cos L \cos D_a \cos T_{ag}, \\ T_{ag} &= T_{sg} - A_a. \end{aligned} \right.$$

(*) Pour les méthodes et les instruments utilisés en ballon, voir : *Recherches sur les instruments et les méthodes propres à la détermination du point en ballon*, par M. Louis Favé, ingénieur-hydrographe en chef de la Marine. — *III^e Congrès International d'Aéronautique* (Milan, 22-28 octobre 1906). Rapports et mémoires. Paris, H. Dunod et Pinat, 1907. — *Astronomische Ortsbestimmung in Ballon*, von Prof. Dr. Adolf Marcuse. Berlin, Druck und Verlag von G. Reimer, 1909. — *Note sur l'emploi du sextant à niveau pour faire le point en ballon*, par M. A. de la Baume-Pluvinel. — *Observations sur la méthode de détermination du point en ballon*, par M. Baldit, du Bureau central météorologique à Paris. — *Procès verbaux de la session extraordinaire de la Commission permanente internationale d'Aéronautique* (Bruxelles, 12-15 septembre, 1907). Paris, H. Dunod et Pinat, 1908.

(**) Marcuse, *loc. cit.*, p. 28.

(***) Voir un procédé très élégant signalé par M. Baldit, *loc. cit.*, p. 67.

(****) Marcuse, *loc. cit.*, p. 58.

De même, pour une étoile B observée au même instant

$$(2)\qquad \left\{ \begin{aligned} &\sin h_b = \sin \mathrm{L} \sin \mathrm{D}_b + \cos \mathrm{L} \cos \mathrm{D}_b \cos \mathrm{T}_{bg}, \\ &\qquad\qquad \mathrm{T}_{bg} = \mathrm{T}_{sg} - \mathrm{A}_b. \end{aligned} \right.$$

Le système (1), (2), se transforme très simplement ; posons :

$$\sin \mathrm{L} = l, \quad \sin \left[\mathrm{T}_{sg} - \frac{\mathrm{A}_a + \mathrm{A}_b}{2} \right] = t,$$

$$\frac{\sin h_a}{\cos \mathrm{D}_a} - \frac{\sin h_b}{\cos \mathrm{D}_b} x, \quad \frac{\sin h_a}{\cos \mathrm{D}_a} + \frac{\sin h_b}{\cos \mathrm{D}_b} = y,$$

$$\frac{\sin (\mathrm{D}_a - \mathrm{D}_b)}{\cos \mathrm{D}_a \cos \mathrm{D}_b} = \alpha_1, \quad \frac{\sin (\mathrm{D}_a + \mathrm{D}_b)}{\cos \mathrm{D}_a \cos \mathrm{D}_b} = \alpha_2,$$

$$2 \sin \frac{\mathrm{A}_a - \mathrm{A}_b}{2} = \beta_1, \quad 2 \cos \frac{\mathrm{A}_a - \mathrm{A}_b}{2} = \beta_2 ;$$

on a

$$(3)\qquad \left\{ \begin{aligned} &x = \alpha_1 l + \beta_1 t \sqrt{1 - l^2}, \\ &y = \alpha_2 l \pm \beta_2 \sqrt{2 - t^2} \sqrt{1 - l^2}, \end{aligned} \right.$$

d'où, en éliminant t, on obtient

$$(4)\qquad \frac{(x - \alpha_1 l)^2}{\beta_1{}^2 (1 - l^2)} = \frac{(y - \alpha_2 l)^2}{\beta_2{}^2 (1 - l^2)} = 1,$$

équation du second degré en l ; on pourrait calculer ses deux racines dont l'une fournirait la latitude L cherchée. Le calcul toutefois est peu économique et pratiquement inexécutable en ballon. Il vaut mieux considérer (4) comme l'équation d'une fonction de trois inconnues l, x, y et construire un abaque représentant les courbes de niveau de la surface pour les valeurs de L correspondantes à la région traversée par le ballon. Alors, il suffit de déduire x et y des hauteurs observées h_a, h_b pour obtenir la latitude du lieu par une simple lecture.

Quant à T_{sg}, on l'obtient au moyen d'un second abaque traduisant la première des équations (3) où les lignes de niveau correspondantes aux diverses valeurs de L sont des lignes droites (*).

(*) De la Baume-Pluvinel, *loc. cit.*, p. 66.

Les lignes de niveau de la surface (4) sont des ellipses dont les centres ont pour coordonnées

$$x = \alpha_1 l, \qquad y = \alpha_2 l,$$

et les axes pour longueurs

$$\beta_1 \sqrt{1 - l^2}, \qquad \beta_2 \sqrt{1 - l^2}.$$

Il est avantageux, pour la lecture de l'abaque, toute question d'échelle mise à part, que l'abaque ne soit pas trop grand et que les lignes de niveau ne se confondent pas à certains endroits. On voit que cette double condition est réalisée en prenant des étoiles de faible déclinaison dont les ascensions droites diffèrent de six heures environ (α_1, α_2 sont alors petits et β_1, β_2 sensiblement égaux).

Les valeurs de x et de y s'obtiennent très simplement en fonction de h_a et h_b par un abaque accessoire où les axes sont gradués en $\frac{\sin h}{\cos D}$ et les fonctions x et y représentées par des droites inclinées à 45° sur les axes.

Jusqu'à présent nous avons admis que les observations étaient simultanées et, dans la pratique, c'est là une condition irréalisable. Montrons comment on peut corriger le résultat fourni par les mesures h_a, h_b en tenant compte de l'intervalle de temps ΔT séparant les deux observations.

Nous admettrons que $A_a > A_b$.

Si A est observé d'abord, ce que nous devons connaître c'est L latitude et T_{sg}, temps sidéral local à l'instant de l'observation de B. Ces deux éléments étaient d'ailleurs $L + \Delta L$ et $T_{sg} - \Delta T$, au moment de l'observation de A.

Si ΔL et ΔT sont tels qu'on peut négliger leurs puissances supérieures à la première (*), on a :

$$\sin h_a = \sin L \sin D_a + \cos L \cos D_a \cos T_{ag}$$
$$+ \Delta L [\cos L \sin D_a - \sin L \cos D_a \cos T_{ag}] + \Delta T \cos L \sin T_{ag},$$

(*) Sur la précision des mesures en ballon, voir Marcuse, *loc. cit.*, p. 11, et de la Baume-Pluvinel, *loc. cit.*, p. 65.

d'où

$$x = \alpha_1 l + \beta_1 t\sqrt{1 - l^2} + \mathrm{M}\Delta\mathrm{L} + \mathrm{N}\Delta\mathrm{T},$$
$$y = \alpha_2 l + \beta_2 \sqrt{1 - t^2}\ \sqrt{1 - l^2} + \mathrm{M}\Delta\mathrm{L} + \mathrm{N}\Delta\mathrm{T},$$
$$\mathrm{M} = \cos \mathrm{L} \sin \mathrm{D}_a - \sin \mathrm{L} \cos \mathrm{D}_a \cos \mathrm{T}_{ag},$$
$$\mathrm{N} = \cos \mathrm{L} \sin \mathrm{T}_{ag}\ ;$$

et, par élimination de *t*,

$$\frac{(x - \alpha_1 l)^2 - 2(x - \alpha_1 l)\,[\mathrm{M}\Delta\mathrm{L} + \mathrm{N}\Delta\mathrm{T}]}{\beta_1^2(1 - l^2)} + \frac{(y - \alpha_2 l)^2 - 2(y - \alpha_2 l)\,[\mathrm{M}\Delta\mathrm{L} + \mathrm{N}\Delta\mathrm{T}]}{\beta_2^2(1 - l^2)} = 1\ ;$$

les lignes de niveau sont encore des ellipses, dont les axes sont les mêmes, mais dont les coordonnées des centres sont :

$$x = \alpha_1 l + \mathrm{M}\Delta\mathrm{L} + \mathrm{N}\Delta\mathrm{T},$$
$$y = \alpha_2 l + \mathrm{M}\Delta\mathrm{L} + \mathrm{N}\Delta\mathrm{T},$$

par suite du retard de la seconde observation sur la première, les ellipses (4) se sont déplacées parallèlement à elles-mêmes ; le déplacement est le même pour les deux axes ; la grandeur et le sens du déplacement sont

$$\mathrm{M}\Delta\mathrm{L} + \mathrm{N}\Delta\mathrm{T}\ ;$$

pratiquement, cela revient à apporter aux valeurs de x et de y déduites de h_a et h_b une correction égale en sens inverse, soit donc

$$-\,[\mathrm{M}\Delta\mathrm{L} + \mathrm{N}\Delta\mathrm{T}].$$

L'écart ΔL est généralement inconnu, mais le terme MΔL peut être négligé en prenant certaines précautions.

En effet ΔL est toujours faible : on peut lui assigner une limite supérieure de 10′ atteinte seulement dans le cas exceptionnel où, l'écart ΔT étant de 10^{m}, le ballon serait emporté dans le méridien par un vent de 120 km à l'heure. D'autre part, M peut être rendu très petit en choisissant un astre de faible déclinaison, et en observant cet astre près du premier vertical.

Quant au coefficient N, on pourra dans la plupart des cas le prendre égal à une valeur constante $\cos L_1$, L_1 étant la latitude moyenne de la région traversée. La correction toujours négative $N\Delta T$ se trouve alors aisément dans une petite table auxiliaire. Si on veut obtenir le point avec une approximation de $10'$ en latitude et de 1^{m} en longitude, il faut opérer de telle sorte que ΔT soit inférieur à 10^{m}.

Si A s'approche du méridien, B s'approche du premier vertical et on montrerait d'une manière analogue que, dans ce cas, il est avantageux d'observer B d'abord. La correction $N\Delta T$, égale en valeur absolue pour x et pour y, sera additive pour x et négative pour y.

En résumé, les opérations nécessaires pour la détermination de la latitude sont :

1° mesure de h_a, h_b et ΔT ;

2° lecture de x et de y sur un abaque en fonction de h_a et h_b ; correction $N\Delta T$;

3° lecture de L sur un abaque en fonction de x et de y corrigés.

Les opérations supplémentaires nécessaires à la détermination de la longitude sont :

1° lecture de l'heure T au garde-temps à l'instant de la seconde observation ;

2° lecture de T_{sg} sur un abaque en fonction de x et de L ;

3° formation de la différence $T - T_{sg}$.

M. le V^te^ de Montessus expose une *méthode générale de détermination des racines des équations numériques.*

1. Calculer une racine *réelle* α d'une équation numérique à $\frac{1}{n}$ près, c'est calculer deux nombres α_p, α_{p+1} différant au plus de $\frac{1}{n}$ et comprenant cette racine α ; les nombres en question vérifient par conséquent les inégalités

$$\alpha_p < \alpha < \alpha_{p+1}, \quad |\alpha_p - \alpha_{p+1}| < \frac{1}{n}.$$

Ce problème est des plus importants. Il est pratiquement résolu pour toutes les équations usuelles. Aucun procédé cependant n'offre un caractère de généralité absolue. Je vais étendre la méthode bien connue des *approximations successives* à tous les cas qui peuvent se présenter. Peut-être y a-t-il des exceptions : mais, sans aucun doute, de tels cas sont extrêmement rares (*).

2. La méthode des *approximations successives* consiste à écrire l'équation proposée sous la forme

$$x - \mathrm{F}(x) = 0 \quad \text{ou} \quad x = \mathrm{F}(x)\,;$$

on calcule alors $\mathrm{F}(\alpha_1)$, α_1 étant un certain nombre, arbitraire, qu'on choisit d'ordinaire assez voisin de la racine α qu'on veut calculer. Soit $\alpha_1 = \mathrm{F}(\alpha)$; soit encore semblablement

$$\alpha_2 = \mathrm{F}(\alpha_1),\ \ \alpha_3 = \mathrm{F}(\alpha_2),\ \ \alpha_4 = \mathrm{F}(\alpha_3), \text{ etc...}$$

cela posé, on sait que *si* $\mathrm{F}'(x)$ *est compris entre* 0 *et* —1 *quand* x *varie de* α *à* α_1, *et si* $\alpha_1 < \alpha$, *on a la suite d'inégalités*

$$(1) \qquad \alpha_1 < \alpha_3 < \alpha_5 < \cdots < \alpha < \cdots < \alpha_4 < \alpha_2\,;$$

si $\alpha_1 > \alpha$, *on a la suite*

$$(2) \qquad \alpha_1 > \alpha_3 > \alpha_5 > \cdots > \alpha > \cdots > \alpha_4 > \alpha_2.$$

On voit que, *dans ces hypothèses*, on finit par obtenir deux nombres α_p, α_{p+1} comprenant la racine α ; ces nombres diffèrent de moins de $\frac{1}{n}$, quel que soit le nombre n, quand p est assez grand.

La méthode des approximations successives est pratiquement usuelle quand on a

$$(3) \qquad -1 < \mathrm{F}'(\alpha) < 0\,;$$

$\mathrm{F}'(x)$ est alors compris dans les mêmes limites 0, — 1 quand x varie dans un certain intervalle β_1, β_2 comprenant α, intervalle qu'il est assez facile de déterminer. On cherche alors deux nombres, α_1, σ_2, compris entre β_1 et β_2 et tels qu'on ait

$$\alpha_2 = \mathrm{F}(\alpha_1)\,;$$

(*) Cf. R. de Montessus, C. R. DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES, juin 1909.

une fois ces deux nombres déterminés, on calcule

$$\alpha_3 = F(\alpha_2), \ \alpha_4 = F(\alpha_3), \text{ etc...}$$

La méthode ne s'applique plus si les inégalités (3) *ne sont pas vérifiées.* Cependant, si

$$0 < F'(\alpha) < 1,$$

on peut (en partant d'un nombre arbitraire α_1, choisi assez proche de la racine α) calculer des nombres $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \dots$ définis par les égalités

$$\alpha_2 = F(\alpha_1), \ \alpha_3 = F(\alpha_2), \ \alpha_4 = F(\alpha_3), \dots$$

et tels qu'on ait

soit $$\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 < \alpha_4 < \cdots < \alpha,$$
soit $$\alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3 > \alpha_4 > \cdots > \alpha,$$

et s'approchant indéfiniment de α ;
on peut dire qu'ici le problème est *imparfaitement* résolu.

A ce propos, M. Lémeray (*) a montré que, par un artifice identique à celui que je vais employer, on peut remplacer la suite

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$$

par une suite

$$\beta_1, \beta_2, \beta_3, \dots$$

convergeant vers la racine α plus rapidement que ne le fait la suite $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$ (**).

On pourrait, d'une manière toute semblable, remplacer les suites (1, 2) par des suites convergeant plus rapidement vers la racine α.

3. Bien que la méthode des approximations successives exige le calcul préalable de $F'(\alpha)$ avec une certaine approximation et qu'il soit nécessaire de décider *à priori* si $F'(\alpha)$ est ou non compris entre -1 et 0, problème parfois difficile à résoudre, cette méthode

---

(*) N. A. DE MATHÉMATIQUES, 1898.

(**) M. Lémeray a cru devoir m'opposer (C. R. DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES, août 1909) une réclamation de priorité. Nos procédés sont identiques, mais nos résultats n'ont *rien de commun* : or, le procédé est, en soi, parfaitement banal.

est l'une des plus simples qu'on connaisse. Nous supposerons dans ce qui va suivre, qu'on a pu résoudre des questions de limites tout à fait analogues qui vont se poser. *La difficulté est de même ordre.*

4. Nous écrirons d'une manière *quelconque* l'équation proposée sous deux formes

$$x = f(x), \quad x = \varphi(x),$$

où $f(x)$, $\varphi(x)$ ne soient pas identiques.

Cela est *toujours* possible.

Soit, par exemple, l'équation

$$0 = a + bx + cx^2 + dx^3 + \cdots;$$

on pourra l'écrire

$$x = \frac{a + cx^2 + dx^3 + \cdots}{-b}, \quad x = \frac{a + bx + dx^3 + \cdots}{-cx};$$

ici,

$$f(x) = \frac{a + cx^2 + dx^3 + \cdots}{-b}, \quad \varphi(x) = \frac{a + bx + dx^3 + \cdots}{-cx}.$$

On pourrait prendre d'autres formes pour $f(x)$, $\varphi(x)$; par exemple on pourrait écrire

$$f(x) = \frac{a + bx + cx + ex^4 + \cdots}{-dx^2} \text{ etc...},$$

c'est indifférent.

Cela posé, on remarquera que, quel que soit le nombre arbitraire ω, l'équation

$$x - f(x) + \omega\,[x - \varphi(x)] = 0 \quad \text{ou} \quad x = \frac{f(x) + \omega\,.\,\varphi(x)}{1 + \omega}$$

admet les mêmes racines que l'équation proposée, *c'est évident.*

4. Je vais démontrer la proposition que voici :

THÉORÈME : α *étant une racine quelconque de l'équation proposée, on peut* TOUJOURS *disposer de l'arbitraire* ω *de manière que*

$$\frac{d}{dx}\cdot\frac{f(x) + \omega\,.\,\varphi(x)}{1 + \omega} \quad \text{ou} \quad \frac{f'(x) + \omega\,.\,\varphi'(x)}{1 + \omega}$$

soit compris entre — 1 *et* 0 *dans un certain intervalle comprenant* α.

Cela est facile, mais plusieurs cas sont à distinguer.

I. Soit

$$x = f(x), \quad x = \varphi(x), \quad f'(\alpha) > 1, \quad \varphi'(\alpha) > 1, \quad f'(\alpha) < \varphi'(\alpha)$$

on écrira

$$x = \frac{f(x) - \lambda\varphi(x)}{1 - \lambda}$$

et on prendra λ tel que

$$\frac{f'(\alpha)}{\varphi'(\alpha)} < \lambda < \frac{f'(\alpha) + 1}{\varphi'(\alpha) + 1}. \tag{4}$$

En effet, nous voulons que

$$-1 < \frac{f'(\alpha) - \lambda\varphi'(\alpha)}{1 - \lambda} < 0 \tag{5}$$

et (4) suppose que

$$1 - \lambda > 0 ;$$

(5) peut donc s'écrire

$$f'(\alpha) - \lambda\varphi'(\alpha) > \lambda - 1,$$

$$f'(\alpha) + 1 > \lambda\,[\varphi'(\alpha) + 1]$$

ou, puisque

$$\varphi'(\alpha) + 1 > 0,$$

$$\lambda < \frac{f'(\alpha) + 1}{\varphi'(\alpha) + 1} ;$$

cette quantité est moindre que *un*, puisque

$$f'(\alpha) < \varphi'(\alpha)$$

$$f'(\alpha) - \lambda\varphi'(\alpha) < 0$$

$$f'(\alpha) < \lambda\varphi'(\alpha)$$

ou, puisque

$$\varphi'(\alpha) > 0,$$

$$\lambda > \frac{f'(\alpha)}{\varphi'(\alpha)} ;$$

cette quantité est plus grande que *zéro*, puisque

$$f'(\alpha) > 0, \quad \varphi'(\alpha) > 0.$$

La méthode des approximations successives sera dès lors applicable au calcul de la racine α *de l'équation*

$$x = \frac{f(x) + \lambda\varphi(x)}{1 + \lambda},$$

qui est une forme particulièrement choisie de l'équation proposée.

On voit qu'il faut s'assurer au préalable des inégalités de condition

$$f'(\alpha) > 1, \quad \varphi'(\alpha) > 1, \quad f'(\alpha) < \varphi'(\alpha)\,;$$

il n'y a guère à cela de difficulté sérieuse quand on connaît deux limites assez resserrées de la racine α ; *il n'y a en tout cas pas plus de difficulté ici qu'il n'y en a dans la méthode*, RECONNUE TRÈS PRATIQUE, *que j'ai rappelée au début de cette note* (Voir plus loin : *Application numérique*).

Nous aurons à résoudre des questions analogues dans les *quatre* autres cas qui vont se présenter et qui sont les suivants :

II. Si

$$f'(\alpha) > 1, \quad \varphi'(\alpha) < 1$$

on écrira

$$x = \frac{f(x) + \mu\varphi(x)}{1 + \mu}, \qquad \frac{1 + f'(\alpha)}{-1 - \varphi'(\alpha)} > \mu > \frac{f'(\alpha)}{-\varphi'(\alpha)}.$$

III. Si

$$f'(\alpha) < -1, \quad \varphi'(\alpha) < -1, \quad f'(\alpha) < \varphi'(\alpha),$$

on écrira

$$x = \frac{\rho\varphi(x) - f(x)}{\rho - 1}, \qquad \frac{-f'(\alpha)}{-\varphi'(\alpha)} < \rho < \frac{-1 - f'(\alpha)}{-1 - \varphi'(\alpha)}.$$

IV. Si

$$0 < f'(\alpha) < 1, \quad 0 < \varphi'(\alpha) < 1, \quad f(\alpha) < \varphi'(\alpha),$$

on écrira

$$x = \frac{f(x) - \lambda\varphi(x)}{1 - \lambda}, \qquad \frac{f'(\alpha)}{\varphi'(\alpha)} < \lambda < \frac{f'(\alpha) + 1}{\varphi'(\alpha) + 1}.$$

V. Si

$$0 < f'(\alpha) < 1, \quad 1 < \varphi'(\alpha),$$

on écrira

$$x = \frac{f(x) - \lambda\varphi(x)}{1 - \lambda}, \qquad \frac{f'(\alpha)}{\varphi'(\alpha)} < \lambda < \frac{f'(\alpha) + 1}{\varphi'(\alpha) + 1}.$$

5. Application numérique (*).

Soit l'équation

$$x^3 - 2x - 5 = 0$$

qui admet (**) la racine

$$\alpha = 2{,}0945\ldots$$

Je suppose qu'on ait reconnu *au préalable*, par les méthodes usuelles de séparation des racines, que α est compris entre 2 et 2,1.

Écrivons

$$x = \frac{x^3 - 5}{2} = f(x), \qquad x = \frac{2x + 5}{x^2} = \frac{2}{x} + \frac{5}{x^2} = \varphi(x)\,;$$

on a

$$f'(x) = \frac{3x^2}{2}, \qquad f'(\alpha) > \frac{3}{2} \times 2, \qquad f'(\alpha) > 1$$

$$\varphi'(x) = -\frac{2}{x^2} - \frac{10}{x^3}, \qquad \varphi'(\alpha) < -1\;:$$

Nous sommes donc dans le cas II.

Remarque I. *Il aurait pu se faire que les limites choisies 2 et 2,1 ne fussent pas assez resserrées pour qu'on pût fixer le cas où l'on se trouve ; on y serait parvenu en cherchant de nouvelles limites, plus resserrées que ne le sont 2 et 2,1.*

Cela posé, on doit avoir

$$(6) \qquad \frac{f'(\alpha)}{-\varphi'(\alpha)} < \mu < \frac{1 + f(\alpha)}{-1 - \varphi'(\alpha)}\,;$$

or,

$$\frac{3}{2} \times 2^2 < f'(\alpha) < \frac{3}{2} \times 2{,}1^2, \quad \text{c.-à-d.} \quad \begin{array}{l} 6 < f'(\alpha) < 6{,}615, \\ 7 < 1 + f'(\alpha) < 7{,}615, \end{array}$$

$$-\frac{2}{4} - \frac{10}{8} < \varphi'(\alpha) < -\frac{2}{2{,}1^2} - \frac{10}{2{,}1^3},$$

(*) Je me permets de faire remarquer que, au contraire de ce qui se présente dans un certain nombre de mémoires, l'équation étudiée a été prise tout à fait au hasard.

(**) Bertrand, *Traité d'algèbre*, tome II.

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} -1{,}75 < \varphi'(\alpha) < -1{,}53, \\ 1{,}75 > -\varphi'(\alpha) > 1{,}53, \\ 0{,}53 < -1 - \varphi'(\alpha) < 0{,}75\,; \end{aligned}$$

cela conduit à écrire pour vérifier (6) :

$$(7) \qquad \frac{6{,}615}{1{,}53} < \mu < \frac{7}{0{,}75}, \quad (4{,}3235\cdots < \mu < 9{,}3\cdots),$$

ce qui nécessite

$$(8) \qquad \frac{6{,}615}{1{,}53} < \frac{7}{0{,}75}.$$

Remarque II. *Si cette inégalité* (7) *n'était pas vérifiée, il faudrait partir de deux limites plus proches l'une de l'autre que ne le sont* 2 *et* 2,1.

Prenons *d'abord* $\mu = 6$; l'équation proposée s'écrira (cf. cas II).

$$x = \frac{f(x) + \mu\varphi(x)}{1 + \mu},$$

ou

$$x = \frac{x^3 - 5}{14} + \frac{12}{7x} + \frac{30}{7x^2} = F(x)\,;$$

partons de la limite *inférieure* $\alpha_1 = 2$:

il viendrait, pour α_2 $\quad [\alpha_2 = F(\alpha_1) = F({}_2)]$:

$$\frac{2^3}{14} - \frac{5}{14} + \frac{12}{7.2} + \frac{30}{7.2^2} = 2{,}14\ldots$$

quantité plus grande que la seconde limite adoptée *à priori* et qui est 2,1 ; nous partirons donc de cette seconde limite en posant

$$\alpha_2 = 2{,}1$$

et nous obtiendrons ainsi

$$\alpha_3 = \frac{9{,}261}{14} + \frac{30}{7 \times 4{,}41} + \frac{12}{7 \times 2{,}1} - \frac{5}{14} = 2{,}0925\ldots :$$

α_2 et α_3 comprennent bien α.

6. On doit remarquer que la convergence *est d'autant plus rapide* que $F'(\alpha)$ est plus voisin de *zéro*.

Or

$$F'(\alpha) = \frac{f'(\alpha) + \mu\varphi'(\alpha)}{1 + \mu},$$

et, si l'on écrit

$$F'(\alpha) = 0 \quad \text{ou} \quad f'(\alpha) + \mu\varphi'(\alpha) = 0,$$

il vient

$$\mu = -\frac{f'(\alpha)}{\varphi'(\alpha)};$$

comparant avec (6), on voit que pour assurer une convergence rapide, il faudra prendre μ aussi voisin que possible de sa limite inférieure, qui est, dans le cas présent,

$$4,3235\ldots$$

Une remarque analogue est à faire pour chacun des divers cas.

Prenons, par exemple, $\mu = 5$ et partons de la limite 2,09 ; on trouvera

$$2,09 < 2,0944 < \alpha < \ldots < 2,0954.$$

Prenons ensuite $\mu = 4,3236\ldots$ et partons encore de la limite 2,09 ; on trouvera

$$2,09 < 2,09455\ldots < \alpha < \ldots < 2,09466\ldots$$

Partons enfin, pour le calcul de μ lui-même, non plus de 2 mais de 2,1 ; on trouvera pour limite inférieure de μ le nombre

$$4,3142,$$

d'où

$$x = \frac{x^3 - 5}{2 \times 5,3142} + \frac{8,6284}{5,3142 \times x} + \frac{21,5710}{5,3142 \times x^2} = F(x)$$

formule qui donne une approximation très rapide ; en posant

$$\alpha_1 = 2,09$$

on trouve, en effet,

$$\alpha_2 = F(\alpha_1) = 2,0965,$$

et on a vu que

$$\alpha = 2{,}0945\ldots;$$

on a ensuite

$$\alpha_3 = 2{,}0945\ldots$$

7. Je crois avoir mis en évidence, par ce qui précède, la possibilité d'étendre la méthode des approximations successives, jusqu'ici limitée à un petit nombre de cas, à tous les cas possibles ; cette méthode présente surtout de l'intérêt, me semble-t-il, pour le calcul des racines des *équations transcendantes*. Il me semble inutile de donner un exemple de résolution d'une équation de ce genre (*).

M. Goedseels fait la communication suivante :

J'ai publié dans le tome XXXI des ANNALES, sous le titre : *De la quadruple pesée,* un procédé qui sert, premièrement, à obtenir au moyen d'une balance ayant un certain degré de précision, des pesées d'une précision beaucoup plus grande; secondement, à déterminer une limite inférieure qui est certainement atteinte ou dépassée par les erreurs, et en dessous de laquelle on ne peut par conséquent, sous peine d'absurdité, fixer le degré de précision des pesées.

J'ai appliqué le procédé à un exemple numérique. Le travail prémentionné est la résolution du problème ci-après :

On donne 1° une série de quatre équations

$$\begin{aligned} a_1 x + b_1 y &= m_1 + z, \\ a_2 x + b_2 y &= m_2 + u, \\ a_3 x + b_3 y &= m_3 + v, \\ a_4 x + b_4 y &= m_4 + w, \end{aligned}$$

entre les variables x, y, z, u, v, w;

(*) M. Esclangon (SOCIÉTÉ DES SCIENCES PHYSIQUES ET NATURELLES DE BORDEAUX, 1908) s'est proposé le même objet et y est parvenu par une méthode analogue ; mais il lui est nécessaire de calculer le maximum et le minimum de $f'(x)$, $f(x) = 0$ étant l'équation dont on veut calculer une racine. A rapprocher du mémoire de M. Esclangon, une note de M. Zoretti, parue en août 1909 dans les N. A. DE MATHÉMATIQUES, après l'impression de ma note à l'ACADÉMIE DES SCIENCES et une *indication* de Galois, *Œuvres*, pp. 13, 14.

2° une quantité α égale ou supérieure en valeur absolue aux variables z, u, v, w.

On demande 1° la limite inférieure i et la limite supérieure s de x, la limite inférieure I et la limite supérieure S de y lorsque z, u, v, w varient dans l'intervalle $(-\alpha, +\alpha)$;

2° la limite inférieure de α dans le cas où cette quantité n'est pas donnée.

M. Mansion a fait des objections au procédé de la quadruple pesée, à notre dernière réunion, et j'y ai répondu sur-le-champ aussi bien qu'on peut le faire pour des objections verbales.

La communication de notre savant collègue ayant paru dans nos ANNALES (procès-verbal de la session du 20 avril 1909), j'ai pu la lire avec attention. J'ai pu constater ainsi que les objections de M. Mansion s'adressent à des idées qui ne figurent pas dans mon procédé de *la quadruple pesée.*

M. Mansion fait une communication *sur la légende de Galois* dont voici un résumé.

Si on étudie avec soin les notices publiées par Dupuy, Bertrand, Picard, d'Adhémar, J. Tannery sur Évariste Galois (né à Bourg-la-Reine, près de Paris, le 25 octobre 1811, la veille de la fête de S. Évariste ; mort à Paris, le 31 mai 1832), on reconnaît que tous les malheurs de l'infortuné géomètre viennent de lui-même.

Quand lui ou ses biographes blâment ou incriminent sa mère, ses maîtres du Collège Louis-le-Grand, les examinateurs de l'École Polytechnique, ceux de l'École Normale ou le Directeur de celle-ci, le rapporteur de l'Académie des Sciences de Paris sur le principal mémoire de Galois, les juges qui l'ont acquitté dans son premier procès, ceux qui l'ont condamné dans le second, on voit aisément que, au point de vue de la morale la plus élémentaire, ces blâmes et ces incriminations ne sont guère justifiés. Tout au plus peut-on reprocher à Fourier, secrétaire perpétuel de l'Académie, d'avoir égaré la première rédaction des recherches de Galois.

En réalité, presque tous ceux qui ont été en relation avec Galois ont été plutôt indulgents que sévères à son égard. Les revues scientifiques ont accueilli de confiance les notes qu'il leur a envoyées. Si l'Académie des Sciences lui a demandé par Poisson, son rapporteur, de vouloir développer davantage son Mémoire *sur la* *résolubilité des équations par radicaux*, avant de l'admettre dans ses Recueils, c'était son droit et son devoir, puisque ce Mémoire était incompréhensible sans un long commentaire. Si d'ailleurs Galois avait suivi le conseil de Poisson, sa théorie des groupes serait entrée dans la Science quarante ans plus tôt et n'eût pas dû attendre le *Traité des Substitutions* de Jordan pour envahir le domaine entier des mathématiques.

L'extraordinaire génie algébrique de Galois l'excuse sans doute d'avoir négligé au collège plusieurs branches de ses études, entraîné qu'il était par ses recherches personnelles. Il n'excuse ni l'abandon de la religion de sa mère, ni celui de sa mère elle-même, ni tout le reste de sa conduite depuis la mort de son père (*) jusqu'à son fatal duel (30 mai 1832) [*pour une infâme coquette*, comme il l'appelle lui-même].

La vie de Galois se ferme sur deux mots écrits l'avant-veille de sa mort ; l'un, vraiment tragique, à son ami Auguste Chevalier ; *je n'ai pas le temps* [de t'exposer mes recherches] ; l'autre, très beau, qui est la suprême pensée de Galois et son adieu à la vie : « *Pardon pour ceux qui m'ont tué, ils sont de bonne foi.* »

Puisse ce dernier écho de l'éducation chrétienne que lui avait donnée sa mère, avoir apporté quelque consolation à *cette femme très intelligente et très bonne* (J. Tannery), qui survécut à son mari et à son malheureux fils jusqu'en 1872 !

M. Goedseels fait savoir à la Section que M. le Ministre des Sciences et des Arts a inscrit la *Société scientifique de Bruxelles* parmi les corps savants auxquels son département adressera un exemplaire de l'*Atlas photographique du ciel*.

Une communication de M. Goedseels *sur le niveau à bulle de précision* est remise à la séance prochaine.

(*) Nicolas Gabriel Galois, atteint du délire de la persécution, s'était asphyxié le 2 juillet 1829, à Paris. Ses obsèques eurent lieu à Saint-Étienne-du-Mont, mais il fut enterré à Bourg-la-Reine dont il était maire.

Seconde section

M. E. Vanderlinden décrit un *cas de foudroiement survenu à Koekelberg* (Bruxelles), en mai 1909.

Dans une communication faite à la session d'octobre 1906, j'ai présenté divers arguments, tant théoriques que déduits d'observations, qui m'incitaient à admettre que la foudre peut frapper certains arbres et spécialement ceux à tronc lisse, sans y laisser de traces. A la session de janvier 1907, je signalais un curieux foudroiement que je considère comme une preuve à l'appui de cette opinion (*).

J'ai l'honneur de porter à votre connaissance un autre cas, survenu récemment et qui, me semble-t-il, est tout à fait démonstratif.

Le 23 mai 1909 après-midi, un jeune homme abrité sous un marronnier à Koekelberg y fut tué net par un coup de foudre. Deux personnes qui se tenaient près de lui ne furent pas atteintes. M'étant rendu sur les lieux de l'accident, le lendemain matin, j'ai fait les constatations et recueilli les renseignements suivants :

Le marronnier, au tronc duquel la victime se tenait adossée, fait partie d'un groupe de cinq arbres de même essence et mêmes dimensions à peu près, garnissant la cour d'un cabaret enseigné « A la vue de Bruxelles » et situé à quelques mètres au nord de la basilique en construction à Koekelberg. Au moment de l'accident, il pleuvait fort et le cabaret était rempli de monde. C'est cette circonstance qui a amené le jeune homme à se réfugier sous l'arbre. La cour est limitée à l'ouest et à l'est par deux bâtiments. Au sud, il y a un jardin planté d'arbres, et au nord le boulevard. Les arbres, d'une hauteur de 8 à 9 mètres, ont cinq à six mètres de tronc et couvrent la cour d'une voûte épaisse de verdure.

(*) Dans un travail publié tout récemment, Hans Brodersen se rallie entièrement à ma manière de voir et cite à cet effet quelques constatations *(Ueber Blitzschläge in Schleswig-Holstein*, dissertation inaugurale, Kiel, 1909). Voir aussi, sur cette question, mon mémoire : *La foudre et les arbres* (ANNALES MÉTÉOROLOGIQUES DE L'OBSERVATOIRE ROYAL DE BELGIQUE, 1907).

Ils sont placés sur deux rangs. Le rang du côté ouest en comprend deux, distants de 8 mètres. A 4 mètres vers l'est, se trouvent les trois autres distants les uns des autres de 2,50 m. Comme on l'observe ordinairement chez le marronnier, les troncs sont lisses, sauf près du sol où certains d'entre eux, notamment celui qui nous intéresse, ont des blessures cicatrisées par lesquelles le bois a été mis à nu. Le coup de foudre meurtrier a laissé entièrement intact l'arbre contre lequel le jeune homme s'appuyait, de même que les arbres voisins. Pas la moindre lésion ni sur le tronc ni sur les branches. Dans la couronne, j'ai vu deux feuilles tuées par la décharge et qui, ayant perdu leur turgescence, étaient deve-

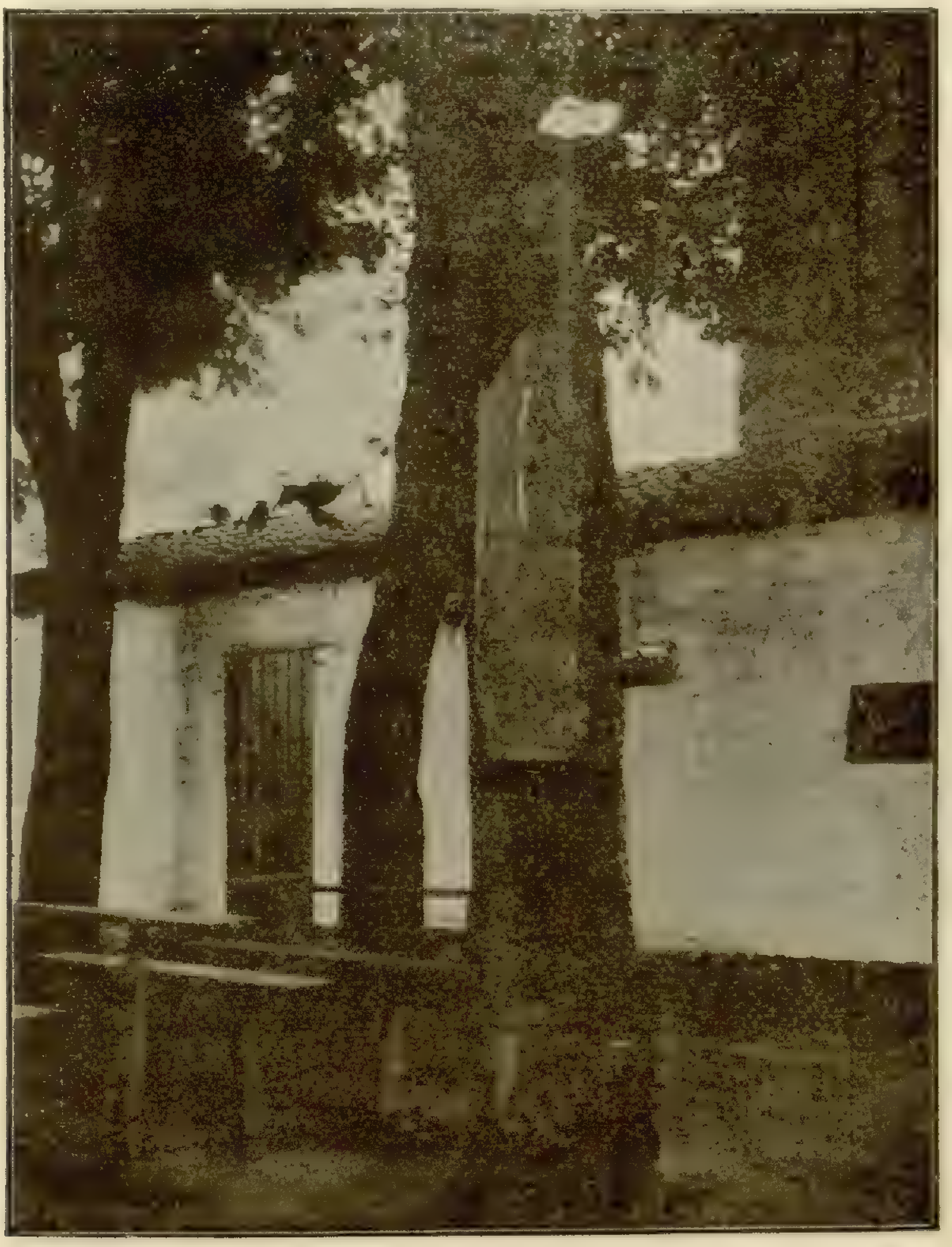


Fig. 1.

nues brunâtres. Mais il fallait être prévenu pour les apercevoir Par contre, une planchette, accrochée au tronc au moyen d'un clou, portait cinq éraflures longitudinales, dont une de 30 cm. de long sur une largeur et une profondeur d'un demi-centimètre environ. Les trois autres sont insignifiantes. On aurait dit que la première avait été creusée à la gouge. Sur le clou je n'ai rien remarqué de particulier.

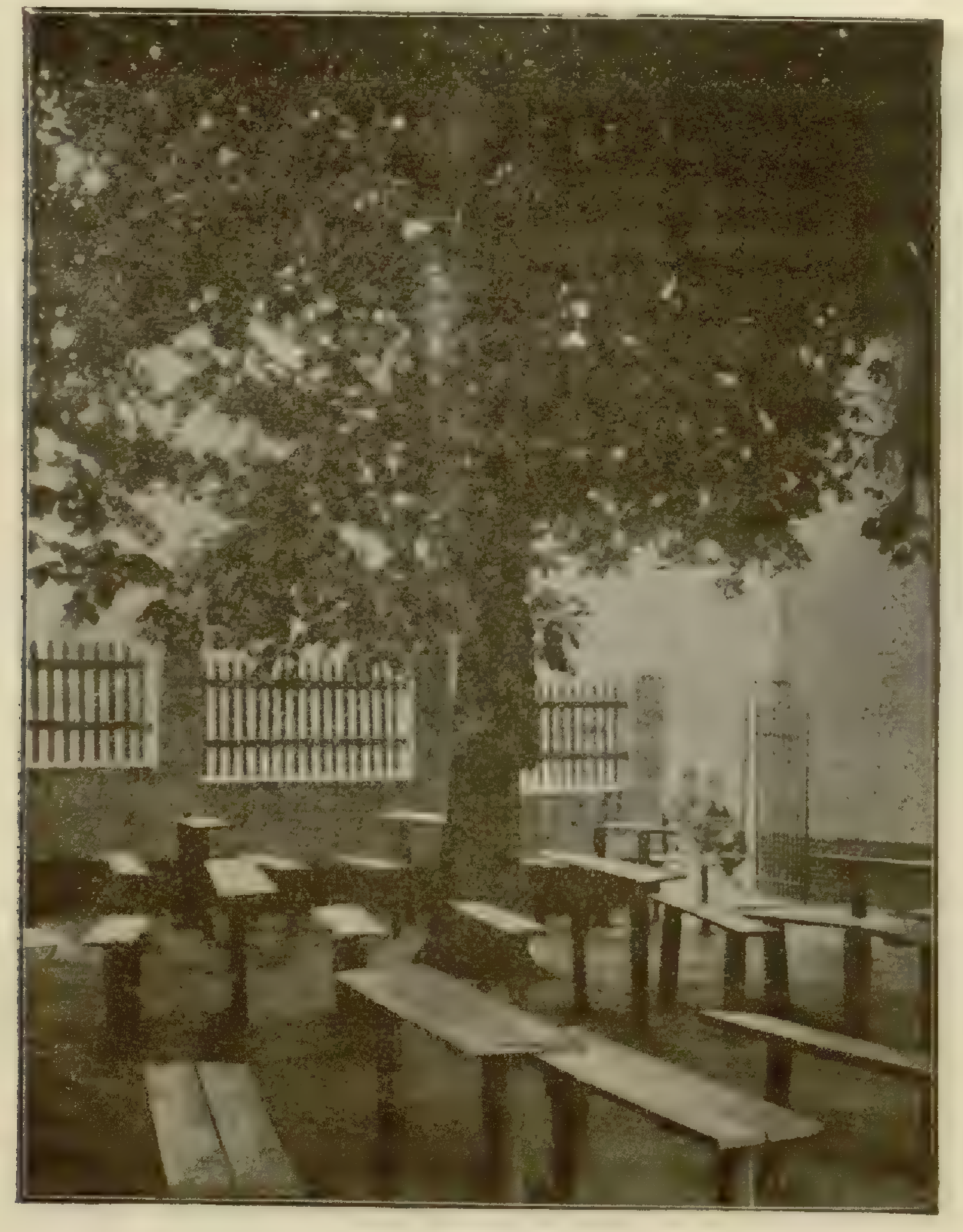


Fig. 2.

L'examen des trois photographies ci-jointes et que je dois à l'obligeance de MM. Delvosal et Somville, astronomes à l'Observatoire, me dispensera d'entrer dans de plus longs détails. La figure 1 représente le côté du tronc contre lequel le jeune homme se tenait appuyé. La figure 2 en montre le côté opposé. On remarquera que le tronc est lisse. A sa base il porte une ancienne plaie. Enfin, la figure 3 montre en détail les effets de la décharge sur la planchette. Le jeune homme était placé exactement sous la planchette, dont l'extrémité inférieure est à 2 mètres du sol. Il tenait

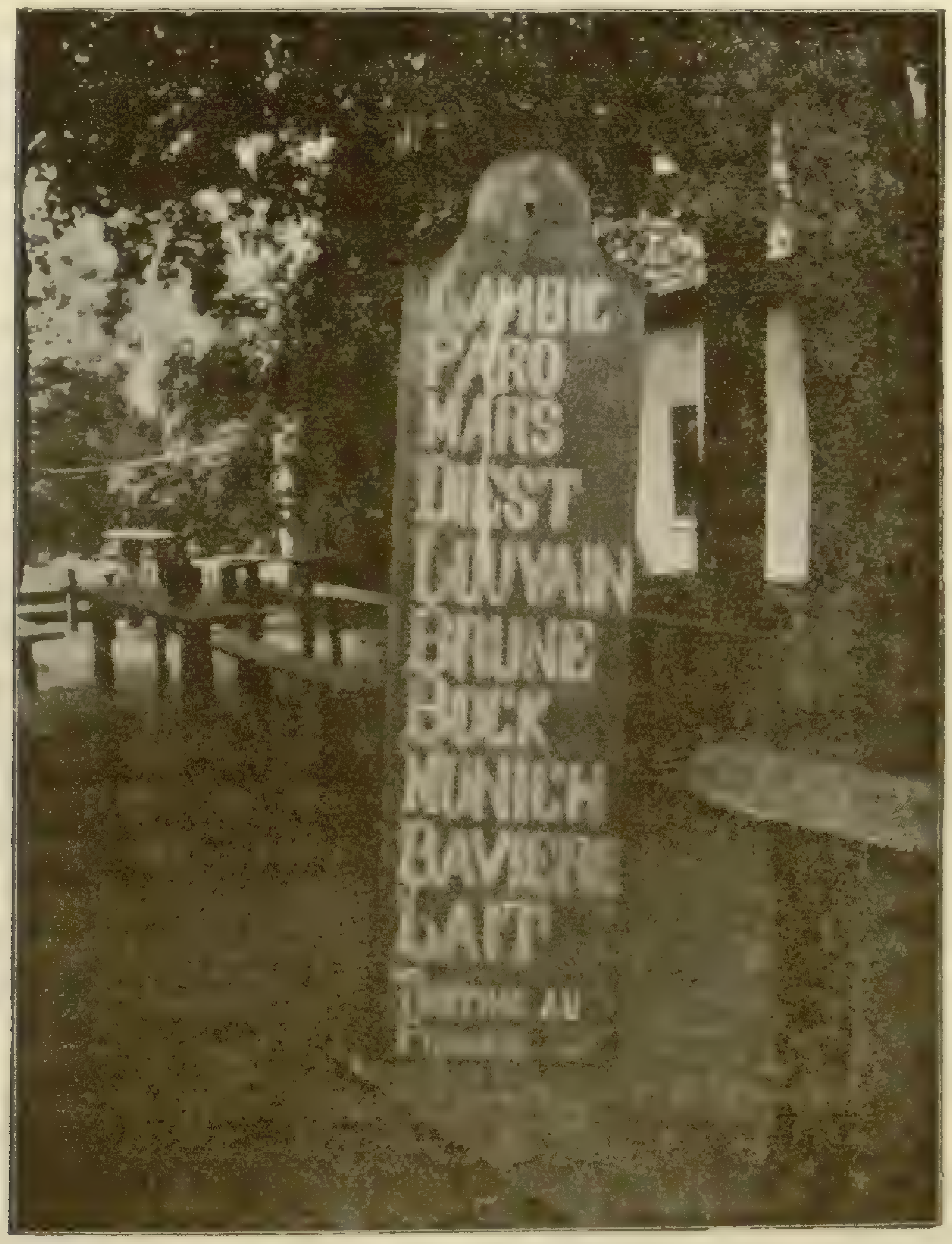


Fig. 3.

sous le bras un instrument de musique (bugle) en laiton et qui n'a pas été endommagé. L'arbre était relié à l'arbre voisin de sa rangée au moyen d'un gros fil de fer. Ce fil n'a pas été entamé. On a aussi attiré mon attention sur une petite excavation arrondie, de cinq centimètres de profondeur, que la foudre avait creusée dans le sol au point où la victime se tenait. C'est un phénomène qu'on observe assez souvent au pied des arbres foudroyés.

Pour compléter cette relation, voici quelques indications sur les lésions constatées sur la victime. Elles m'ont été communiquées obligeamment par M. le vicaire Bonjean, de Ciney, qui se trouvait sur les lieux au moment de l'accident et qui a prêté ses soins à la victime. Voici un extrait d'une lettre que m'a adressée M. Bonjean :

« Son instrument est absolument intact ; il porte simplement trois petites taches. D'autre part, nous avons remarqué que le bras qui tenait l'instrument avait été brûlé par le passage de la foudre. Chose assez étrange, puisque la foudre a suivi le corps de haut en bas. Elle a touché le corps au dos, au point sans doute où celui-ci adhérait à l'arbre. A cet endroit, il y avait une forte brûlure. Puis, elle est descendue le long du corps et lui a perforé le pied pour entrer dans la terre. Un soulier était déchiqueté et coupé en deux de part et d'autre. Il ne restait plus aucun des crochets en cuivre. Le paletot, le gilet et la chemise étaient troués sur une largeur d'une pièce de cinq francs au point du dos où la foudre est entrée. Il n'y avait pas d'autre déchirure, sinon que le dessous de la culotte près du soulier était aussi complètement déchiqueté. La brûlure du dos était rouge et on y voyait comme une piqûre. La montre qui se trouvait dans la poche s'est arrêtée à l'heure exacte de l'accident : 4 h. 40. Le verre était brisé et le bord près du verre porte une forte égratignure. La chaîne, qui traversait le gilet d'une poche à l'autre, était complètement noircie et coupée en deux. »

Je dois ajouter que je suis allé examiner à nouveau les arbres le 29 mai, afin de m'assurer s'ils ne présentaient rien de particulier. Leur santé était parfaite.

Le fait intéressant dans cette observation est qu'il s'agit d'un arbre ayant servi de récepteur et de conducteur pour l'éclair et que le passage du fluide n'a pas endommagé. La décharge a produit un effet mécanique en passant du tronc sur la planchette et ensuite sur le jeune homme. A noter aussi qu'elle a laissé intacts différents objets métalliques rencontrés sur son passage.

De *nouvelles remarques critiques au sujet de la théorie du timbre* sont exposées par M. Delemer. La Section nomme commissaires pour l'examen de cette note : M. le Vicomte d'Adhémar et le P. Wulf.

M. de Hemptinne entretient la Section de ses *recherches concernant l'action de l'effluve électrique sur la polymérisation des liquides.*

M. le Chanoine De Muynck continue l'exposé de ses *recherches sur les électrodes enveloppées.*

Une communication antérieure (*) avait pour objet certaines mesures de potentiel explosif entre électrodes « enveloppées », c'est-à-dire entre deux ballons en verre, contenant un liquide conducteur, celui-ci étant relié par un fil métallique aux deux pôles d'une machine électrostatique.

Ces mesures avaient été obtenues au moyen d'un micromètre à étincelles. Comme cette méthode est assez fastidieuse, j'ai voulu essayer tout d'abord de la remplacer par la méthode plus rapide de l'électromètre.

Je me suis servi à cet effet de l'électromètre de Bichat et Blondlot (**) dans lequel l'attraction de deux cylindres, portés à la différence de potentiel à mesurer, permet de calculer la valeur absolue de celle-ci. L'appareil, monté en dérivation sur les deux fils qui relient la machine aux ballons, accuse une déviation croissante au fur et à mesure que la différence de potentiel des deux cylindres augmente. Si, à la place des ballons, on a des sphères métalliques, l'expérience se fait très aisément : au moment où on entend l'étincelle éclater entre les sphères, on voit l'image lumineuse donnée par le miroir de l'instrument s'arrêter brusquement, et rétrograder, car les potentiels se sont égalisés dans la décharge. Avec les électrodes enveloppées au contraire l'étincelle est peu bruyante, souvent même quasi imperceptible à l'oreille, et d'autre part, au moment où elle éclate, on ne constate pas d'arrêt dans le mouvement ascensionnel de l'image lumineuse. Ceci d'ailleurs n'a rien de surprenant ; car, à la différence de ce qui se passe entre électrodes métalliques, il ne s'écoule pas d'électricité ici dans l'étincelle ; les sphères liquides ne se déchargent ni ne se neutralisent, leur potentiel ne diminue pas sensiblement. La conséquence

---

(*) Ann. de la Soc. scient. de Bruxelles, Session du 20 avril 1909. Seconde section.

(**) Journal de Physique, 2e série, 5, 1886, pp. 325 et 457.

de cela, c'est que la méthode de l'électromètre ne convient pas dans le cas d'électrodes enveloppées.

On peut remarquer à ce propos que Almy (*), dans ses recherches sur la différence de potentiel nécessaire pour que la décharge traverse une lame de verre, s'est servi de la méthode électrométrique, et ne mentionne pas qu'elle ait présenté une difficulté spéciale. C'est que dans ses expériences il y avait passage d'une quantité notable d'électricité, donc décharge au moins partielle, et diminution appréciable du potentiel. Et, si entre électrodes enveloppées pareille diminution ne s'est pas observée, on peut en tirer la conclusion que le verre du ballon était assez épais pour ne pas se laisser traverser par la décharge.

Force fut donc de revenir à la méthode du micromètre. Elle est lente et, en outre, sujette à certaines causes d'erreurs, parmi lesquelles il convient de relever ici la variation de la vitesse de rotation des plateaux de la machine. Cette influence perturbatrice s'observe facilement par l'expérience suivante : plaçons les ballons et le micromètre dans une position telle que l'étincelle éclate un peu plus facilement entre les ballons que dans le micromètre. Si alors on fait tourner la machine lentement, l'étincelle jaillit entre les ballons ; si au contraire le mouvement de rotation est rapide, elle éclate d'abord dans le micromètre, ou simultanément dans le micromètre et entre les ballons. Les choses se passent comme si l'étincelle, pour se former entre les électrodes enveloppées, avait besoin d'un intervalle de temps plus considérable. Il aurait été intéressant d'étudier ceci de plus près, mais il faudrait, pour le faire convenablement, une batterie d'accumulateurs à haut potentiel, que nous n'avions pas à notre disposition.

Les expériences antérieures avaient montré :

1° Qu'il semble bien exister pour chaque distance *d* des deux ballons, une valeur déterminée du potentiel, à laquelle une étincelle jaillit dans l'intervalle des deux sphères.

2° Que certaines mesures isolées présentent des écarts considérables.

D'après cela il semblait nécessaire de rechercher si la cause de ces écarts ne résidait pas dans l'une ou l'autre circonstance, qui

---

(*) Ann. d. Phys. u. Chem., *1*, 1900, p. 510.

pourrait exercer une influence sur la mesure. Je pus vérifier ainsi que le changement de signe du pôle de la machine qui est au sol ne paraît guère produire d'effet. Je constatai à deux reprises différentes, qu'un léger dépôt de buée sur le verre des ballons ne fait pas varier le potentiel d'une façon appréciable. Si toutefois le dépôt devient plus abondant et constitue une véritable couche liquide à la surface du verre, la décharge change d'aspect, se ramifie, et il est difficile de faire une mesure. Je notai enfin que, si dans l'intervalle de deux mesures on fait passer sur les ballons la flamme d'un brûleur Bunsen et qu'on attend que la légère buée qui s'est déposée, se dissipe, le potentiel de la décharge n'est pas notablement altéré. Un léger abaissement a cependant été observé dans quelques mesures. Je fis ensuite une série d'expériences pour déterminer l'influence que pouvaient exercer la température, la pression ou l'humidité de l'air.

Le tableau suivant donne quelques résultats obtenus. On y désigne par t la température, par e l'état hygrométrique, par p la pression atmosphérique du moment. La distance des parois extérieures des ballons est désignée par d ; l'écart correspondant entre les sphères du micromètre, par d'. V représente le potentiel du micromètre au moment de la décharge. V est exprimé en U. E. S. absolues ; d et d' en centimètres.

t	e	p	d	d'	V
13	0,54	763	1,01	1,16	100,1
»	»	»	»	1,13	97,3
»	»	»	»	1,10	96,5
»	»	»	»	1,10	96,5
»	»	»	»	1,09	95,9
»	0,57	762	1,20	1,48	119,3
»	»	»	»	1,47	118,7
»	»	»	»	1,60	123,4
»	»	»	»	1,45	117,5
12,5	0,69	755	1,20	1,37	112,7
»	»	»	»	1,37	112,7
»	»	»	»	1,36	112,1
»	»	»	»	1,37	112,7
»	»	»	»	1,38	113,3

t	e	p	d	d'	V
»	»	»	»	1,37	112,7
»	»	»	»	1,39	113,9
13,5	0,66	764	1,20	1,44	116,9
»	»	»	»	1,49	119,9
»	»	»	»	1,45	117,5
»	»	»	»	1,41	115,1
15,8	0,65	764	1,20	1,52	121,7
»	»	»	»	1,50	120,5
»	»	»	»	1,50	120,5
»	»	»	»	1,45	117,5
13,0	0,54	763	1,23	1,41	115,1
»	»	»	»	1,39	113,9
»	»	»	»	1,37	112,7

Ces chiffres présentent des écarts assez considérables, et il ne paraît pas bien possible d'en dégager une influence éventuelle de l'un ou l'autre des facteurs nommés plus haut. En y regardant cependant de près, on peut y faire les deux observations suivantes :

1° Les valeurs dans une même série de mesures sont passablement concordantes, mais cette concordance n'existe plus entre les mesures obtenues pour une même distance des ballons à des jours différents. Pour une même valeur $d = 1,20$, les valeurs de d', si on laisse de côté le chiffre manifestement trop grand de 1,60, oscillent entre 1,36 et 1,52, présentant donc un écart de 11 °/₀ environ.

Il ne semble pas que des variations de température, état hygrométrique ou pression barométrique puissent rendre compte de ces différences. Il faudrait, p. e., pour justifier un écart de 0,16 sur d', admettre, d'après la règle connue d'Heydweiller, une variation de 73 mm. dans la pression, ou de 27 degrés dans la température.

2° Dans une même série on constate souvent une diminution graduelle de d'.

Pour étudier celle-ci de plus près, je fis un certain nombre de mesures, avec un micromètre de précision d'Edelmann, dont les sphères ont un rayon de 0,48 cm. Pour évaluer le potentiel de décharge, je me suis servi des chiffres donnés par Landolt et Börnstein pour la valeur très peu différente de $R = 0,5$ cm.

En déterminant ainsi un grand nombre de fois le potentiel explosif pour une même distance des ballons, on s'aperçoit que l'atmosphère de la salle d'expérience semble exercer une influence.

Pour opérer autant que possible dans des conditions identiques de retard à la décharge, toutes les expériences étaient faites dans une salle fermée, à l'abri de la lumière du jour. Or, si on fait successivement plusieurs déterminations du potentiel explosif pour une même distance des ballons, on constate que ce potentiel diminue d'une façon régulière, pour remonter aussitôt qu'on aère la salle pendant quelques minutes.

Voici deux séries de mesures qui montrent cela nettement. La colonne I renferme les valeurs obtenues avant, la colonne II, celles obtenues après l'aérage de la salle.

$t = 17{,}5$; $e = 0{,}68$; $p = 754$; $d = 0{,}48$

I

64,8
62,0
61,1
60,1
58,3

II

62,0
62,0

$t = 17{,}5$; $e = 0{,}69$; $p = 753$; $d = 0{,}48$

I

60,1
59,2
58,3
60,1
59,2

II

64,8
61,1
63,9
62,0

Cette influence exercée par l'atmosphère d'une salle fermée peut être mise sur le compte de diverses causes : ionisation par les effluves de la machine électrique, production d'ozone, présence de CO_2 ou de vapeur d'eau dans l'air, conductibilité superficielle des isolants, etc.

J'essayai d'éliminer ce dernier effet dans une nouvelle série de mesures.

Le col des ballons était recouvert d'une couche mince de paraffine ; la conductibilité superficielle de celle-ci semble absolument hors de cause, car la mesure du potentiel après avoir fait fondre cette couche, donna le même chiffre qu'avant la fusion.

Reste la surface du verre en dessous de la couche de paraffine. Pour me renseigner sur sa conductivité, je me servis de l'artifice de l'anneau de garde. Une bandelette de papier d'étain fut enroulée autour du col d'un des ballons, entre le verre et la couche de paraffine, et mise en communication avec la terre. Si, maintenant, l'intérieur du ballon qui porte l'anneau communique avec le pôle positif de la machine, l'autre ballon, étant relié au pôle négatif et au sol, il est clair que s'il existe une conductivité sur le col du ballon, l'électricité va passer de l'intérieur du premier ballon par l'anneau de garde dans le sol, et il ne pourra pas se produire d'étincelle notable. Or j'obtins, dans ces conditions, pour une distance $d = 0,48$ des ballons, une étincelle à une distance $d' = 0,49$ du micromètre, c.-à.-d. à un potentiel $V = 55,5$. Ce résultat cadre avec les chiffres précédents, et permet de conclure à l'absence de conductibilité superficielle du verre. Cependant la même expérience répétée après un intervalle de plusieurs heures, donna un résultat négatif : il fut impossible d'obtenir une décharge tant que l'anneau de garde était relié au sol. Le verre était devenu conducteur.

Je remplaçai ensuite la paraffine par une couche de gomme-laque, et je constatai que celle-ci supprime pratiquement toute conductibilité superficielle. Cela résulte des chiffres suivants, qui se rapportent les premiers (série A) aux ballons en verre employés précédemment, les seconds (série B) à des ballons à long col, de verre différent, de rayons $r_1 = 3,40$, $r_2 = 3,43$, remplis de limaille métallique au lieu d'eau. Les colonnes I et II donnent les distances obtenues lorsque l'anneau était relié au sol (I) ou isolé (II).

t	e	p	d	d'		V
Série A						
				I	II	
16	0,70	761	0,47	0,48	0,54	52,1
»	»	»	»	0,54		
16	0,70	761	0,47	0,55	0,50	56,5
»	»	»	»	0,55	0,48	54,6
15,5	0,72	757	0,47	0,72	0,54	60,1
»	»	»	»	0,74	0,52	58,3
Série B						
15,4	0,74	757	0,38	0,36	0,40	47,7
»	»	»	»	0,38	0,40	47,7
15,5	0,78	759	0,38	0,38	0,37	44,8
»	»	»	»	0,38	0,37	44,8
16,5	0,64	763	0,38	0,35	0,47	53,8
»	»	»	»	0,36	0,37	44,8

Ces chiffres montrent que la décharge se produit en l'absence de conductibilité superficielle : ils justifient donc la conclusion qu'il semble bien exister un potentiel explosif entre électrodes enveloppées.

La diminution graduelle notée plus haut ne paraissait pas se produire ici, ou, du moins, elle avait un effet beaucoup plus faible. Il faut croire que l'influence de l'atmosphère de la salle s'exerçait sur la conductibilité superficielle du verre.

Il reste cependant toujours entre les diverses mesures des écarts notables. Ils ne paraissent pas explicables par les diverses influences qui ont été étudiées, et subsistent malgré tout le soin qu'on a eu de rendre les expériences comparables. Sont-ils dus à un effet particulier du verre, ou bien le retrouverait-on dans d'autres diélectriques ? Il ne serait peut-être pas inutile de le rechercher, car si la même chose s'observait avec d'autres substances isolantes, cela conduirait peut-être à des conclusions concernant le mécanisme intime de la décharge.

Une forme d'éclair remarquable a été observée par le P. Schaffers qui en propose l'interprétation suivante :

Le 20 août 1907, entre 15 et 16 heures, j'observais l'approche d'un grain orageux très limité en étendue, venant de l'ouest. Une particularité remarquable attira mon attention : les éclairs plongeaient verticalement du nuage dans la nappe de grêle et de pluie aux contours nettement déterminés qui en descendait, et s'y résolvaient en ramifications arborescentes dont aucune n'arrivait jusqu'au sol. Cette forme d'éclair ne présente, par elle-même, rien d'extraordinaire : elle est, au contraire, des plus fréquentes. Ce qui me parut digne d'attention dans le phénomène, et même paradoxal, c'est que les décharges électriques semblaient éclater entre la pluie et le nuage même qui l'avait fournie. Le peu d'étendue du grain en largeur et en profondeur et son isolement dans une atmosphère peu chargée de nuages donnaient un relief singulier à cette particularité.

Évidemment, l'apparence devait être trompeuse et due sans doute à un effet de perspective. Si, en effet, l'éclair allait bien du nuage à la pluie qui en tombait, on aurait eu une décharge facilitée par l'augmentation de la distance entre les corps électrisés, en d'autres termes, un accroissement du gradient aurait accompagné l'augmentation de la distance, ce qui est inadmissible. D'ailleurs, dans ce cas, l'éclair se fût produit entre deux corps de même signe, puisque la pluie n'est que le résultat de la coalescence et de la chute des gouttelettes qui constituent le nuage.

Une autre hypothèse eût été possible, si on n'avait pas observé une succession d'éclairs dans les mêmes conditions. On aurait assisté à des décharges entre deux couches de nuages de signes contraires, animées l'une et l'autre d'un mouvement de descente. Alors l'éclair eût pu avoir la forme observée au moment où le nuage inférieur serait arrivé près du sol sous forme de pluie ; mais on aurait dû voir les éclairs successifs participer au mouvement de translation de l'ensemble du système et se rapprocher progressivement du sol. Or, on n'observait rien de semblable.

Reste alors l'explication basée sur une illusion de perspective. Elle est facile à formuler. Dans la théorie des orages actuellement en vogue, les grains à grêle sont constitués par des tourbillons à axe horizontal dans lesquels l'air est entraîné vers le haut à l'avant du tourbillon. Les nuages se formeraient par condensation d'abord sur les poussières, puis sur les ions de l'atmosphère, les ions positifs n'entrant en jeu qu'après épuisement des négatifs. On aurait ainsi sur le pourtour du cylindre circonscrit à l'ensemble du système tourbillonnaire une succession de nuages neutres, négatifs et positifs. Par suite de la translation de la perturbation dans une direction perpendiculaire à son axe, chacun des nuages laisserait derrière lui une traînée oblique de pluie ou de grêle de même signe que lui, au-dessus de laquelle la rotation du tourbillon amènerait dans une succession plus ou moins régulière des nuages de signe opposé. C'est alors que se produiraient les décharges observées. En réalité, elles devraient être dirigées obliquement vers l'avant, mais pour un observateur placé dans le plan d'avancement du météore, elles se projetteraient verticalement sur le ciel. C'était mon cas ; car le grain passa au zénith de mon lieu d'observation. Et ce fut dommage : car autrement j'aurais pu reconnaître sans doute la vraie direction des décharges au moment où je me serais trouvé, en dehors du grain, dans le plan vertical passant par son axe.

J'ai cru utile de faire part à la Société scientifique de l'observation qui précède, non pas à cause de son importance intrinsèque, car elle ne contient rien de bien neuf, mais parce qu'elle apporte un argument d'ordre expérimental à la théorie de Wilson qui est, actuellement, sérieusement remise en question. La condensation successive sur les ions négatifs et positifs semble pouvoir seule expliquer le phénomène décrit dans cette note.

Le P. Wulf expose les observations qu'il a faites, au moyen de son électromètre bifilaire, *sur le rayonnement très pénétrant observé dans l'air ;* l'ensemble des résultats obtenus l'amène à préciser *l'origine de ce rayonnement.*

Déjà en 1785, Coulomb observa qu'un corps chargé d'électricité se déchargeait à l'air, et que cette perte était trop grande pour être expliquée par l'insuffisance de l'isolation. Il conclut de là que l'air lui-même enlevait une partie de la charge électrique. Cette découverte resta malheureusement presque inconnue. Coulomb avait précédé son temps. Dans la physique du siècle passé, il ne se trouvait guère de place pour sa découverte.

En 1850, Matteucci pouvait développer cette découverte, en montrant que dans une petite enceinte close, pour des potentiels suffisamment élevés, la perte de charge n'est pas proportionnelle au potentiel, mais que toujours une certaine quantité d'électricité se décharge, quelle que soit la hauteur du potentiel du champ électrique.

C'est seulement après que M. Arrhenius eut élucidé, en 1887, l'ionisation des électrolytes, que M. Roentgen eut découvert, en 1895, l'ionisation de l'air par les rayons X, et que M. Becquerel eut démontré le même pouvoir d'ioniser l'air pour les minéraux de l'uranium, que le terrain fut suffisamment préparé pour le développement de la découverte de Coulomb. On trouva que l'air ordinaire est toujours ionisé, en quantité fort variable. MM. Elster et Geitel en Allemagne, et indépendamment d'eux M. C. T. R. Wilson en Angleterre, firent ces mêmes observations. D'abord on supposa que l'air s'ionise spontanément, en considérant ce phénomène comme analogue à celui qui a lieu dans les électrolytes, et tout particulièrement, parce qu'on trouva que l'air, dans une enceinte complètement close, reste toujours ionisé à un certain degré.

Entretemps les traces du radium se découvraient presque partout. Après avoir constaté que tous les rayons émis par le radium possèdent le pouvoir ionisateur d'un gaz, et que quelques-uns d'entre eux, en particulier les rayons γ, découverts par M. Villard en 1900, sont en état de traverser un écran métallique épais même de plusieurs centimètres, MM. Elster et Geitel se posèrent la question suivante : L'ionisation de l'air n'est-elle pas également un effet du radium ? Ils parvinrent en 1901 à recueillir de l'air ambiant une quantité considérable de produits de décomposition du radium sur un fil chargé pendant 2 heures à un haut potentiel négatif. Ainsi avait-on trouvé une cause capable de produire constamment de nouveaux ions dans l'air : l'émanation du radium. Or l'émanation du radium se détruit à moitié pendant chaque période de 3,8 jours ; donc elle ne pouvait être la cause de l'ionisation dans une enceinte parfaitement close ; car l'ionisation, abstraction faite de certaines variations, reste constante, c'est-à-dire que de nouveaux ions sont produits sans cesse. Les observations ultérieures montrèrent que les parois de l'enceinte elles-mêmes émettent constamment des rayons, et particulièrement les rayons α, qui ont une activité ionique très forte. Après d'autres, M. Campbell (*), en 1905, en a donné la preuve.

(*) Campbell, JAHRBUCH DER RADIOACTIVITÄT UND ELECTRONIK, 2434, 1906.

Dans la suite, MM. Rutherford et Cooke (*) et en même temps MM. Mc. Lennan et Burton (**) constatèrent que l'ionisation d'une quantité d'air enfermé dans une enceinte diminue beaucoup, si cette dernière est enveloppée d'une couche épaisse de plomb. Dès lors, il était démontré qu'on avait affaire, ici, à une radiation qui, du dehors, pénètre dans les vases métalliques et ionise l'air intérieur.

D'où viennent donc ces rayons γ, pénétrant tout et toujours actifs? Les avis, à ce sujet, étaient aussi partagés que possible. M. Strong (***) démontre en 1908 que ces rayons ont leur point de départ dans l'atmosphère; M. Mc. Lennan (IV) conclut de ses expériences qu'ils proviennent de la terre; M. Mache et M. Rimmer (V) ont l'idée que les produits de décomposition du radium contenus dans l'atmosphère sont attirés par le champ électrique à la surface de la terre, d'où ils émettent les rayons γ; enfin M. Arrhenius et ses disciples (VI) affirment que ces rayons viennent de l'univers, probablement du Soleil.

Dans les recherches à exposer ici, je ne me base pas sur une hypothèse déterminée, mais j'ai tâché simplement de trouver par voie d'expérience l'origine des rayons, quelle que soit celle de ces hypothèses qui pût se confirmer.

Les instruments employés sont décrits, ici même, dans un mémoire détaillé (VII). La plupart du temps on usait de deux, parfois même de trois appareils simultanément. On pouvait ainsi distinguer tout de suite des oscillations réelles temporaires du rayonnement, les dérangements quelconques d'un appareil, les erreurs de lecture, etc. En cas d'expériences sur l'influence de l'endroit, on faisait épreuve et contre-épreuve en même temps. De cette manière, par contre, les oscillations temporaires étaient éliminées.

Au cours des expériences il eût été à souhaiter de pouvoir

(*) Rutherford and Cooke, Phys. Rev., 16, 183, 1903.

(**) Mc. Lennan and Burton, Phys. Rev., 16, 184, 1903.

(***) Strong, Physikalische Zeitschrift, 9, 117, 1908.

(IV) Mc. Lennan, Physik. Zeitschrift, 9, 440, 1908.

(V) Mache und Rimmer, Phys. Zeitschrift, 7, 617, 1906.

(VI) Richardson, Nature, 73, 607, 1906.

(VII) Voir 2de partie des Annales, pp. 1-87.

enfoncer simplement sous eau un appareil. A cette fin on le mit dans une caisse solide de fer galvanisé, soudée complètement. Pour donner passage à la lumière, on y avait mastiqué deux petites fenêtres, protégées en outre au-dessous de l'eau par un volet. Dans la paroi supérieure le mécanisme de charge tournait dans un tuyau poli graissé. S'il était mis hors d'usage, il était également rendu étanche au moyen d'un chapeau vissé par dessus. Par conséquent, l'air ne pouvait pas se renouveler dans l'espace ambiant. Cet appareil m'a rendu maints services signalés.

Pendant ces expériences j'ai eu le bonheur de jouir de l'appui le plus prévenant de la part de tous. Tout d'abord mes meilleurs remercîments aux RR. PP. Bénédictins de Maria-Laach. Grâce à leur obligeance, j'ai pu opérer en toute liberté sur le lac. En particulier, en Belgique, j'ai rencontré le plus vif intérêt et l'accueil le plus affable. Je veux surtout exprimer ma reconnaissance à M. de Pierpont, le propriétaire des magnifiques grottes de Han. Merci aussi à MM. les Directeurs de mines Evrard à Charleroi, Lambiotte à Auvelais et à leurs aimables ingénieurs MM. André et De Vogel. En Hollande enfin, notre voisin, M. l'architecte Joosten, m'a rendu possibles plusieurs recherches du plus grand intérêt.

Les questions que j'ai examinées successivement sont les suivantes :

1. Quelle est la production ionique, à l'intérieur d'un vase fermé, causée par les rayons qui pénètrent du dehors, par opposition aux effets provenant, d'une part, de l'isolation défectueuse et, d'autre part, des rayons qui proviennent des parois du vase ?

A cette question se rapporte tout d'abord l'observation mentionnée déjà plus d'une fois, que les murs des maisons eux-mêmes émettent des rayons γ. Selon une communication précédente (*), cet accroissement dans l'intérieur de notre collège, construit en briques, s'élève à 24 % ou 5,6 ions par seconde. Et ce phénomène, je l'ai constaté considérablement plus fort encore dans l'abbaye de Sainte-Marie-au-Lac, près de Andernach sur le Rhin, où j'ai passé quelques jours pour y observer le rayonnement sur le lac. Dans une aile, construite en tuf volcanique il y a environ 50 ans, le

---

(*) Th. Wulf, *L'Électromètre bifilaire et ses applications*, cf. 2de partie des ANNALES, pp. 1-87.

rayonnement alla de 20,4 en dehors (9 heures d'observation) jusque 34,1 à l'intérieur (26 heures d'observation), cela fait 13,7 ions par seconde. Un échantillon de cette pierre se trouva aussi, d'après une expérience que M. le Prof. Gockel a eu la bonté de faire, considérablement plus radiant que les basaltes ne le sont d'ordinaire.

Dans l'ancien château hollandais de Wijnandsrade seul, construit en briques il y a 200 ans, je n'ai pas rencontré une influence des murs.

Le tableau I donne l'excédent du rayonnement dans diverses maisons sur le rayonnement au dehors.

Il s'ensuit donc la nécessité de faire toutes les observations en plein air, ou d'établir au moins l'influence des parois, afin que les résultats des différents savants soient comparables entre eux.

TABLEAU I

Rayonnement des murs de bâtiments

ENDROIT	MATIÈRE	AGE	RAYONNEMENT : IONS PAR CM³ ET PAR SECONDE
Abbaye de Maria-Laach, près de Andernach sur Rhin	tuf vulcanien	50 ans	13,7
Fauquemont, Collège (Limbourg hollandais)	briques	15 ans	5,7
Louvain, Collège (Belgique).	briques	30 ans	8,0
Namur, Collège N.-D. de la Paix (Belgique)	briques	100 ans	3,7
Wijnandsrade, Château (Hollande) . . .	briques	200 ans	0,0

Pour trouver le nombre d'ions produits par les rayonnements extérieurs, il faut empêcher les autres autant que possible. La différence montre alors avec sûreté quel effet a été causé du dehors.

Déjà antérieurement, j'avais trouvé dans les grottes crayeuses, situées à proximité de Fauquemont-Maestricht et en partie aussi dans le Limbourg belge, une diminution considérable du rayonnement total. D'où il ressort que 42 % au moins sont le produit du rayonnement extérieur. La question était donc, avant tout, de savoir si les rayons γ se manifestaient également dans les grottes.

Si cela a lieu, le rayonnement est encore plus grand et, au moyen de parois en plomb, par exemple, on peut le diminuer davantage. Après avoir fait quelques essais avec le compteur ionique d'Ebert, et trouvé en moyenne une production ionique 12 fois plus forte qu'en plein air, on devait conclure que l'atmosphère des grottes contenait une quantité d'émanation assez forte.

Les essais pour prouver la présence de ce gaz par activation d'un fil (*) restèrent d'abord vains, à cause de la grande humidité de l'intérieur. Enfin on réussit, grâce à l'effet merveilleux produit par les crochets de Gockel, à maintenir chargé à 500 volts pendant 3 heures, un fil de cuivre au moyen de la batterie à eau de Herweg. L'électromètre servant aux observations se trouvait dans une maison amie, à la sortie de la grotte. Rapidement mis dans l'électromètre, le fil montra une activité si grande, que les deux fils de l'électromètre s'étaient déjà rejoints, avant qu'on pût lire leur position. En suite l'électromètre fut porté à une haute charge, jusqu'à ce que les fils disparurent du champ visuel et, d'après le tic-tac d'une horloge, on mesura le temps pendant lequel un fil parcourait 10 graduations de l'échelle. L'activité s'éteignit rapidement et, 4 heures après, plus rien ne se faisait remarquer. Pour comparaison, le même fil fut chargé à la même hauteur, hors des grottes, et soumis à une épreuve dans le même instrument. Malgré la brève exposition de 3 heures, l'activité pouvait être poursuivie maintenant 30 heures durant et, à côté du radium, une induction du thorium bien sensible se manifesta aussi. L'ionisation initiale s'éleva à 26 % de thorium. Dans les grottes, une courbe de radium tout à fait identique à celle que M. et M^{me} Curie ont donnée du radium pur s'était laissée apercevoir, de manière que la quantité de radium, qui s'était accumulée sur le fil dans les grottes, était précisément 150 fois plus grande

---

(*) Voir les détails de ces recherches dans le mémoire cité.

qu'en dehors. J'ai cherché, à différentes reprises, mais sans aucun succès, à trouver dans l'atmosphère des grottes, une émanation ou bien une induction de thorium.

De la grande production d'émanation, on devait conclure que des rayons γ provenaient aussi de l'atmosphère des grottes, et que le rayonnement total se laissait réduire encore beaucoup plus. A un endroit des grottes, se trouve une flaque d'eau assez étendue. Venait-on à enfoncer l'appareil dans l'eau, la paroi supérieure supportait une couche d'eau épaisse d'environ 50 cm : il se montrait, en effet, une diminution ultérieure du rayonnement de 2 volts à l'heure, ou bien de 3 à 4 ions à la seconde. D'où, en moyenne, 46 °/₀ du rayonnement, ou 10 ions à la seconde, sont produits uniquement par le rayonnement pénétrant extérieur.

J'ai répété ces expériences en me servant de différents moyens et surtout de pierres absorbantes, en Allemagne dans l'eau du lac de Maria-Laach, en Belgique dans les fameuses grottes de Han-sur-Lesse, dans l'eau de la Meuse à Namur et dans les houillères de Charleroi et d'Auvelais. Mais jamais je n'ai trouvé de diminution du rayonnement plus considérable que de 10 ions à la seconde au cm^3 ; mais quelquefois dans la grotte de Han il atteignait presque 10 ions. De façon qu'on peut conclure que 10 ions à la seconde constituent le plus grand effet que produisent les rayons γ dans cette contrée. Le tableau II donne le montant d'absorption que j'ai trouvé dans les diverses expériences. La première colonne donne l'épaisseur des couches absorbantes et la dernière les différences en ions, c'est-à-dire la diminution de la radiation dans les mines, contre les valeurs observées immédiatement avant et après en dehors. Les valeurs sont les moyennes et, pour permettre une estimation du poids des diverses valeurs, on a ajouté dans la seconde colonne le temps des observations employées pour tirer ces moyens.

Il va de soi que la diminution dans une mine est plus petite, ou peut-être même nulle, ou au contraire le rayonnement plus grand, quand les roches émettent elles-mêmes des rayons γ. Et il semble que les schistes dans les mines de Belgique, comme l'eau de la Meuse, contiennent de faibles quantités de radium.

TABLEAU II

Absorption du rayonnement pénétrant

ENDROIT	MATIÈRE	MÈTRES	HEURES	Différence des ions
Fauquemont, Hollande .	eau en grottes de craie tufacée.	20	12	10
	eau en bassin bâti	1/2	26	8,0
Maria-Laach, Prov. rhén.	eau du lac de Laach	jusqu'à 12	15	7,3
Han-sur-Lesse, Belgique .	grotte de pierre calcaire salle : *La Mystérieuse* . . .	100	3	9,5
Charleroi, Belgique . .	mine de houille	983	1	2,2
Auvelais, Belgique . . .	mine de houille	200	2	0,7
Fleurus, Belgique . . .	mine de baryte	20	1	5,1
Namur, Belgique . . .	eau de la Meuse	2	3	6,5

D'un grand intérêt au point de vue géologique est l'observation faite à Fleurus, en Belgique, dans une mine de barytine. On sait que, quand le sulfate de baryum se précipite, il prend le radium en grande partie avec lui. Comme on n'a pas trouvé un rayonnement dans la mine de barytine, il s'ensuit que ce baryte s'est précipité d'une solution extrêmement pauvre en radium.

2. Ce rayonnement vient-il de l'atmosphère ou du sol ?

Ensuite de la grande propagation des substances radioactives, il est invraisemblable *à priori* que tous les rayons actuels viennent d'une source déterminée. Puisque l'air aussi bien que le sol, contiennent l'émanation du radium, ses produits de décomposition émettront aussi des rayons γ, dans les couches inférieures de l'atmosphère. La question doit donc être comprise, tout d'abord, de la manière suivante : Quelle est la source d'où proviennent en majeure partie ces rayons ? Les opinions à ce sujet, comme je l'ai déjà dit, divergent beaucoup. Mes expériences indiquent toutes la terre, comme source principale des rayons γ. *Les preuves nombreuses reposent sur le fait que, même les moindres changements de lieu (1 à 3 m.) emportent avec eux parfois des différences considérables de rayonnement.*

Déjà M. Mc. Lennan (*) avait trouvé que le rayonnement, sur la glace du lac Ontario, diminuait de 13,2 jusqu'à 8,6 ions au cm. et à la seconde. J'ai trouvé une diminution pour ainsi dire égale, sur le lac de Maria-Laach, dans une cabine de bain éloignée seulement de 40 m. du bord. Au milieu du lac, à une distance d'environ 1 km. du bord, le rayonnement n'était plus sensiblement moindre que dans la cabine de bain. Et après que l'appareil eut été plongé au fond, à une profondeur atteignant environ 12 m., la diminution entre surface et profondeur était également moins appréciable.

Il semblait donc qu'une couche d'eau beaucoup moins étendue affaiblirait sensiblement le rayonnement. Je le pouvais constater d'abord sur un étang de Wijnandsrade, à une lieue de Fauquemont. L'appareil était placé sur un petit radeau, à une distance de 10 m. du bord. Ensuite je fis la même constatation sur un étang encore plus petit, dans notre jardin, où les bords n'étaient éloignés que de 3 m. Et puis encore, une autre fois, dans un réservoir d'eau maçonné, d'une section de 1 m^2 et d'une profondeur de 2 m. ; et même sur un sentier passant sur un petit ruisseau d'une largeur de 70 cm. et d'une profondeur de 25 cm. Dans tous ces cas, la diminution du rayonnement était nettement perceptible, comme le tableau III le met en évidence.

Donc de ces observations, faites en différents endroits, il ressort clairement que la plus grande partie du rayonnement provient du sol. Durant les observations faites sur l'étang à Fauquemont régnait, un jour, un vent violent, qui certainement ne souffrait pas de diversité dans la composition de l'air sur le petit étang et sur le sol. Des preuves plus amples à l'appui de cette affirmation résident dans les observations suivantes, qui portent plus loin.

(*) Mc. Lennan, PHYSIK. ZEITSCHRIFT, 9, 440, 1908.

TABLEAU III

Diminution du rayonnement γ sur l'eau

Numéro	Endroit d'observation	Distance du bord mètres	Durée totale heures	Différence des ions cm³ secondes
1	Lac de Laach (Prov. rhénane)	40	24	4,9
2	Wijnandsrade (Hollande), appareil I	10	43	3,1
3	Wijnandsrade (Hollande), appareil II	10	36	3,3
4	Fauquemont (Hollande), étang, appareil I . . .	3	64	3,3
5	Fauquemont (Hollande), étang, appareil II . . .	3	90	3,8
6	Au-dessus d'un bassin d'eau 1 × 0,9 × 2m. . .	1/3	7	3,2
7	Dans le bassin d'eau, nageant	1/3	36	7,5
8	Sur une passerelle de fossé, 70 cm. de large, 25 cm. de profondeur	1/4	5	1,2

3. Comme le rayonnement sort de la terre, il reste à savoir s'il provient des inductions du radium accumulées à la surface de la terre (en conséquence de sa charge négative), ou bien de l'intérieur de la terre ?

Cette question pouvait être résolue facilement. Sur une prairie, une pièce de gazon fut enlevée avec la terre et, au milieu de cette place libre, on pratiqua un trou d'environ 70 cm. de profondeur, dans lequel fut enfoncé l'appareil, recouvert de 20 cm. de terre. Le rayonnement de la surface ne pouvait donc plus atteindre l'appareil, si ce n'est à travers cette couche de terre de 20 cm. Donc, s'il était la cause principale, le rayonnement devait maintenant beaucoup *diminuer* et, au contraire, *augmenter* sensiblement, si le rayonnement provenait de l'intérieur de la terre.

Il arriva, ce que l'on avait prévu, *un accroissement du rayonnement extérieur* de 23,9 à 30,1, ou une *augmentation de 6,2 ions à la seconde*. Le tableau IV contient les résultats d'un jour d'observation en particulier.

TABLEAU IV

Augmentation du rayonnement à l'intérieur de la terre

TEMPS	Perte d'ions par seconde sur le sol	Perte d'ions par seconde dans le sol
de 9 à 10 h. av. m.	25,3	—
de 10 h. av. m. à 1 h. apr. m.	—	30,8
de 1 à 3 h. apr. m.	22,9	—
de 3 à 5 h. apr. m.	—	29,3
de 5 à 6 h. apr. m.	23,5	—
de 6 à 8 h. apr. m.	—	30,2
de 8 à 9 h. apr. m.	23,8	—
Valeur moyenne . . .	23,9	30,1

Donc le rayonnement provient, selon son effet principal, de l'intérieur de la terre ; d'ailleurs, à cause de l'absorption, le point de départ des rayons γ ne peut être situé qu'à 1 m. peut-être en dessous de la surface de la terre.

Cette conclusion pouvait être encore confirmée par quelques autres phénomènes. La craie de l'endroit se montra, après recherche dans les grottes, d'une inactivité extraordinaire, résultat confirmé aussi par M. Prof. Gockel, à qui je fis parvenir un échantillon de la pierre. Si donc le sol est le point de départ des rayons γ, dans ce cas le rayonnement devait être plus faible aux endroits où la craie sort du sol que, par exemple, à la surface du champ de labour. Mais si le rayonnement part de la surface de la terre, devenue radioactive par l'émanation de l'atmosphère, la pierre souterraine ne peut produire d'influence.

Par hasard, il se trouva une place convenable où un bloc d'environ 2 m. de long sur 1,5 de large émergeait de la prairie. Le rayonnement sur le bloc crayeux était de 15,6 ions, tandis que 5 m.

plus loin, sur une colline de terre de formation semblable, et couverte de gazon, le rayonnement monta à 19,4 ions, soit une différence de 3,8 ions à la seconde.

On voit facilement ici que les résultats peuvent être soumis à un examen bien étendu. On sait que la quantité de radium, que les différentes espèces de pierre contiennent, est très variable. Donc le rayonnement pénétrant devrait être proportionnel à la quantité de radium (ou bien de thorium) contenue dans les pierres. Si cela est constaté en général, alors on a un moyen très simple et rapide pour apprécier la quantité de radium que contiennent des matériaux non connus. Une contre-épreuve serait enfin à essayer en ballon. Si les rayons partent du sol, ils doivent devenir d'autant plus faibles que l'on s'éloigne de la surface de la terre. De l'absorption, que les différents rayons éprouvent dans les différentes substances, on peut conclure que les rayons γ seraient réduits de moitié par une couche d'air d'environ 80 m. Dès lors, à une hauteur de 700 m., dans laquelle le ballon pourrait facilement se maintenir quelques heures, il ne resterait plus que 1 % du rayonnement à la surface de la terre.

4. Les materiaux du point de départ (radium et thorium) gisent-ils dans les couches supérieures de la terre, ou bien sont-ils des produits de décomposition d'une émanation qui provient de couches plus profondes ?

Les produits de décomposition du thorium ne peuvent pas, à cause de la brièveté de l'existence de son émanation, tirer leur origine de grandes profondeurs. Où l'émanation du thorium se trouve dans l'air en quantité appréciable, là son point d'origine est situé dans les couches supérieures du sol. Pour le radium l'autre cas serait aussi possible : l'émanation viendrait de plus grandes profondeurs, soit par diffusion, soit par la respiration continuelle du sol. Cette question peut naturellement moins encore que les précédentes, être résolue en général par une expérience. Il ne s'agit ici que d'un essai.

Grâce à la bonté de M. l'architecte Joosten, je pus utiliser, dans sa fabrique à pierre de ciment, deux grands cylindres en béton d'une hauteur de 1 m. et d'un diamètre de 90 cm. Après qu'un essai préalable eut montré que les parois épaisses de 10 cm. ne rayonnaient pas, mais absorbaient même une partie du rayonnement ordinaire, *je fis remplir un des cylindres de ces matériaux du sol qui s'étaient montrés doués d'émission de rayons* γ. Seul au centre resta un petit espace libre, destiné à recevoir l'appareil. Grâce aux parois épaisses en ciment et à sa situation à l'air libre, cette motte de terre était soustraite à la respiration du sol.

Si donc le rayonnement γ, *dans le sol, tirait son origine des produits de décomposition d'une émanation immigrée là, alors elle devait s'éteindre lentement. Mais si, au contraire, la substance primitivement radioactive était située dans cette couche supérieure de la terre, le rayonnement devait continuer.*

Pour contrôler, on observa toujours dans le second cylindre vide, 1 à 2 heures durant, avant et après chaque essai avec les matériaux du sol.

Quand l'appareil était enterré dans le sol même, la différence montait à 7,8 ions à la seconde.

Le premier et surtout le deuxième jour après le remplissage du cylindre, il se manifestait un rayonnement sensiblement plus faible, et je croyais déjà avoir affaire à l'émanation qui se décompose. Mais le troisième jour le rayonnement commençait à augmenter, et le quatrième jour il atteignait presque le montant qui s'était montré dans le sol même. Après cela, on continua l'observation ; mais la stabilité espérée ne se produisit pas. Le rayonnement monta et descendit continuellement. La valeur la plus haute (7,9) était plus que le double de la plus basse (2,9). Les observations furent continuées (avec quelques interruptions) pendant 41 jours, sans qu'on puisse remarquer une diminution du rayonnement.

La question posée était donc résolue. Il ne s'agissait pas ici d'une émanation immigrée. La substance radioactive se trouvait au moins pour la plus grande partie dans le cylindre. Elle était donc originaire de la couche supérieure de la terre d'une profondeur de moins d'un mètre. Les chiffres suivants sont les différences observées qui doivent être considérées comme rayonnement de la masse terrestre elle-même. On a fait la plupart du temps deux observations par jour dans le cylindre rempli et trois, pour contrôle, dans le cylindre vide.

Ainsi l'influence éventuelle de l'air, de la surface de la terre et en particulier des précipités fut écartée. L'excès ne pouvait provenir que des matériaux eux-mêmes.

TABLEAU V

jours	1	2	3	4	5	6	8
rayonnement	6,6	6,1	5,4	6,8	7,1	6,8	5,3
	6,3	3,6	5,6	7,6	7,1	7,1	4,3

jours	9	10	11	12	13	15	16
rayonnement	4,3	5,1	2,0	3,9	5,1	5,8	6,1
	4,6	5,8	3,9	4,6	4,6	6,1	5,6

jours	17	29	34	39	40	41
rayonnement	6,3	5,4	5,6	6,5	4,1	6,5
	—	5,8	6,1	4,9	4,4	4,6

5. D'où viennent donc ces changements du rayonnement causé par les matériaux enfermés dans le cylindre ?

Après examen plus attentif, on fut bientôt frappé de voir que les rayonnements les plus intenses se faisaient remarquer par des temps de pluie. On pourrait supposer que ce sont les produits radioactifs de la pluie elle-même qui effectuent cet accroissement du rayonnement. Mais, comme je l'ai déjà dit, la disposition de l'expérience exclut cette supposition. Les cylindres étaient placés, ouverts, l'un à côté de l'autre. Par les produits, contenus dans les gouttes d'eau, les *deux valeurs* seraient montées, et les *différences* seraient restées invariables. Aussi les pressions atmosphériques indiquées par les communications officielles de l'Institut météorologique hollandais de de Bilt furent comparées avec les valeurs du rayonnement ; en réunissant à une valeur moyenne les rayonnements entre 770-765, 764-760 mm. de pression atmosphérique, etc., on obtint les données du tableau VI.

Après avoir donc éliminé toute influence de l'air et de la pluie par la méthode d'observation, *une influence de la pression atmosphérique se manifesta bien nettement. Plus la pression atmosphérique descendait, plus grand était le rayonnement*. Nous avons donc ici ce cas remarquable : *le rayonnement γ d'une matière déterminée,* qui s'est montré jusqu'ici absolument indépendant de toute influence physique ou chimique, *dépend de la pression atmosphérique.* L'explication est très simple. Si la pression atmosphérique s'élève, l'air plus riche en émanation est refoulée à l'intérieur, les rayons γ provenant des produits de décomposition (en particulier du radium C) sont absorbés par les masses terrestres elles-mêmes à plus haut degré, et le rayonnement devient plus faible.

TABLEAU VI

Relation entre le rayonnement du sol et la pression atmosphérique

Pression atmosphérique en mm.	770-765	764-760	759-755	754-750
Rayonnement	4,6	5,0	5,5	5,65
Nombre des observations	9	15	8	3

On comprend l'importance de cette observation pour l'explication des oscillations du rayonnement γ dans l'atmosphère décrit dans mon mémoire cité (ANNALES, 2^{e} partie, pp. 46 et suiv.). Bien qu'ici le mouvement complet de l'air ait lieu dans une couche de terre d'un peu moins de 1,2 m., cependant l'oscillation du rayonnement γ, provoquée par lui, arrive à une hauteur qui est du même ordre que celle observée dans l'atmosphère. *Il résulte de là, directement, que le rayonnement provenant de la terre indique des oscillations en rapport avec la pression atmosphérique, et que les oscillations de la pression atmosphérique* (et de la température) *suffisent pour expliquer les oscillations du rayonnement* γ *observées de fait.*

On pourrait aborder aussi directement cette question au point de vue de l'origine des oscillations du rayonnement γ. Pour le moment il m'est impossible d'entreprendre en personne cette recherche ; d'autres physiciens peut-être se trouveront dans cette heureuse condition. Il n'y aurait qu'à faire des expériences sur des superficies étendues d'eau, de glace ou de glacier, à constater si le rayonnement γ garde ses oscillations périodiques ou non. Si la période journalière est causée par le sol, elle doit, sur de grandes superficies d'eau, disparaître presque complètement. Vient-elle de l'air, alors elle doit perdurer. J'ai fait des essais analogues, mais les circonstances n'étaient pas favorables. Qu'on songe que la période quotidienne constitue une faible variation de l'effet déjà faible par soi-même. Mais ici il s'agit d'un changement quelconque de cette période journalière.

Les essais faits sur le petit étang de Fauquemont (à une distance d'environ 3 m. du bord) donnèrent les valeurs suivantes, qui sont une moyenne tirée de deux fois six jours. Le tableau montre en même temps la différence de rayonnement sur l'étang et à une distance d'environ 3 m. du bord.

TABLEAU VII

TEMPS	RAYONNEMENT SUR TERRE	RAYONNEMENT SUR EAU
de 7 à 8 h. av. m.	13,0	10,8
de 8 à 9 h. av. m.	13,4	11,0
de 9 à 10 h. av. m.	13,5	11,2
de 10 à 11 h. av. m.	13,2	10,8
de 11 h. av. m. à 12 h.	13,1	10,5
de 12 h. à 1 h. apr. m.	13,2	10,5
de 1 à 2 h. apr. m.	13,3	10,6
de 2 à 3 h. apr. m.	13,3	10,5
de 3 à 4 h. apr. m.	13,1	10,5
de 4 à 5 h apr. m.	13,0	10,5
de 5 à 6 h. apr. m.	12,9	10,5
Moyenne.	13,2	10,6

Valeurs extrêmes sur terre 13,5 — 12,9 = 0,6
Valeurs extrêmes sur eau 11,2 — 10,5 = 0,7.

Les différences sont trop petites pour qu'on puisse avancer une affirmation définitive. Si l'on veut se fier aux chiffres, on doit dire, puisque l'amplitude n'est pas plus petite sur l'eau (elle est même un peu plus grande), qu'il semble bien que la période vient de l'air. Toutefois les observations devraient être établies sur une plus grande superficie d'eau.

6. Du moins, n'est-il pas prouvable qu'une partie du rayonnement γ observé dans les couches inférieures de l'atmosphère provient de l'air lui-même ?

Si l'on tient compte que l'air des grottes, beaucoup plus riche en émanation, envoie cependant un rayonnement γ si faible, on arrive, à cause de la quantité d'émanation de l'air extérieur à peu près 100 fois plus faible encore, à des valeurs incommensurablement petites. Néanmoins, comme dans la littérature on trouve encore l'opinion que les rayons γ viennent de l'atmosphère, quelques essais furent entrepris pour démontrer une influence directe, des rayons de l'air. L'appareil fut enterré dans le sol et, au-dessus, couvert d'un tonneau d'eau. Quand le tonneau était vide, les rayons pouvaient pénétrer de l'air dans l'intérieur de l'électromètre ; ils étaient pour la plus grande partie absorbés quand le tonneau était rempli. Voici les résultats :

Avec rayonnement d'en haut	19,4	19,2	20,2	en moyenne	19,6 volts
Sans rayonnement d'en haut	19,0	19,6	19,6		19,4 volts

On trouve réellement une faible diminution de 0,2 volt-heure, cependant l'effet confine, ici aussi, aux limites de ce que l'on peut observer avec précision.

Une autre série d'expériences fut tentée dans le bassin d'eau muré à parois perpendiculaires. Une fois l'appareil fut enfoncé de façon que la paroi supérieure seule restât libre d'eau. Les rayons de l'air pouvaient de la sorte entrer. Une autre fois la paroi supérieure était environ 1 m. sous eau, et les rayons d'en haut devaient être presque complètement absorbés, s'ils existaient. Les valeurs moyennes de 15 heures d'observation ne montraient qu'une différence de 0,3 volt par heure, valeur également trop petite pour qu'on puisse affirmer sa réalité.

On peut résumer le contenu de ce travail de la manière suivante :

1. On traite des expériences qui prouvent que là où a lieu l'observation, le rayonnement pénétrant est causé par les substances radioactives qui gisent dans les couches de la terre supérieures à environ 1 m. sous la surface.

2. La partie du rayonnement qui prend son origine dans l'atmosphère est si petite qu'il est impossible de la constater avec les moyens usités.

3. Les oscillations dans le rayonnement γ peuvent être expliquées par le déplacement des masses d'air plus riches en émanation contenues dans l'intérieur de la terre aux endroits plus ou moins profonds.

Troisième section

Séance extraordinaire du jeudi 24 juin. — Conformément à un vœu émis au cours de la session de Pâques, les membres de la Section ont visité les installations des charbonnages de la Société civile du Bois-du-Luc, dont la direction ne leur a pas seulement fait les honneurs avec un empressement et une affabilité auxquels on ne saurait assez rendre hommage, mais leur a réservé un accueil des plus sympathiques, et dont le souvenir restera.

Après avoir vu fonctionner, dans le courant de la matinée, les divers services du charbonnage, où les œuvres sociales ont fixé l'attention toujours en éveil des dirigeants, on est descendu dans les travaux souterrains du puits d'extraction St-Emmanuel.

L'après-midi, les membres se sont rendus à la batterie de fours à coke à récupération de sous-produits (sulfate d'ammoniaque et huiles légères), et à l'usine où ceux-ci sont traités.

Toutes les manipulations, qu'il s'agisse de ces usines ou du charbonnage, se font d'après les méthodes les plus modernes. C'est dire que le rôle réservé à l'électricité est considérable.

Séance extraordinaire du mercredi 27 octobre. — Grâce à une bienveillante autorisation du Ministre des Colonies, les membres de la Section sont allés visiter, sous la direction de leur président, M. É. De Wildeman, le « Jardin d'acclimatation » ou mieux les nouvelles serres coloniales de Laeken. Ce jardin permet d'atteindre un double but : initier nos futurs agents en Afrique à la connaissance de la flore congolaise, et les mettre à même de nous fixer avec plus de soin, dans la suite, sur sa richesse et sa répartition ; et d'autre part faciliter à un personnel choisi l'étude minutieuse des meilleures espèces tropicales (caoutchoutiers, vanilliers, caféiers, cacaotiers, etc.), à introduire ou à propager au Congo belge.

Séance du jeudi 28 octobre. — En l'absence de M. É. De Wildeman, président de la Section, empêché, M. Renier paie un légitime tribut d'hommages à la mémoire de M. le chanoine Swolfs. Maintes fois il fut appelé à faire partie du bureau de la Section, comme président ou vice-président, et il n'a cessé d'apporter à nos travaux le concours le plus dévoué et le plus assidu. Nul plus que lui peut-être n'apprécia l'utilité de nos séances, où il se faisait un plaisir de cueillir des notes et de prendre des informations. Puisse l'exemple de ce modeste, mais précieux collaborateur, faire lever la bonne semence et stimuler de nouvelles énergies !

Sur les rapports favorables du R. P. Longin Navas, S. J., et de M. A. Proost, le mémoire de M. F. Meunier : *Contribution à la faune des diptères du copal récent de Zanzibar, de Madagascar et d'Accra*, sera publié aux ANNALES.

M. Maes présente *a)* une *carte manuscrite du Congo belge*. Elle est envoyée à l'examen de MM. Kaisin et Van Ortroy ; *b)* en collaboration avec le commandant Hutereau, des *notes sur les coutumes de la vie familiale et juridique des Batetela*. Ces notes feront l'objet d'un rapport du R. P. Van den Gheyn, et de M. E. De Jonghe.

Quelques caractères lithologiques du marbre noir de Dinant font l'objet d'une communication de M. Kaisin.

M. le Dr H. Lebrun présente un *nouveau microscope* pour l'examen des préparations microscopiques disposées en séries continues sur des disques, d'après la méthode qu'il a fait connaître il y a deux ans.

Le nouvel instrument réalise, sur les instruments actuellement en usage, les avantages suivants : il permet de suivre sans interruption, toutes les coupes microtomiques faites à travers un objet, un organe, un embryon, sans changer la préparation, en passant simplement d'une coupe à l'autre.

L'examen de grandes séries continues est donc singulièrement facilité et accéléré.

Cette succession sous l'objectif de l'observateur peut être obtenue de la même façon sur l'écran, avec un objectif pour projections lumineuses. Un professeur d'embryologie, par exemple, peut, au moyen d'une seule préparation discoïdale, faire la démonstration de tous les organes d'un embryon.

La nouvelle table présente en outre l'avantage d'être beaucoup plus précise pour le repérage des objets microscopiques.

Alors que, dans le système actuellement en usage, l'appareil fournit pour une surface de 15 mm. de côté, un nombre de 22 500 points mathématiques repérables, la nouvelle table en fournit 322 000.

Le maniement en est aussi beaucoup plus aisé. Alors que les autres instruments déplacent l'objet à examiner suivant une succession d'angles droits, le nouvel instrument le déplace suivant un arc de cercle beaucoup plus court.

Il est, au surplus, construit de façon à pouvoir servir indifféremment pour des préparations rectangulaires ou circulaires.

M. le baron L. Greindl, empêché, fait parvenir un *aperçu sur le jeu d'une faille normale.*

Un hasard heureux lui a fait trouver récemment un échantillon, qui indique de façon très précise la manière dont a joué une faille normale dans le calcaire carbonifère du bassin de Dinant. Il s'agit d'un banc épais de calcite largement cristallisée, terminée par des faces planes striées, connues sous le nom de *miroirs de failles ;* outre les surfaces de contact avec les lèvres de la faille polies et striées, le banc comportait trois joints parallèles parfaitement plans ; sous le choc du marteau, l'échantillon s'est séparé avec la plus grande aisance suivant ces joints, et on a constaté avec surprise que c'étaient également des miroirs de failles.

Il semble que l'interprétation de ce fait implique les conséquences suivantes :

1° L'ouverture de la cassure, de 50 centimètres environ, s'est produite au moins en quatre fois et à des intervalles de temps suffisamment espacés pour permettre chaque fois le remplissage par de la calcite.

2° Le mouvement a chaque fois débuté par un déplacement relatif des lèvres, qui a provoqué le miroir. Cette friction n'était pas importante, car elle aurait broyé les cristaux, tandis que ceux-ci se montrent simplement froissés à la surface du joint.

3° Les compartiments, après avoir joué avec frottement réciproque, se sont ouverts de quelques centimètres, en une ou plusieurs fois, et leurs parois se sont tapissées de calcite.

Il est à noter que les surfaces de dépôt de la calcite sont planes ; or, la circulation des eaux dans le calcaire carbonifère y élargit ordinairement les diaclases de façon irrégulière. C'est pourquoi l'on croit pouvoir attribuer à une action dynamique l'ouverture du joint ; d'autre part, il est logique que celui-ci ait rejoué suivant la surface de contact de la calcite cristallisée de remplissage et de la roche en place, car c'est une surface de moindre résistance.

Le banc, qui présentait ces particularités, se trouvait dans un monceau de déchets de carrière et sa situation n'a pu être précisée ; mais, sur une large étendue, derrière la station d'Yvoir, la stratification est redressée jusqu'à la verticale ; il est donc probable que la faille s'est produite au début suivant un joint de stratification. Néanmoins on ne peut la considérer comme inverse, puisqu'il s'est produit une ouverture des lèvres.

M. A. Renier développe, en présentant les échantillons qui s'y rapportent, sa note *sur les premières découvertes de végétaux à structure conservée dans le terrain houiller belge.*

Les débris de végétaux se trouvent fossilifiés dans les couches sédimentaires sous des états très variables. Ainsi en est-il pour les restes de plantes que l'on rencontre dans les roches de notre terrain houiller.

Le plus fréquemment, ces restes de plantes ont été houillifiés. La substance organique a été transformée en charbon brillant. C'est le cas des végétaux conservés en « empreintes » dans les schistes et les grès. L'étude à la loupe de l'ornementation des deux faces d'une même lamelle de houille fournit d'intéressantes indications. En traitant les tissus houillifiés par des oxydants énergiques, il est possible d'y faire apparaître des restes de structure. Mais les renseignements ainsi obtenus sont malgré tout très incomplets et très imparfaits, car avant d'être enfouis dans l'argile plus ou moins sableuse, mère du schiste, les végétaux ont subi une putréfaction très profonde. L'étude des troncs permet de saisir aisément ce phénomène de façon très nette. Ces troncs présentent une série d'assises concentriques houillifiées, de faible épaisseur, séparées par d'importants anneaux schisteux de boues sédimentaires contenant mille débris d'organes aériens. Dans ces anneaux, à travers lesquels on peut suivre dans certains cas le trajet des cordons vasculaires, la substance organique détruite a été remplacée sans heurts par des boues.

Pour en arriver à la connaissance approfondie des végétaux houillers, il fallait posséder des échantillons plus parfaits. Semblables échantillons ont été recueillis dans nombre de gîtes étrangers. Les plantes ont dans ce cas été fixées par un minéralisateur : calcaire, dolomie, sidérose, quartz, pyrite, etc. Le ou les minéralisateurs se sont insinués dans la masse en en comblant tous les vides. Ils ne se sont nullement substitués à la substance organique, ainsi qu'on l'a dit trop souvent. Les tissus, pour autant qu'ils n'aient pas été désagrégés par une putréfaction antérieure, se retrouvent admirablement conservés. En outre, la fixation par les minéralisateurs a été hâtive. Elle a précédé la période des premiers tassements, de telle sorte que les tissus sont figés dans une attitude naturelle, tandis que dans les empreintes, ils sont en général fortement comprimés et souvent effacés par les glissements.

Les végétaux à structure conservée se remontrent dans des conditions variables. L'une des mieux connues est celle des *coal balls* du westphalien d'Angleterre, de Moravie, de Westphalie et d'Aix-la-Chapelle (Anna). On trouve dans des couches de houille, de même âge que les nôtres, des concrétions dolomitiques qui ne sont pas autre chose qu'une partie minéralisée de la pulpe végétale qui a donné naissance à la houille. Il est de règle que les couches qui présentent semblables concrétions soient dotées d'un toit à faune marine dans lequel on rencontre des concrétions en forme de boules ou de pains. Certaines couches du houiller belge possèdent semblable toit. Jusqu'ici je n'ai pu découvrir en Belgique de *coal balls* proprement dits.

Certains nodules de toit de la couche Hawy, au siège Mallieue des charbonnages de la Nouvelle-Montagne, m'ont cependant fourni des échantillons de *Medullosa* et de *Lepidostrobus* calcifiés.

On connaît aussi des cas où des végétaux, des troncs notamment, isolés dans un schiste, ont été saisis par la matière minérale. C'est un échantillon de ce genre recueilli dans le travers bancs à l'étage de 700 m. du siège de Flémalle des charbonnages de Marihaye par M. l'ingénieur Massart, qui doit être considéré comme le premier échantillon à structure bien conservée qui a été découvert en Belgique. Il représente la partie ligneuse centrale d'un tronc qu'il faut rapprocher des *cordaites*. L'étude que M. le professeur C. Eg. Bertrand, de l'Université de Lille, a bien voulu se charger d'entreprendre ne tardera pas à nous fixer sur l'intérêt de cet échantillon. La stampe schisteuse au milieu de laquelle il a été recueilli, est celle de Grand-Joli-Chêne.

Il est à souhaiter, vu le haut intérêt scientifique de ces échantillons, que leur récolte se poursuive abondante et variée dans l'étendue de nos bassins miniers. Nous sommes à présent certains que des recherches dirigées dans ce sens ont des chances réelles de succès. Puisse donc l'annonce de ces premières découvertes encourager les chercheurs !

Le R. P. Schmitz, S. J., fait ressortir divers résultats scientifiques inhérents aux travaux préliminaires dans le bassin houiller de la Campine.

Il est donné lecture des *Notes sur la flore du Katanga*, qu'a fait parvenir M. De Wildeman. Ce travail paraîtra dans la seconde partie des ANNALES.

M. Fernand Meunier fait quelques observations *sur un dépouillement de 1900 empreintes de Blattidae du Stéphanien de Commentry*.

L'étude des Blattaires a toujours été négligée par les entomologistes. On doit en attribuer la cause non seulement à l'aspect peu agréable à l'œil d'une collection d'articulés de cette famille, mais aussi à l'odeur repoussante que ces insectes émettent longtemps après la dessiccation. Les anciens naturalistes n'ont signalé que quelques orthoptères nomoneures. Ce n'est guère que depuis le remarquable travail monographique de Brunner von Wattenwyl que ces Arthropodes ont fait l'objet d'un examen systématique sérieux. Ces dernières années, on a entrepris de nouvelles recherches sur la classification de ces êtres, mais il n'existe pas, à ma connaissance du moins, un mémoire d'ensemble sur les espèces des faunes paléarctique, néarctique, éthiopienne et néotropicale.

Les Orthoptères Blattidae offrent, à première vue, peu de caractères rigoureux pour le rangement des genres. Cette opinion change quelque peu si on scrute attentivement certaines parties du corps, notamment les élytres (ailes antérieures) offrant des caractères critères. La même remarque ne s'applique guère au nombre d'articles des antennes pouvant varier d'un individu à l'autre. Le naturaliste qui désire s'occuper des Blattidae est assez mal outillé : dans les grands musées, manque de collections générales et renseignements bibliographiques assez restreints.

On le voit, ce n'est donc qu'avec la plus grande prudence qu'il faut entreprendre l'examen des formes fossiles, ordinairement trouvées en petit nombre. Toutefois, il y a lieu d'en excepter le célèbre gisement de Commentry (Allier, France) où le nombre étonnant des individus rencontrés est associé à la variété des formes.

Malheureusement, les Blattidae du Stéphanien de Commentry ne sont représentés que par des élytres plus ou moins bien conservées. Le naturaliste est rarement en mesure de décrire les diverses parties de la tête, de l'abdomen et de son extrémité ; il en est de même de la seconde paire d'ailes. On en est réduit à l'étude, aussi minutieuse que possible, de la topographie des ailes et de la morphologie du thorax. L'examen des ailes des espèces actuelles peut aider le paléontologiste. Encore est-il à souhaiter, pour les fossiles, que chaque espèce décrite soit représentée par quelques spécimens, la distribution des nervures sur le champ de l'aile pouvant varier un peu et conséquemment donner l'idée qu'on se trouve en présence d'un autre genre. La classification des Blattidae fossiles sera encore longtemps artificielle, ne renseignant guère sur les organes présentant les caractères les plus stables. Après une étude sommaire des Blattidae de

Commentry, on est enclin à croire que pendant les temps primaires la taille de ces nomoneures était bien plus grande que celle des représentants actuels de cette famille. Le triage de plus de 1900 empreintes (qu'a bien voulu soumettre à mon examen M. le professeur M. Boule, du Muséum de Paris), dont un grand nombre sont d'une conservation remarquable, permet de modifier cette manière de voir. En effet, parmi le nombre extraordinaire de Blattides houillères, on rencontre des formes dont la taille ne dépasse guère 10 à 20 millimètres de longueur ; les espèces géantes, au contraire, peuvent avoir de 60 à 65 millimètres de longueur.

A diverses reprises, j'ai fait observer que la classification actuelle des Blattidae est artificielle et embrouillée. En 1895, Scudder, qui a étudié le plus grand nombre de Blattes paléozoïques, a entrepris la revision systématique de ces nomoneures et a donné un tableau des genres connus. On peut admettre avec M. A. Handlirsch, de Vienne, que la classification de S. H. Scudder renferme, notamment dans les Etoblattina, des formes assez hétérogènes. Cependant, il est difficile d'admettre le démembrement à outrance qui ne simplifie pas la question proposée par le paléontologiste viennois. Avec l'essai monographique de Scudder, il est ordinairement aisé de s'y retrouver au milieu des Blattides primaires. Avec le manuel de Handlirsch, la chose est moins faisable, l'auteur n'ayant pas donné le tableau des genres admis par lui. De plus, ses dessins au trait ne sont jamais accompagnés de phototypies permettant à l'œil de bien saisir la morphologie, toute spéciale, des élytres, des ailes ou des autres parties du corps des espèces étudiées.

La monographie des Blattidae de Commentry sera faite, en majeure partie, d'après la classification de Scudder, mise au point, plus simple et plus rationnelle que celle de Handlirsch. Ce spécialiste propose cependant des démembrements intéressants et justifiés, notamment celui des Protoblattidae (Protoblattinae mihi).

En définitive, pour les formes fossiles, on a trop multiplié les coupes génériques, ce qui ne facilite guère l'étude de ces arthropodes. A mon avis, il est indispensable de les grouper d'après des caractères très appréciables permettant d'arriver, à coup sûr, à la détermination rapide des espèces.

L'étude des Blattidae offre de très grandes difficultés, la morphologie des espèces se distinguant souvent par des caractères que l'œil n'apprécie bien qu'après un certain temps et surtout après l'examen de plusieurs individus d'une même forme.

Mes recherches sur les Blattidae paléozoïques sont loin d'être définitives. Cependant l'examen des nomoneures paléozoïques montre péremptoirement qu'il n'existe guère de points de contact entre les formes archaïques et celles des faunes actuelles.

Pour *prendre date*, M. Fernand Meunier résume son mémoire : *Contribution à la faune des Phoridae du copal sub-fossile de Zanzibar, du copal récent de Zanzibar, d'Accra et de Madagascar.*

Dans le domaine entomologique, dit-il, on a fait de remarquables progrès sur les Phoridae de la faune mondiale, particulièrement sur ceux des régions holarctiques et néarctiques. Parmi les naturalistes qui ont le plus contribué à étendre nos connaissances concernant cette difficile famille de diptères, il faut citer Becker (*), de Vienne, et Brues (**) des États-Unis. Il serait injuste de ne pas mentionner les observations préliminaires du père de la diptérologie, l'illustre Meigen, qui ont servi de base sérieuse à tous ceux qui ont entrepris des recherches sur les Phoridae. Si on en excepte les deux lignes de remarques de H. Loew, la faune fossile de ces diptères n'a guère été observée. Loew (***) s'est borné à signaler onze espèces de Phora sans les décrire ni les figurer. Avec beaucoup de peine, j'ai pu réunir, depuis plus de dix ans, les matériaux nécessaires pour écrire une monographie des Phoridae du succin. Depuis 1898, j'ai eu la bonne fortune d'observer plusieurs Phoridae du copal, soit parmi les inclusions de la collection du Musée provincial de Königsberg, soit parmi les beaux matériaux qu'a bien voulu me soumettre M. Evers, junior, de Altona-Bahrenfeld (Hambourg). En 1900, j'ai signalé les Phora copalina et ethiopia (****), qu'avec M. Brues, je range actuellement

---

(*) *Die Phoriden*, ABHANDL. D. K. K. ZOOL. BOT. GESELLSCH. Wien, 1901.

(**) *Diptera. Fam. Phoridae Genera Insectorum*. Bruxelles, P. Wytsman, 1906.

(***) *Ueber den Bernstein u. die Bernsteinfauna* (Trineura), p. 44. Meseritz, 1850.

(****) Lisez : ethiopica.

dans le genre Aphiochaeta, les tibias médians étant garnis de cils. Après le triage de plusieurs centaines d'insectes du copal, je suis arrivé à reconnaître sept espèces nouvelles du genre Aphiochaeta : une du copal récent d'Accra, deux de Madagascar, trois du copal récent de Zanzibar, une du copal du sub-fossile de Zanzibar, et un Phora vrai du copal récent de Madagascar.

Les matériaux étudiés jusqu'ici, quoique très intéressants, sont encore trop fragmentaires pour donner une esquisse de la faune de Phoridae trouvée dans les copals de diverses provenances africaines. Cependant, à en juger d'après d'autres familles, notamment les Chironomidae, les Ceratopogonidae (Chironomidae plur. auc.) et les Mycetophilidae, la faune de ces bestioles semble être voisine, non seulement de celle incluse dans le succin de la Baltique, mais aussi de celle de la région paléarctique actuelle.

M. Fernand Meunier fait quelques remarques *sur deux nouveaux Paléodictyoptères du Stéphanien de Commentry* faisant partie des collections du laboratoire de paléontologie du Muséum d'histoire naturelle de Paris et qui lui ont été communiqués par M. le professeur Marcellin Boule.

Notre collègue signale qu'il a rencontré ces fossiles en triant des centaines d'empreintes d'insectes houillers.

L'un d'eux est un gigantesque articulé rangé parmi les Platyptérides Charles Brongniart. L'aile de ce titan ne mesurait pas moins de dix-huit centimètres de longueur et six centimètres et demi de largeur, soit une envergure alaire totale de trente-six centimètres.

La tête et le thorax, très appréciables, ont ensemble cinq centimètres de longueur. Le prothorax et le mésothorax ont une taille très respectable et la distance entre les ailes est de 24 millimètres. Une minutieuse étude de la nervation des ailes permet de dire que ce curieux Paléodictyoptère (groupe des Platyptérides Brongniart) est distinct de Archaeoptilus ingens Scudder et A. Lacazei Brgt et aussi de Archaeoptilus Boulei Meun.

Une photographie, *grandeur naturelle*, que notre collègue fait passer sous les yeux des membres de la Section, montre nettement la morphologie de ce très remarquable insecte houiller que M. F. Meunier propose de nommer Archaeoptilus Gaullei, en l'honneur de M. J. de Gaulle, auteur d'un remarquable Catalogue sur les Hyménoptères de France. L'autre Paléodictyoptère se range avec les Sténodictyoptères Ch. Brongniart. En comparant les nervures des ailes de ce fossile à celles des espèces déjà décrites, on remarque qu'il se sépare non seulement des Microdictya Vaillanti et M. Hamyi Brongniart, mais aussi des Microdictya agnita et M. Villeneuvi Meun.

M. Fernand Meunier propose de nommer ce nouvel insecte *Microdictya Lacroixi,* le dédiant à M. Lacroix, le savant professeur du laboratoire de minéralogie au Muséum d'histoire naturelle de Paris. Ce Paléodictyoptère se rapproche le plus de Microdictya Villeneuvi ; il s'en éloigne par le secteur du radius qui est orné de trois nervures et non de deux comme c'est le cas chez l'espèce décrite antérieurement. M. F. Meunier fait circuler devant les membres la photographie, agrandie cinq fois, de ce nouveau Sténodictyoptéride (*).

M. le Chanoine Grégoire fait une communication *sur la valeur de la couche amylifère de la tige et la théorie stélaire* de Van Tieghem. Ce travail prendra place parmi les mémoires, dans la seconde partie des ANNALES.

Un travail de M. Viaene, *La forêt congolaise et ses habitants,* est soumis à l'examen de M. Maes et du R. P. Van den Gheyn, S. J.

M. F. Kaisin et le R. P. Schmitz, S. J., sont nommés rapporteurs pour l'examen d'un mémoire envoyé en réponse à la question de concours : *Monographie géographique de la Campine.*

Quatrième section

Les membres de la quatrième section ont assisté à la leçon de clinique chirurgicale, donnée à l'hôpital Saint-Pierre par M. le

---

(*) Toutes les nouvelles espèces de Commentry ont été signalées dans le BULLETIN du Muséum de Paris (1907-1909). Le mémoire donnant les phototypies de tous ces insectes houillers a paru dans les ANNALES DE PALÉONTOLOGIE du Muséum de Paris (1909).

Professeur Debaisieux, qui leur a fait le plus aimable accueil. Devant le vaste et grave amphithéâtre où se pressaient ses élèves attentifs, il traita la question du traitement des fractures des membres. Au cours d'un magistral exposé, il traça les règles à suivre dans le choix des méthodes et des appareils à appliquer ; il détermina, notamment, les principes qui doivent guider le chirurgien dans l'emploi du massage et des procédés nouveaux d'ostéosynthèse sanglante, dont il faut se garder de généraliser la mise en pratique mais qui peuvent, répondant à certaines indications, rendre de réels services. L'éminent chirurgien nous fit assister, ensuite, à une opération de gastro-entérostomie chez un malade atteint de sténose du pylore, de nature mal déterminée.

M. le Professeur Verriest, chef du service de clinique interne, nous fit parcourir les salles de son service, nous exposant les cas intéressants, et nous mettant au courant de l'outillage clinique et de l'organisation si complète et vraiment scientifique de cette partie si importante de l'enseignement médical. Il voulut bien, ensuite, nous conduire à l'*Institut d'Anatomie* et au nouvel *Institut de Pathologie*.

Le premier de ces établissements a acquis des développements importants et répond à toutes les exigences actuelles ; parmi les appareils de démonstration, les préparations, les procédés de schématisation, nous avons été particulièrement intéressés par tout ce qui concerne le système nerveux. L'empreinte d'un maître était bien visible dans ces richesses de haute pédagogie scientifique, et l'on était saisi d'un sentiment de curiosité respectueuse en visitant ces laboratoires qui ont vu et voient encore naître ces travaux de neurologie qui ont jeté sur le nom du Professeur Van Gehuchten un si vif éclat.

L'Institut de Pathologie ne nous a pas réservé de moins instructives surprises ; avec son bel auditoire, si bien adapté à un enseignement pratique, son riche Musée d'Anatomie pathologique, son laboratoire d'analyses médicales chimiques et microscopiques, son laboratoire de pathologie expérimentale, il réalise une véritable création qui peut rivaliser avec les installations similaires les plus réputées des grands centres universitaires de l'étranger. M. le Professeur Lemaire nous a guidés dans la visite de l'Institut dont il a la haute direction, et nous avons pu constater dans l'organisation et la tenue de ce grand établissement scientifique, les heureux résultats de son activité éclairée.

Le temps nous a été trop mesuré pour nous permettre de refaire connaissance avec d'autres établissements annexés à la Faculté de médecine, tels que l'important Institut de Bactériologie de M. le Professeur Denys. Mais ce qu'il nous a été donné de voir et d'apprendre a suffi à nous convaincre, une fois de plus, des progrès incessants accomplis dans l'enseignement médical de l'Université Catholique et de la haute valeur de ses maîtres, dont l'œuvre apparaît sous nos yeux dans la pléiade de praticiens et de chercheurs distingués qu'ils forment et dans les publications qui leur donnent, au delà de nos frontières, une légitime et brillante notoriété. Qu'ils veulent bien recevoir ici, pour l'accueil si cordial qu'il nous ont fait, l'expression de notre gratitude.

Cinquième section

La cinquième section s'est réunie à 4 heures 1/2, à l'issue de l'assemblée générale. M. Hubert Mansion, ingénieur, a traité de *l'industrie des transports maritimes.* M. Meuwissen, professeur à l'Université de Gand, a présenté la monographie des *ports de la côte nord-est de l'Angleterre.*

Le travail de M. H. Mansion a paru *in extenso* dans la Revue des Questions scientifiques, livraison d'avril 1910. Celui de M. Meuwissen fait partie de l'enquête, poursuivie par la cinquième section, sur la fonction économique des ports. Il paraîtra également dans la Revue.

Sixième section

M. R. Van der Mensbrugghe présente des extraits d'une étude sur *les moyens de communication à établir entre les deux rives de l'Escaut à Anvers*, étude qui vient de paraître *in extenso* dans les Annales des Ingénieurs sortis des Écoles spéciales de Gand (1909, 3^e fascicule). En voici un résumé.

Il y a près de 40 ans que cette question est à l'étude, mais ce n'est que dans ces dernières années qu'on s'en est occupé plus activement. Le problème à résoudre est double. La première partie concerne l'amélioration des communications routières, la seconde, celle des transports par chemin de fer.

Pour solutionner la première partie on pourrait :

1° Améliorer le passage d'eau actuel : ce ne sera jamais qu'un palliatif insuffisant.

2° Construire un pont. Mais, établi en pleine rade, cet ouvrage devrait, soit comporter une partie mobile, soit être élevé de 60 m. au-dessus du niveau des eaux, ce qui nécessiterait l'établissement d'ascenseurs ou de rampes d'accès interminables. Ces solutions sont, ou dangereuses, ou peu pratiques, ou fort onéreuses.

3° Établir un transbordeur. La commission nommée à l'effet d'en examiner les inconvénients au point de vue de la navigation s'est prononcée pour son adoption, à condition de l'ériger à Cruybeke. Mais, à cet endroit, il ne répondra plus du tout au but poursuivi.

4° Construire un tunnel. Il serait très coûteux de le placer en face de la Tête de Flandre, à cause de la difficulté d'établissement des rampes d'accès. D'autre part, la solution préconisée par M. Franck et consistant dans la création, à chaque extrémité du tunnel, de voies en spirale pour tramways, et d'ascenseurs pour voitures et piétons n'est absolument pas pratique.

M. Bertrang, conseiller communal d'Anvers, a conçu le projet d'établir un tunnel dans le prolongement de la gare du Sud ; les rampes d'accès trouveraient place, d'une part dans les dépendances de la gare, de l'autre dans les polders. Il y aurait trois pertuis : un pour tramways, un pour voitures et piétons, et un pour chemin de fer. Seulement, vu la longueur des rampes d'accès projetées, le trajet en souterrain serait fort long (2607 m.) et le débouché des voitures, près de la porte de Kiel, absolument excentrique (à 2700 m. de la place de Meir).

M. Van der Mensbrugghe propose d'établir le tunnel au nord d'Anvers. La ville va s'étendre de plus en plus de ce côté par suite des nouvelles installations maritimes projetées et, d'autre part, le débouché sur la rive droite serait ainsi bien plus rapproché du centre de la ville que dans le projet Bertrang.

L'établissement des rampes d'accès pourrait se faire presque sans expropriation. Sur la rive droite, on utiliserait les terre-pleins du Canal des Brasseurs et de la rue Digue-de-Terre ; seule la rue du Canal de l'Ancre devrait être quelque peu élargie. Le débouché se ferait place de l'Entrepôt (à 1150 m. de la place de Meir).

L'accès sur la rive gauche ne présenterait aucune difficulté d'exécution.

Le tunnel serait à deux pertuis : l'un réservé aux tramways et piétons, et l'autre aux voitures. La partie souterraine aurait au maximum une longueur de 1450 m., qui se réduirait à 1200 m. suivant le tracé adopté pour le fleuve à cet endroit.

En effet, à propos du choix de l'emplacement du tunnel, M. Van der Mensbrugghe préconise une amélioration du tracé de l'Escaut, basée sur la coupure du coude d'Austruweel jointe au tracé Van Mierlo modifié, et qui ne présenterait pas l'alea de la Grande Coupure, tout en facilitant singulièrement la navigation.

Quant aux communications par chemin de fer, M. Bertrang propose de transformer la gare du Sud en station souterraine, raccordée à la ligne du Pays de Waes par le troisième pertuis de son tunnel, et à la gare centrale par une ligne nouvelle à établir dans les fossés d'enceinte asséchés.

Ce projet rendrait difficile et fort onéreuse l'exploitation des lignes passant par cette station. Aussi, M. Van der Mensbrugghe préférerait la construction d'un pont avec partie mobile établi en dehors de la rade, immédiatement au sud des aciéries d'Hoboken. La partie inférieure du tablier serait prévue à 10 m. au-dessus des plus hautes eaux pour faciliter la navigation des bateaux d'intérieur. En en soignant quelque peu l'architecture, cet ouvrage pourrait contribuer puissamment à l'esthétique de la rade.

Quant à la ligne du Pays de Waes, elle serait détournée à partir de la traversée de la route militaire près du fort de Zwyndrecht. La halte de ce nom serait déplacée de quelques centaines de mètres vers Saint-Nicolas, et l'on doterait d'une station le village de Burght. Sur la rive droite, le tracé viendrait rejoindre la ligne actuelle d'Anvers (Sud) à Boom, d'une part, en amont de la gare de formation d'Anvers (Kiel), et, de l'autre, en amont de la bifurcation de la ligne de Boom avec celle de Wilryck.

Ainsi serait réalisée la jonction de la ligne du Pays de Waes avec le réseau ferré de l'agglomération anversoise, tout en conservant les grandes facilités d'exploitation que présente la station d'Anvers (Sud) à son niveau actuel.

Le baron G. de Béthune présente un compte rendu d'une visite à la *Première exposition internationale de l'Aéronautique à Paris* (25 septembre au 1er novembre 1909). Cette communication paraîtra dans la Revue des Questions scientifiques ; en voici un résumé.

L'exposition devait, dans l'esprit des organisateurs, réunir les documents français et étrangers, anciens et modernes, se rapportant à l'aéronautique ; de la sorte, l'exposition eût été un raccourci des efforts faits par l'humanité pour la conquête de l'air. En fait, les exposants étrangers constituaient une infime minorité et l'exposition était purement nationale.

Au point de vue historique, elle renfermait des documents sur la plupart des aéronautes français ; une place importante avait été faite à l'Aéro-Club de France et à toutes les sociétés aéronautiques qui ont tant contribué au développement du sport aérien.

Dans le domaine des recherches connexes à l'aéronautique, il y avait une intéressante participation médicale (effets physiologiques dans les hautes atmosphères) et quelques stands renfermant des instruments d'observation à l'usage des aéronautes : baromètres, barographes, boussoles, chronomètres, etc. A signaler un accéléromètre.

Au point de vue de la locomotion aérienne proprement dite, l'exposition était très intéressante. De nombreux aéroplanes et de nombreux moteurs montraient l'effort considérable fait par la jeune industrie aéronautique en France.

Rappelant la communication du 20 avril dernier, M. de Béthune compare certaines caractéristiques actuelles d'aéroplanes à celles possédées auparavant, montre des perfectionnements réalisés et signale l'apparition des nouveau-venus de l'aviation : Clément, Pischoff-Koechlin, de Dion.

Au point de vue du « plus léger que l'air », il y avait un dirigeable Zodiac, des modèles réduits de dirigeables : Simoni, Spiess (dirigeable rigide français, breveté en 1873) et des sphériques montrant le ralliement définitif des aéronautes français au tissu caoutchouté.

M. Renaud fait ensuite une communication *à propos des recherches récentes sur la constitution des aciers.* Il s'étend notamment sur l'osmondite et l'austénite.

Le compte rendu de cette communication paraîtra dans le prochain fascicule.

M. Éd. Goedseels présente la note suivante *sur le réglage des lunettes des niveaux, des théodolites et des instruments astronomiques.*

§ 1. — NIVEAUX

1. *Préliminaires.*

On sait que les parties essentielles de la lunette topographique, en usage dans les niveaux, sont l'objectif, le réticule, l'oculaire et les collets.

Pour observer un point, à l'aide d'un instrument de l'espèce, avec la plus grande précision possible, on dirige la ligne de visée sur le centre d'une mire placée en ce point. Ensuite on fait tourner la lunette de 180° sur ses collets et on fait une nouvelle visée. Enfin on calcule la moyenne arithmétique des lectures correspondant à ces deux visées. Ce résultat est égal à celui qu'on aurait obtenu si la ligne de visée de la lunette avait coïncidé avec l'axe de ses collets.

Il semble, d'après cela, que l'écart entre les deux lectures importe peu pour la précision des opérations du nivellement.

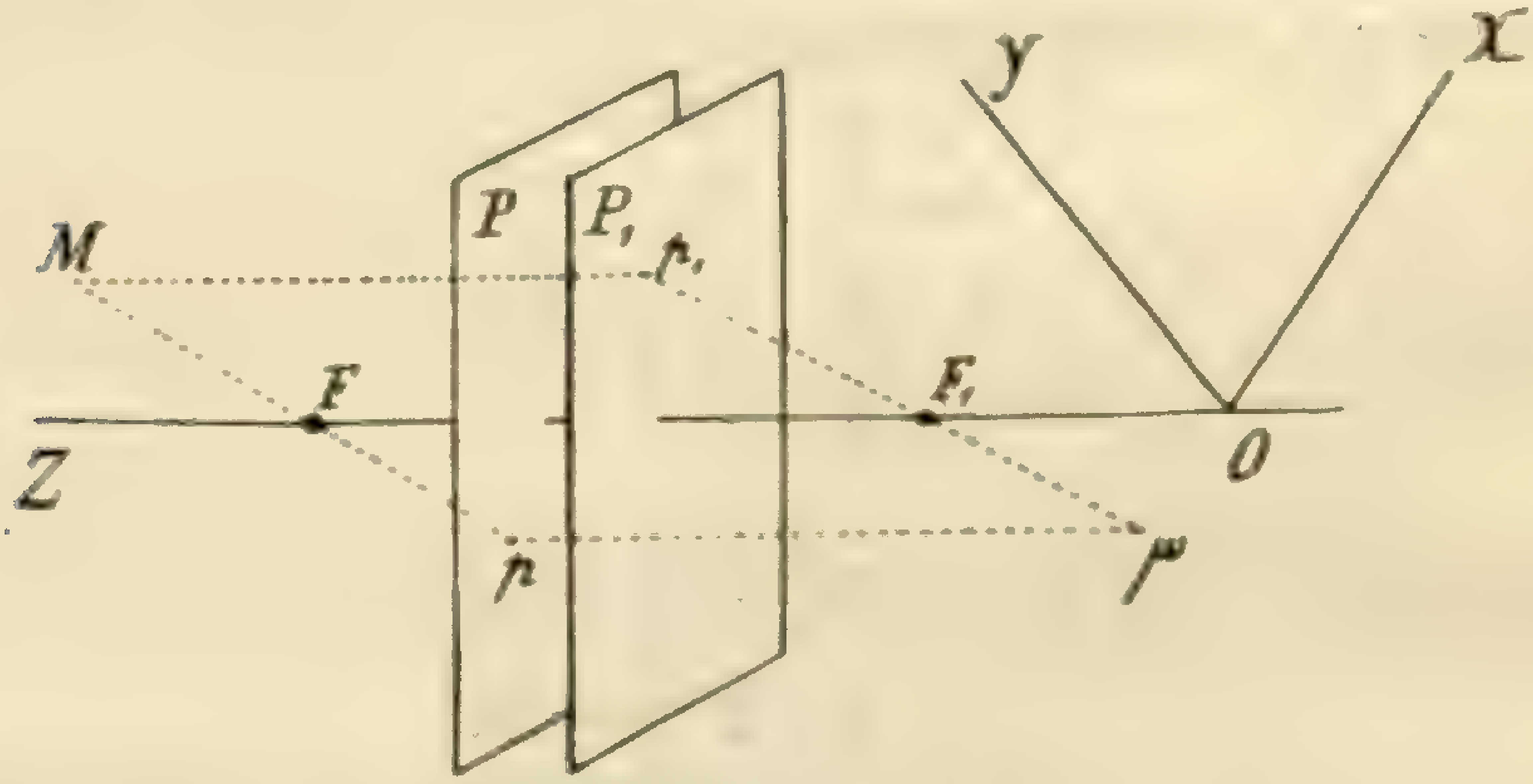
Cette manière de voir serait exacte si l'on n'effectuait que des nivellements en faisant la double visée. Mais, dans la pratique, le nombre des points à niveler est souvent si considérable qu'on doit se borner à employer la double visée pour les polygones et les points de premier ordre, et se contenter d'une visée unique pour les traverses et les points secondaires. Les topographes cherchent, pour cette raison, à régler leur instrument de manière que l'écart entre deux lectures correspondant à une double visée soit quasi nul.

Nous nous proposons de montrer, dans ce travail : 1° qu'il y a généralement une limite en dessous de laquelle on ne saurait descendre dans ce réglage ; 2° que cette limite peut être très appréciable et notablement supérieure aux erreurs inévitables d'observation.

Si, dans un cas concret donné, cette limite inférieure était trop grande pour le degré de précision assigné aux opérations secondaires, on devrait ou bien se procurer un autre instrument, ou bien ajouter à chaque observation une correction constante, comme nous l'expliquerons plus loin.

Les considérations théoriques exposées dans ce travail pourraient peut-être subir plusieurs simplifications, si l'on avait exclusivement en vue la thèse ci-dessus. Seulement, comme nos raisonnements doivent, dans notre pensée, mettre le lecteur à même de résoudre d'autres questions du même genre, nous avons été amené à y insérer quelques passages dont la suppression ne présenterait pas grand inconvénient ici.

2. *Constructions géométriques pour trouver l'image d'un point.* On sait que l'objectif d'une lunette peut être remplacé par deux plans parallèles principaux, dits *de Gauss*. Ces plans sont perpendiculaires à la droite qui joint les foyers. Nous désignerons ces derniers par F et F_1 et les plans de Gauss correspondants, par P et P_1.



Pour obtenir l'image, μ, d'un point extérieur quelconque, M, on procède de la manière suivante :

1° On mène par le point M une parallèle à la droite des foyers ;

2° On cherche le point d'intersection, p_1, de cette parallèle avec le plan P_1 ;

3° On joint le point p_1 au foyer F_1 ;

4° On joint aussi le point M au foyer F ;

5° On cherche le point d'intersection, p, de la droite MF avec le plan P ;

6° On mène par le point p une parallèle à la droite des foyers.

Le point de rencontre de cette dernière parallèle avec la droite p_1F_1 est l'image μ du point extérieur M.

3. *Détermination analytique de l'image.*

Pour résoudre analytiquement le même problème, nous prendrons une origine arbitraire, O, sur la droite FF_1, un axe OZ sur cette droite, et deux axes OX et OY, perpendiculaires entre eux et à OZ. Nous désignerons respectivement par F_1, P_1, P et F les z du point F_1, du plan P_1, du plan P et du point F ; par X, Y, Z, les coordonnées du point M et par ξ, η, ζ, celles du point μ.

En désignant les coordonnées courantes par x, y, z, la droite Mp_1 a pour équations :

$$x = X,$$
$$y = Y.$$

Le point p_1, intersection de cette droite et du plan P_1, dont l'équation est $z = P_1$, a pour coordonnées X, Y, P_1.

La droite p_1F_1 a pour équations :

$$\begin{vmatrix} y, & z, & 1 \\ 0, & F_1, & 1 \\ Y, & P_1, & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} x, & z, & 1 \\ 0, & F_1, & 1 \\ X, & P_1, & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

La droite MF a, de même, pour équations :

$$\begin{vmatrix} y, & z, & 1 \\ Y, & Z, & 1 \\ 0, & F, & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} x, & z, & 1 \\ X, & Z, & 1 \\ 0, & F, & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Les coordonnées du point p, intersection de MF et du plan P, s'obtiennent en résolvant simultanément les deux équations ci-dessus et l'équation $z = P$ du plan P.

On obtient ainsi les deux relations :

$$x = \frac{X(P - F)}{Z - F},$$

$$y = \frac{Y(P - F)}{Z - F}.$$

Ces deux relations sont aussi les équations de la parallèle menée par le point p à l'axe OZ. Les coordonnées, ξ, η, ζ, du point μ sont donc les valeurs de x, y, z qui vérifient ces deux dernières relations et les équations trouvées plus haut pour la droite p_1F_1.

Ces valeurs sont :

$$\xi = X\frac{P - F}{Z - F},$$

$$\eta = Y\frac{P - F}{Z - F},$$

$$\zeta = F_1 + \frac{P - F}{Z - F}(P_1 - F_1).$$

Pour résoudre le problème inverse, il suffit de calculer X, Y, Z au moyen des équations ci-dessus.

On trouve :

$$X = \xi \frac{P_1 - F_1}{\zeta - F_1},$$

$$Y = \eta \frac{P_1 - F_1}{\zeta - F_1},$$

$$Z = F + \frac{P_1 - F_1}{\zeta - F_1}(P - F).$$

Comme vérification, on constate que ces formules sont semblables aux précédentes, ce que l'on pouvait prévoir du reste étant donnée la réversibilité des constructions géométriques.

4. *Image d'un plan. Image d'une droite.*

Théorème. — *L'image d'un plan est un plan, et réciproquement.*

En effet, considérons un plan quelconque :

$$AX + BY + CZ + D = 0.$$

Pour en avoir l'image, il suffit de remplacer les coordonnées X, Y, Z par leurs valeurs en fonction de ξ, η, ζ. On obtient ainsi l'équation linéaire :

$$A\xi + B\eta + \frac{CF + D}{P_1 - F_1}(\zeta - F_1) + C(P - F) = 0,$$

qui détermine aussi un plan.

La réciproque se démontre de la même manière.

Corollaire. — Une droite, étant l'intersection de deux plans, a pour image une droite, et réciproquement.

5. *Points nodaux.*

Pour qu'un plan et son image soient parallèles ou réciproquement, il faut et il suffit que les coefficients des variables soient égaux ou proportionnels dans les équations des deux plans, et, par suite, qu'on ait :

$$\frac{CF + D}{P_1 - F_1} = C,$$

ou :

$$D = C(P_1 - F_1 - F).$$

Il faut et il suffit donc que l'équation du plan donné et son image aient des équations de la forme :

$$A(X-0)+B(Y-0)+C\{Z-(F+F_1-P_1)\}=0,$$

$$A(\xi-0)+B(\eta-0)+C\{\zeta-(F_1+F-P)\}=0,$$

ou, ce qui revient au même, que le plan extérieur passe par le point N, ayant pour coordonnées :

$$X=0, \quad Y=0, \quad Z=F+F_1-P_1,$$

et l'image du plan extérieur par le point N_1, ayant pour coordonnées :

$$\xi=0, \quad \eta=0, \quad \zeta=F_1+F-P.$$

Les points N et N_1 ont reçu le nom de points *nodaux*.

Corollaire. — Toute droite passant par le point nodal N a pour image une droite parallèle, passant par le point nodal N_1 et réciproquement.

6. *Conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une droite soit parallèle à son image et réciproquement.*

Pour qu'une droite soit parallèle à son image, il suffit, en vertu du corollaire ci-dessus, qu'elle passe par le point nodal N, ou son image par le point nodal N_1.

Proposons-nous de chercher si une autre droite, ayant, par exemple, pour équations :

$$Z=aX+b,$$

$$Z=mY+p,$$

ne peut jouir de la même propriété.

En remplaçant X, Y et Z par leurs valeurs en fonction de ξ, η, ζ, nous obtenons, pour l'image, les équations :

$$\zeta=a\,\frac{P_1-F_1}{F-b}\,\xi+\cdots$$

$$\zeta=m\,\frac{P_1-F_1}{F-n}\,\eta+\cdots$$

Par conséquent, l'image d'une droite est parallèle à cette droite si l'on a :

$$a = a\,\frac{P_1 - F_1}{F - b},$$

$$m = m\,\frac{P_1 - F_1}{F - n}.$$

Cette condition est satisfaite dans deux cas : 1° si l'on a :

$$\frac{P_1 - F_1}{F - b} = 1,$$

$$\frac{P_1 - F_1}{F - n} = 1,$$

ou :

$$b = n = F + F_1 - P_1,$$

c'est-à-dire si la droite extérieure passe par le point nodal N ; 2° si les quantités a et m sont nulles. Cette dernière condition correspond à des droites perpendiculaires à l'axe OZ passant par les deux foyers.

En résumé, pour qu'une droite et son image soient parallèles, il faut et il suffit ou bien qu'elles passent par les points nodaux ou bien qu'elles soient perpendiculaires à la droite joignant les foyers.

7. Théorème. — *Les images de toutes les droites* D, *parallèles à une même direction*, $X = AZ$, $Y = BZ$, *passent par le même point*, $\xi = A(P - F)$, $\eta = B(P - F)$, $\zeta = F_1$.

Réciproquement, toutes les images rectilignes, δ, *parallèles à une même direction*, $\xi = \alpha\zeta$, $\eta = \beta\zeta$, *correspondent à des droites* D, *passant par le même point*, $X = \alpha(P_1 - F_1)$, $Y = \beta(P_1 - F_1)$, $Z = F$.

En effet, désignons par :

$$X = AZ + R,$$

$$Y = BZ + Q,$$

les équations d'une parallèle quelconque à la direction donnée.

L'image de cette droite a pour équations :

$$\xi - A(P - F) = (\zeta - F_1)\frac{AF + R}{P_1 - F_1},$$

$$\eta - B(P - F) = (\zeta - F_1)\frac{BF + Q}{P_1 - F_1}.$$

Toutes ces droites passent par le point :

$$\xi = A(P - F), \quad \eta = B(P - F), \quad \zeta = F_1.$$

La réciproque se démontre de la même manière.

Remarque. — Certains théoriciens diraient que toutes les droites parallèles ont un point commun à l'infini, et que leurs images passent par conséquent par l'image de ce point à l'infini. Ils en concluraient vraisemblablement que la propriété énoncée ci-dessus, sous forme de théorème, était évidente.

Nous reconnaissons volontiers que les considérations relatives aux figures géométriques situées soi-disant à l'infini constituent un langage conventionnel très commode, dont les bons mathématiciens connaissent et comprennent la signification rigoureuse Mais. beaucoup de personnes prennent ce langage à la lettre et ont, par suite, à ce sujet, des idées si saugrenues qu'on devrait, à notre avis, ne jamais employer le mot *infini* en s'adressant à des lecteurs ou à des auditeurs qui ne font pas une étude approfondie des sciences mathématiques pures.

Le théorème et la démonstration ci-dessus montrent que ce n'est pas bien difficile.

8. *Des axes topographiques et du foyer topographique.*

Le réticule d'une lunette topographique est toujours solidaire d'un tube glissant à frottement doux, d'avant en arrière, dans le tube porte-objectif.

Tous les points du champ réticulaire décrivent donc des droites parallèles, et, en vertu du n° 7, les images de ces droites passent par un point qui est invariablement lié à l'objectif.

Nous appelons *axe topographique, ou ligne de visée d'un point du champ rèticulaire*, la droite extérieure qui a pour image la droite décrite par ce point, et *foyer topographique*, le point constant par lequel passent toutes les lignes de visée.

Les auteurs qui s'occupent de lunettes topographiques s'occupent beaucoup de l'axe optique de l'objectif. En réalité, ce qu'ils disent de cet axe n'est vrai que pour l'axe topographique ou ligne de visée du centre réticulaire.

9. *Réglage de la lunette du niveau.*

Les fils réticulaires de la lunette du niveau sont fixés sur un cadre métallique maintenu par des vis de réglage.

Les observateurs cherchent à utiliser ces vis de manière à faire coïncider la ligne de visée avec l'axe des collets de la lunette.

Il résulte des considérations précédentes que, malgré tous les déplacements du réticule, la ligne de visée passe toujours par le foyer topographique de l'objectif.

Si ce foyer se trouve sur l'axe des collets, le réglage est possible.

Mais si ce foyer n'est pas sur l'axe des collets, ce qui est le cas général, le réglage, tel que l'entendent les topographes, est tout à fait impossible.

Le seul résultat que l'on puisse atteindre, en agissant sur les vis de réglage, est de rendre la ligne de visée parallèle à l'axe des collets et de faire en sorte que le déplacement du point de visée, pendant la rotation de la lunette autour de ses collets, soit le même à toutes les distances. En théorie, il suffit qu'il soit le même à trois distances différentes.

La moitié de ce déplacement, prise avec le signe convenable, est la correction constante que l'on doit ajouter aux observations dans les opérations secondaires où l'on se contente d'une visée unique.

§ 2. — THÉODOLITES TOPOGRAPHIQUES

La ligne de visée correspondant à la croisée des fils réticulaires de la lunette d'un théodolite doit : 1° rencontrer son axe de rotation ; 2° être perpendiculaire à cet axe ; 3° avoir une direction telle que le vernier marque zéro, lorsque la ligne de visée est parallèle au plan du cercle azimutal.

Cette ligne est donc susceptible de trois erreurs : l'erreur d'excentricité, de collimation et du zéro (*).

(*) Les topographes donnent souvent le nom d'*erreur de collimation* à l'*erreur du zéro*.

Puisque la ligne de visée passe par un point fixe, le foyer topographique, il est impossible d'annuler les trois erreurs au moyen des vis de réglage du réticule.

En général, on cherche à annuler les erreurs de collimation et du zéro.

Quant à l'erreur d'excentricité, on la traite comme une erreur d'observation inévitable ou bien on n'en fait pas même mention dans les traités de topographie.

§ 3. — INSTRUMENTS ASTRONOMIQUES

Les lunettes astronomiques diffèrent des lunettes topographiques par l'absence de mouvement du réticule d'avant en arrière. La ligne de visée est la droite qui passe par le point nodal extérieur, et a pour image la droite joignant le centre réticulaire au point nodal intérieur.

Cette ligne de visée est donc susceptible d'une triple erreur, d'excentricité, de collimation et du zéro.

Par suite de l'immense éloignement des points observés, l'erreur d'excentricité de même que la distance entre les deux points nodaux sont négligeables, et les vis réticulaires suffisent pour annuler sensiblement les erreurs de collimation et du zéro.

ASSEMBLÉE GÉNÉRALE

L'assemblée générale de l'après-midi s'est tenue à l'Institut d'Arenberg, sous la présidence d'honneur de Mgr Ladeuze, Recteur magnifique de l'Université catholique, et la présidence effective de M. le Professeur De Walque, président en exercice de la Société.

M. le Président adresse à Mgr Ladeuze des félicitations pour sa récente élévation au Rectorat, et des remerciements pour l'hospitalité qu'il a bien voulu accorder à la Société scientifique, l'honneur qu'il lui fait et l'encouragement qu'il lui donne en présidant cette assemblée générale.

La parole est donnée à M. J. Van Biervliet, professeur à l'Université de Gand, pour une conférence *Vers la pédagogie expérimentale.* Cette conférence a paru *in extenso* dans la livraison du 20 janvier 1910 de la REVUE DES QUESTIONS SCIENTIFIQUES.

Le Président remercie et félicite l'orateur.

Mgr Ladeuze prend ensuite la parole : il commente en termes élevés notre devise : *Nulla unquam inter fidem et rationem vera dissensio esse potest*, et rappelle les liens étroits qui rattachent notre Société, sa fondation et son activité, à l'Université catholique, son *Alma Mater*.

M. le Président lève la séance et déclare close la session d'octobre.

SECONDE PARTIE

MÉMOIRES

L'ÉLECTROMÈTRE BIFILAIRE
ET SES APPLICATIONS (*)

PAR

le P. Théod. WULF, S. J.
Professeur de Physique au Collège Saint-Ignace
à Fauquemont (Limbourg hollandais)

PREMIÈRE PARTIE

L'Instrument

CHAPITRE I

INTRODUCTION

L'étude des multiples problèmes de radioactivité et d'électricité atmosphérique, qui offrent tant d'intérêt aux physiciens de nos jours, exige tout d'abord un électromètre propre à mesurer de petites quantités d'électricité.

(*) Mémoire présenté au concours de la Société scientifique de Bruxelles en réponse à la question : on demande *un électromètre perfectionné et l'étude par son moyen de phénomènes électriques divers* (seconde section), et couronné par la Société.

Les électroscopes et les électromètres sont tous basés sur l'attraction et la répulsion de corps mobiles chargés d'électricité. Pour servir spécialement aux usages mentionnés, un instrument doit présenter une prompte mise en station et une grande sûreté de lecture, mais il devra posséder avant tout la plus faible capacité possible. Le maniement et le réglage devront être très simples, et le transport de l'appareil sûr et facile.

1. Les électromètres à feuilles

Les plus usités des instruments de ce genre sont actuellement les électroscopes à feuilles, soit dans leur forme primitive d'après Exner (1), soit avec diverses améliorations et additions d'après Benoist (2) ou Curie (3) en France, C. T. R. Wilson (4) en Angleterre ou Elster et Geitel (5) en Allemagne.

Ce qui rend tout particulièrement ces instruments utilisables, c'est avant tout leur petite capacité et leur transport facile. Mais ils manquent de précision, surtout dans leur forme primitive, et cela pour une double cause.

Tout d'abord, au contraire de ce que cela devrait être, l'écartement des feuilles ne dépend pas uniquement de la charge électrique. Les feuilles présentent toujours de fines froissures et des plis. Quand l'instrument se décharge lentement, il arrive fréquemment que les feuilles s'arrêtent un certain temps, et puis, brusquement, se rapprochent considérablement ; c'est ce qu'Ebert (6) a appelé le phénomène du cricri.

En second lieu, la mesure de l'écartement n'atteint nullement le degré d'exactitude qu'on est en droit d'exiger aujourd'hui et qu'on obtient réellement d'autres appareils de mesure.

La lecture à l'appareil primitif d'Exner présente de très grandes erreurs parallactiques. Elster et Geitel ont beaucoup atténué ce défaut, en plaçant l'échelle devant l'appareil et en la projetant par un miroir dans le plan même des bords des feuilles. D'autres, tels que Curie et Wilson, lisent la position des feuilles à travers un microscope à micromètre oculaire ; mais si l'on évite ainsi les erreurs parallactiques, on diminue considérablement le champ visuel, et le phénomène du cricri n'en devient que plus apparent au grossissement par le microscope.

---

(1) Exner, Wiener Berichte, 95, II, 1088, 1887.

(2) Benoist, C. R., 123, 171, 1896.

(3) Curie, Bull. de la Soc. Franç. de Phys., janv. 1900.

(4) Wilson, Proc. Roy. Soc., 68, 152, 1901.

(5) Elster u. Geitel, Phys. Zeitschr., 4, 137, 1902.

(6) Ebert, Phys. Zeitschr., 6, 642, Anmerkung, 1905.

On peut donc dire d'après tout cela que, si les fines feuilles d'or et d'aluminium étaient en leur temps ce qu'il y avait de mieux, elles n'étaient pas propres à la construction des électromètres de précision.

2. Les électromètres à cordes

On a songé mainte fois à un dispositif plus convenable, où l'on remplacerait les feuilles d'or par des fils de quartz extrêmement fins et parfaitement élastiques. K. Kurz (¹) imita simplement l'électroscope à feuilles en remplaçant celles-ci par deux fils de quartz argentés, et en déterminant leur position par la lecture au microscope. Mais il était impossible de maintenir à la distance convenable du microscope ces fils fins qui obéissaient au moindre souffle.

Pour tirer parti de leurs bonnes qualités, il fallait donner aux fils une disposition toute nouvelle. Cela s'imposait à quiconque avait une fois travaillé avec un *galvanomètre* à fil. En 1897, Ader (²) avait indiqué le principe de cet appareil et construit le premier modèle. Un conducteur filiforme fin est pendu perpendiculairement aux lignes de force dans un champ magnétique. Traversé par un courant, ce conducteur dévie d'après la loi de Biot et de Savart. Einthoven (³) a considérablement perfectionné cet appareil en y appliquant un fil de quartz argenté, et Edelmann en a extrêmement simplifié la construction.

Pour avoir un *électromètre*, il suffit maintenant d'isoler le fil, de le charger électriquement et de remplacer le champ magnétique

---

(¹) K. Kurz, Phys. Zeitschr., 7, 375, 1906.
(²) Ader, L'Éclairage électr., 295, 1897, La Nature, II, 115, 1897.
(³) Einthoven, Drudes Annal. d. Physik., 12, 1903.

par un champ électrostatique. Ces électromètres furent aussi indiqués presque simultanément par plusieurs physiciens : Edelmann (1), Cremer (2), Lutz (3), Wertheim Salomonson (4).

Nos recherches à ce sujet remontent à l'année 1905 ; nous possédons encore un instrument construit alors par un mécanicien de nos amis. Mais cet instrument présentait plus d'un point susceptible d'amélioration.

Tout d'abord, la sensibilité dépend essentiellement de la tension du fil que l'on peut faire varier à l'aide d'une vis. Or, même dans le mécanisme le plus délicat, il n'est presque pas possible d'ajuster toujours la vis exactement au même point. C'est surtout lors des observations faites en plein air qu'on se met ensuite à douter d'avoir bien ajusté la tension du fil. En outre, il nous a paru que la disposition du fil présentait un défaut de principe. En effet, la raison pour laquelle les fils peuvent s'écarter, est qu'ils sont légèrement courbés dans leur position naturelle. Ces courbures fortuites étant égalées par les forces électriques, les instruments donnent un écart. Cela étant presque entièrement achevé, les appareils deviennent tout à coup insensibles. C'est ainsi que l'appareil de Lutz, suivant les propres indications de l'auteur (5), ne conserve que jusqu'à peu près 40 traits (= 60 volts) sa plus grande sensibilité de 0,6 de trait, à peu près, par volt. La courbe s'infléchit alors tout à coup dans le sens d'une sensibilité considérablement affaiblie. On tendra donc très faiblement le fil pour avoir une grande sensibilité. Mais alors :

1) La station se détermine très mal. Ce sont surtout les très bons fils droits qui ont une position de repos tout à fait incertaine.

2) L'ajustage du fil dépend alors essentiellement de l'inclinaison de l'appareil (6). Comme l'instrument lui-même ne fait pas reconnaître les petites inclinaisons, on est facilement exposé à de grandes erreurs par ces faibles tensions.

---

(1) Edelmann, Phys. Zeitschr., 7, 113, 1906.

(2) Cremer, Münchener medizin. Wochenschr., n° 1, 1907.

(3) Lutz, Sitzgsber. d. Bayr. Akad., 37, 61, 1907.

(4) W. Salomonson, Nederlandsche Tijdschr. v. Geneeskunde, 327, 1907.

(5) Lutz, Phys. Zeitschr., 9, 103, 1908, fig. 3, Curve 3.

(6) Lutz, *l. c.*, p. 103.

D'autre part, les fortes tensions rendent la sensibilité très petite. Aussi Lutz ne se sert-il que d'une échelle à 80 divisions, et il ressort de ses indications qu'on ne peut s'en servir dans toute son étendue qu'au risque de rompre le fil.

CHAPITRE II

L'ÉLECTROMÈTRE BIFILAIRE

1. Le principe de l'instrument

Nous avons abandonné l'emploi de fils rigidement fixés à leurs deux extrémités et nous l'avons remplacé par le dispositif suivant. Deux fils sont suspendus tout près l'un de l'autre. Ils sont fixés en haut à un isolateur et tendus, en bas, par un petit bout de papier d'étain. Les fils non chargés sont tendus par ce petit poids constant, et restent ainsi à une certaine distance l'un de l'autre. Ce qu'il y a d'essentiellement nouveau dans cet appareil et ce qui le rend si évidemment supérieur à l'instrument à fils fixés aux deux extrémités, c'est précisément que l'extrémité inférieure du fil peut légèrement se relever dès que l'écart se produit.

Cela permet d'obtenir une sensibilité uniforme sur une grande étendue. Aussi a-t-on pu appliquer une échelle de 160 divisions et s'en servir dans toute son étendue sans aucun risque de rompre les fils. L'appareil en effet ne fonctionne pas avec des courbures fortuites, mais, au contraire, le principe même de la construction rend les fils mobiles.

Deux formes d'exécution de cet appareil ont fait leur preuve et chacune présente certains avantages sur l'autre pour des usages déterminés.

2. La première forme d'exécution

La première forme est représentée par la figure 1.

Sur un trépied à vis calantes, s'élève une cage rectangulaire de 7,5 cm. de large, de 6,5 cm. de profondeur et de 10,5 cm. de hauteur. Cette cage entoure complètement les fils en laissant libre une petite fenêtre par où pénètre la lumière. Pour atteindre l'intérieur, on peut d'ailleurs dévisser la paroi antérieure et la paroi postérieure.

Les fils sont portés par un bouchon d'ambre B traversant la paroi supérieure. Le porte-fils traverse le bouchon et le surmonte sous forme d'un petit tuyau de 2 cm. de long. Ce tuyau sert à recevoir le crayon en cas de charge constante, ou bien les divers corps de dispersion au cas de recherches sur l'atmosphère ionisée ou sur les substances radioactives.

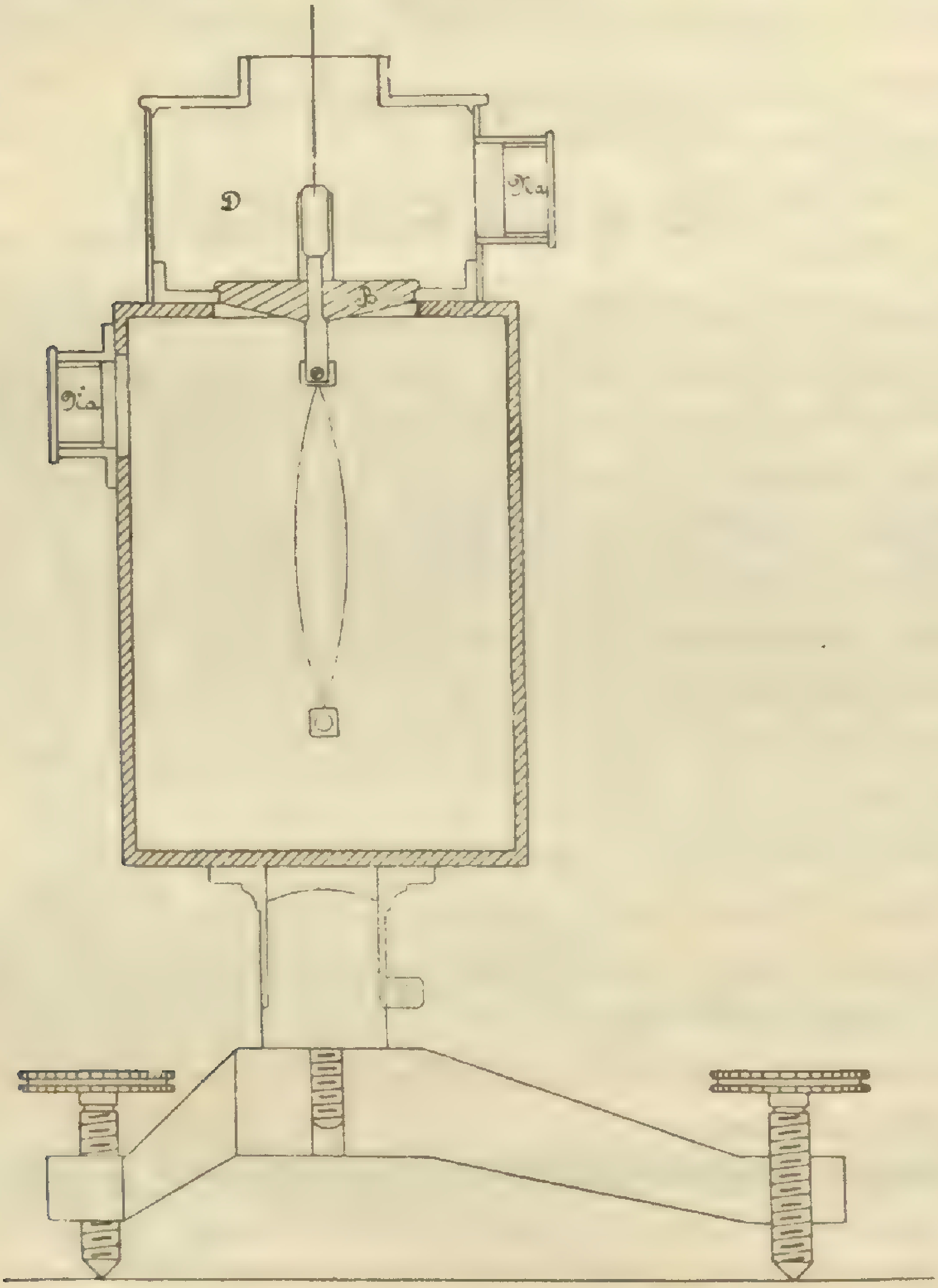


Fig. 1.

Les fils ont 6 cm. de long et 0,002 à 0,01 mm. de diamètre, selon la sensibilité désirée. On ne pouvait employer les fils de quartz couverts par une substance hygroscopique, car ils n'auraient pas permis le séchage complet de l'intérieur. D'autre part, les fils de platine à la Wollaston de 0,001 à 0,01 mm. de diamètre n'étaient pas parfaitement élastiques. Après quelques déformations notables, ils ne retournaient pas tout à fait à leur position première de station. A cause de l'argenture les fils de quartz perdent beaucoup de leur mobilité. Dans l'entretemps Bestelmeyer (1) avait obtenu sur les fils une couche de platine très fine, fort solide et bien uniforme, en se servant de platine fin comme cathode dans un tube de décharge vide d'air et en mettant les fils dans le voisinage. Les fils rendus conducteurs par cette méthode conservent leur mobilité et leur parfaite élasticité. Aussi semblent-ils être la meilleure matière pour les électromètres à corde (2).

Un microscope est appliqué à la paroi antérieure de la cage. Il est muni d'un tube coulissant qui permet de faire varier à volonté le grossissement entre 70 et 100. Comme un objectif trop rapproché des fils causerait facilement des dérangements, on a pris l'objectif le plus faible et l'oculaire le plus fort possible.

Les fils étant librement suspendus, ils se meuvent, en passant devant le microscope lorsque l'instrument est un peu incliné. On peut se servir de cette circonstance pour ajuster rigoureusement les deux fils à l'aide des trois vis calantes. Non seulement ce réglage est très précis, mais il garantit en outre une position bien déterminée des fils dans l'instrument, ce qui n'est pas sans importance pour la capacité de l'appareil.

Sur la paroi postérieure est placé un petit miroir S, mobile dans tous les sens, pour projeter la lumière latéralement dans l'appareil. On n'est pas obligé de tourner vers la fenêtre l'œil non occupé, ce qui facilite considérablement le travail.

Dans les milieux très humides, comme, par exemple, en cas d'observations dans les cavernes, etc., il arrive que l'isolation ne donne pas tout son effet. Pour ces cas-là, on a prévu deux petits tubes de verre *Na*, *Na*, remplis de sodium et chargés de dessécher l'un la surface interne, l'autre la surface externe de l'isolateur en ambre.

---

(1) Bestelmeyer, ZEITSCHR. F. INSTRUMENTENKUNDE, 25, novembre 1905.

(2) Ces fils n'ont pas pu s'appliquer également bien aux galvanomètres à corde, car la couche métallique extrêmement délicate était déjà brûlée par de très faibles courants.

Quand l'air est bien sec, on peut enlever tout le dessus de l'instrument D. Le système mobile a alors la capacité la plus petite.

De ce que nous avons dit jusqu'ici, il ressort une longue série de propriétés caractéristiques qui distinguent avantageusement cet instrument de l'électroscope à feuilles.

1. Le phénomène du cricri ne se présente plus. L'écartement des fils est uniquement déterminé par la charge, et leur distance l'un de l'autre, à la position de station, est invariablement déterminée par le petit poids tenseur.

2. La lecture de la distance des fils est également précise. Les parallaxes sont absolument exclues. Les bords des fils constituent l'objet d'une lecture très nette. Tandis que l'électroscope à feuilles n'emploie qu'à peu près 30 divisions d'échelle, le présent instrument est muni d'une échelle de 160 traits, dont on apprécie encore les fractions. Comme la lecture des deux fils se fait toujours simultanément, les changements dans la position de station et le défaut de verticalité de l'appareil sont sans influence.

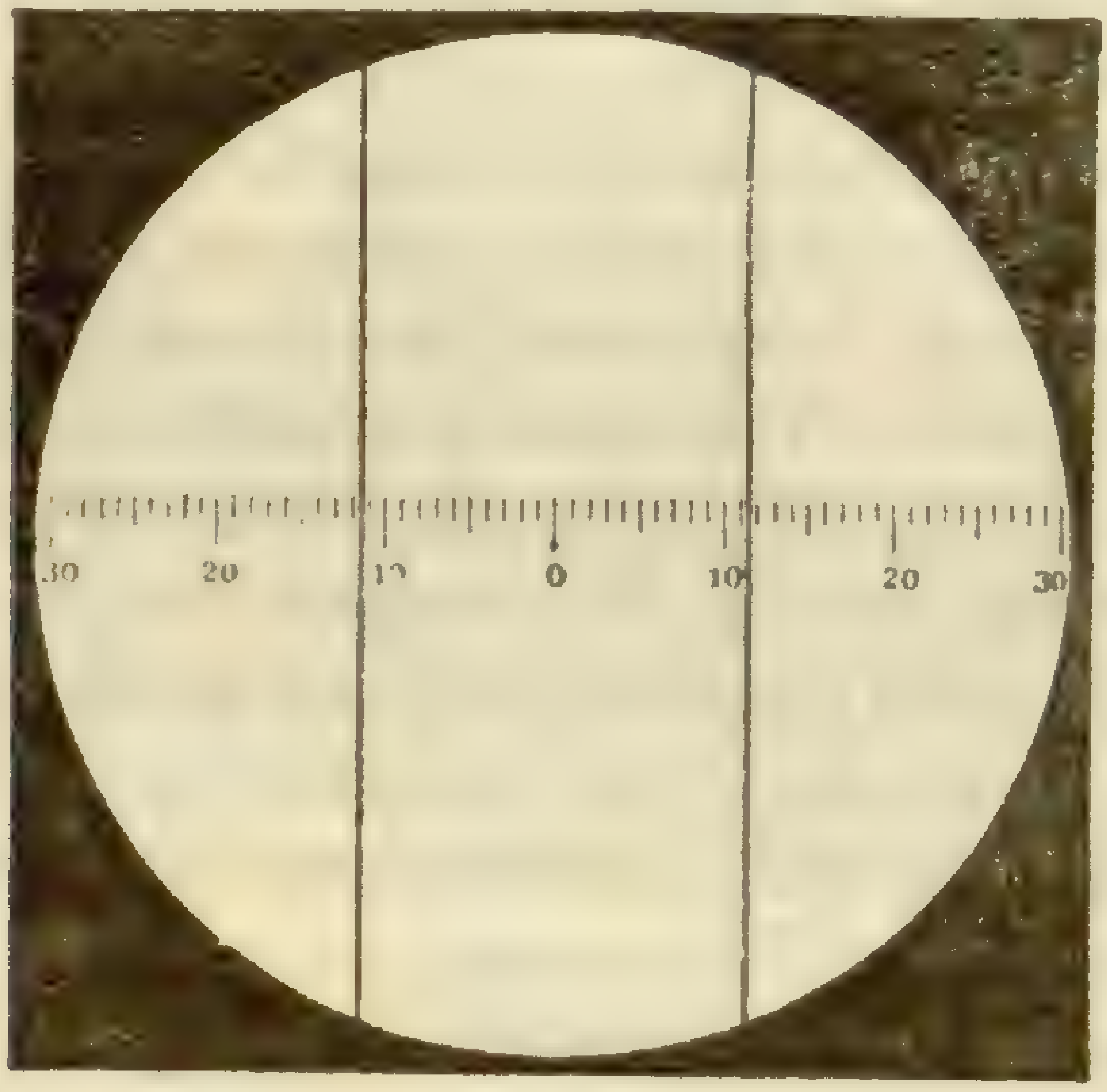


Fig. 2.

Ajoutons à cela que les milieux des fils restent toujours verticaux, c'est-à-dire parallèles aux traits de l'échelle, même aux écarts les plus forts, ce qui simplifie beaucoup la lecture. La figure 2 représente une partie du champ visuel. Il faut s'imaginer ce champ assez étendu pour que l'échelle contienne 80 traits de chaque côté.

3. La sensibilité des appareils peut être variée dans les plus

larges limites. La longueur et l'épaisseur des fils, le petit poids tenseur, l'agrandissement du microscope, tels sont les facteurs déterminants de la sensibilité. La construction d'appareils à faible sensibilité et à vaste champ de mesure, présente le moins de difficulté. Ces appareils travaillent avec la plus haute précision. La limite supérieure de charge admissible n'est point non plus fixée par les propriétés mécaniques du matériel, mais elle réside dans cette particularité, que la charge électrique part des fils fins à cause du rayonnement quand la densité de la charge est trop élevée. Cette limite est de 1500 volts environ. C'est donc jusqu'à près de 1300 volts que l'isolation est très bonne et que ces appareils permettent des mesures tout à fait sûres.

Les tensions les plus usitées pour les recherches sur la radioactivité et sur l'électricité atmosphérique sont comprises entre 100 et 300 volts. Cet instrument convient précisément à ces tensions.

Quand il s'agit de la plus haute sensibilité possible, on peut actuellement construire des appareils donnant déjà un écart de 160 divisions d'échelle pour 50 volts à peu près et dont la sensibilité est par conséquent de 3 à 4 traits par volt.

Nous traiterons plus loin avec plus de détails quelques autres points tels que la proportionnalité de l'écart, la grandeur et la constance de la capacité, les oscillations des fils.

Il ne sera plus question ici que de la facilité de transport de l'appareil. Il va sans dire que c'est là une condition extrêmement importante dans un instrument de ce genre. Quant au poids, l'emploi d'un métal léger comme le « magnalium » pour la construction de la cage permet de l'abaisser tellement que l'appareil tout entier ne pèse plus qu'à peu près 800 grammes, sans le pied. Dans les excursions scientifiques pendant lesquelles on travaille la plupart du temps en plein air, il est pratique de poser l'appareil sur un pied photographique. Il est alors inutile d'emporter le trépied à vis calantes.

On a besoin d'un dispositif d'arrêt des fils pour le transport. On avait choisi à cet effet un simple fil de quartz horizontalement tendu qui traversait, par une ouverture, la petite feuille d'étain. Cette ouverture était assez grande pour que les fils ne touchassent nulle part quand l'appareil était debout. Quand ensuite on le renversait, le fil d'arrêt recevait la petite feuille de papier d'étain et protégeait ainsi le système des fils tout entier pendant le transport. Ce dispositif ne laissait rien à désirer sous le rapport de la simplicité et fonctionnait automatiquement. Mais parfois les fils semblaient tout dérangés après le transport et ne rentraient plus simultanément et nettement dans le champ visuel. En examinant de plus près, on remarqua que le fil d'arrêt s'était chargé d'électricité par le frottement de la petite feuille de papier d'étain : il l'attirait, et l'empêchait de pendre librement. Cela n'a aucune importance pour les appareils peu transportés et servant surtout aux recherches de laboratoire, car la charge se perd toute seule au bout de quelque temps. Malgré cela, le besoin d'un appareil de transport plus facile et plus sûr se faisait sentir pour maint usage. Ajoutons à cela que les observations sur les navires ou en ballons deviennent de plus en plus indispensables de nos jours et que cet instrument y refuse presque complètement tout service. Ces considérations ont conduit à la construction d'un instrument légèrement modifié et basé sur le même principe. Décrivons-en ici brièvement les propriétés.

3. La deuxième forme d'exécution

La *deuxième forme principale* est donnée par la coupe de la figure 3. La différence consiste surtout en ce que les fils sont tendus non pas par un petit poids, mais par un ressort élastique Q, très fin. C'est un étrier en simple fil de quartz qui a fait ses preuves comme ressort, et dont les propriétés sont réellement idéales. Le fil de quartz est probablement la seule matière qui ne montre absolument aucune déformation permanente. Ajoutons à cela que le quartz est l'un des meilleurs isolateurs de l'électricité. La coupe transversale étant très petite et la longueur très grande, dans le cas spécial qui nous occupe, l'isolation est excellente. Il ressort immédiatement de la figure que cet appareil est toujours transportable, sur-le-champ, même à l'état de charge ; que tout changement de direction ou embrouillement des fils n'est plus à craindre et que, grâce à leur fixation élastique, les fils peuvent résister même à de violentes secousses pendant le transport. La meilleure preuve qu'il en est ainsi est bien que nous ayons pu faire des observations sur les hautes montagnes, l'été de 1908, avec un tel appareil. Le transport par chemin de fer, puis à dos de mulet et enfin simplement dans le bissac s'est fait sans aucun trouble pour l'appareil. Il était toujours prêt à servir au lieu où devait se faire l'observation. Même à l'état de charge il pouvait se transporter des heures entières dans le bissac. C'est ainsi qu'on pouvait faire en marche même les déterminations d'isolation qui autrement prennent tant de temps. La charge et la première lecture se faisaient avant de se mettre en marche, puis on fourrait simplement l'instrument dans le bissac, et la deuxième lecture n'avait lieu qu'au bout de plusieurs heures de marche même dans des moraines et des glaciers ou après l'ascension des sommets en question. Après toutes ces fatigues, l'instrument était aussi sûr qu'auparavant.

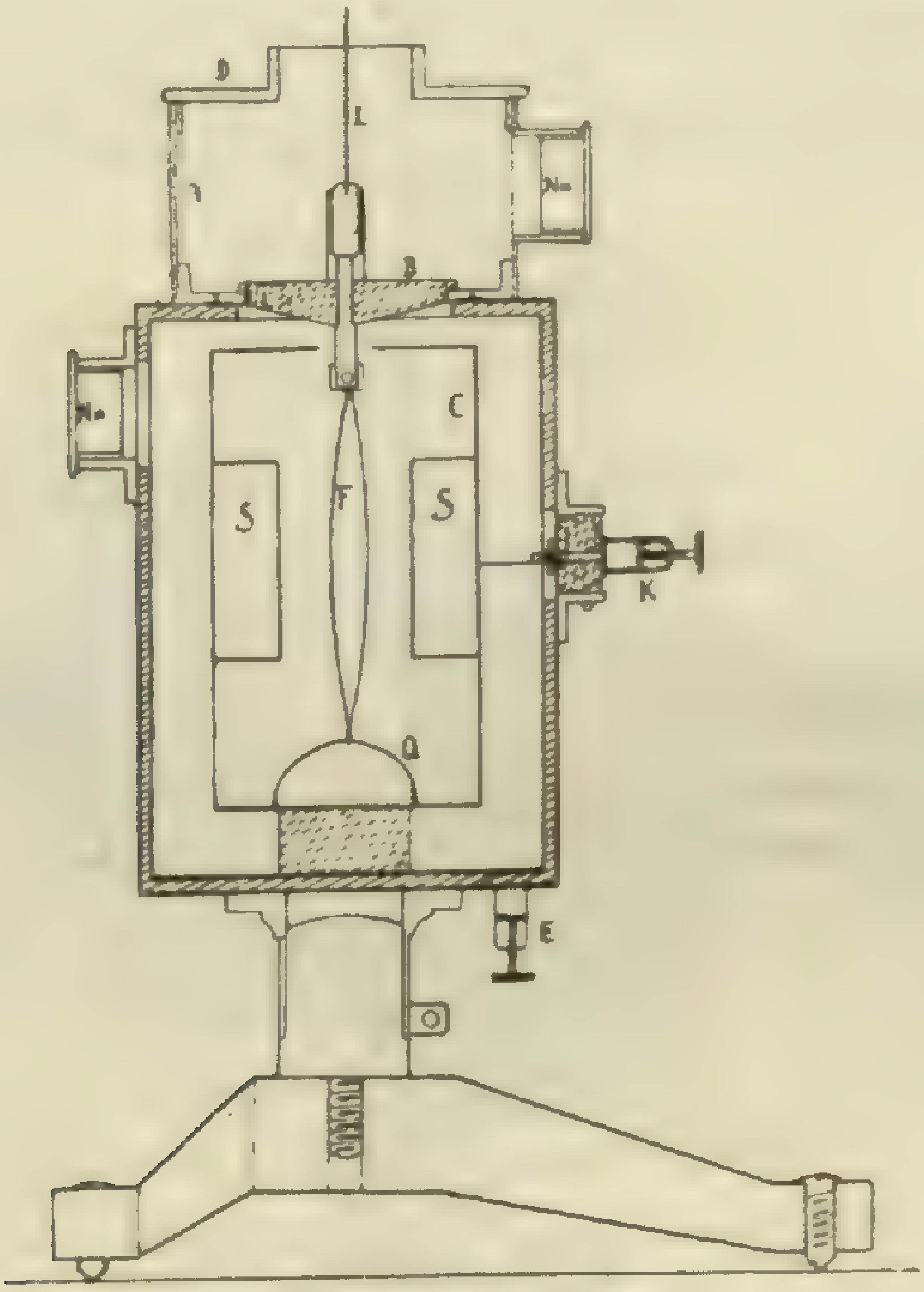


Fig. 3.

Ce mode de fixation des fils a entraîné quelques autres modifications de moindre importance dans la construction. L'ajustage est maintenant indépendant de l'inclinaison de l'appareil. Aussi les vis du pied ne peuvent-elles plus servir à amener les fils devant le microscope. Elles ont donc simplement disparu. Le microscope est fixé à la cage à l'aide d'un chariot par lequel on peut le déplacer latéralement de quelques millimètres pour amener les fils au milieu du champ visuel par la vis V_2 (Fig. 4). Le déplacement axial se fait en tournant une bague à fente en forme de vis V_1, dans laquelle entre comme conducteur un pivot venant du microscope.

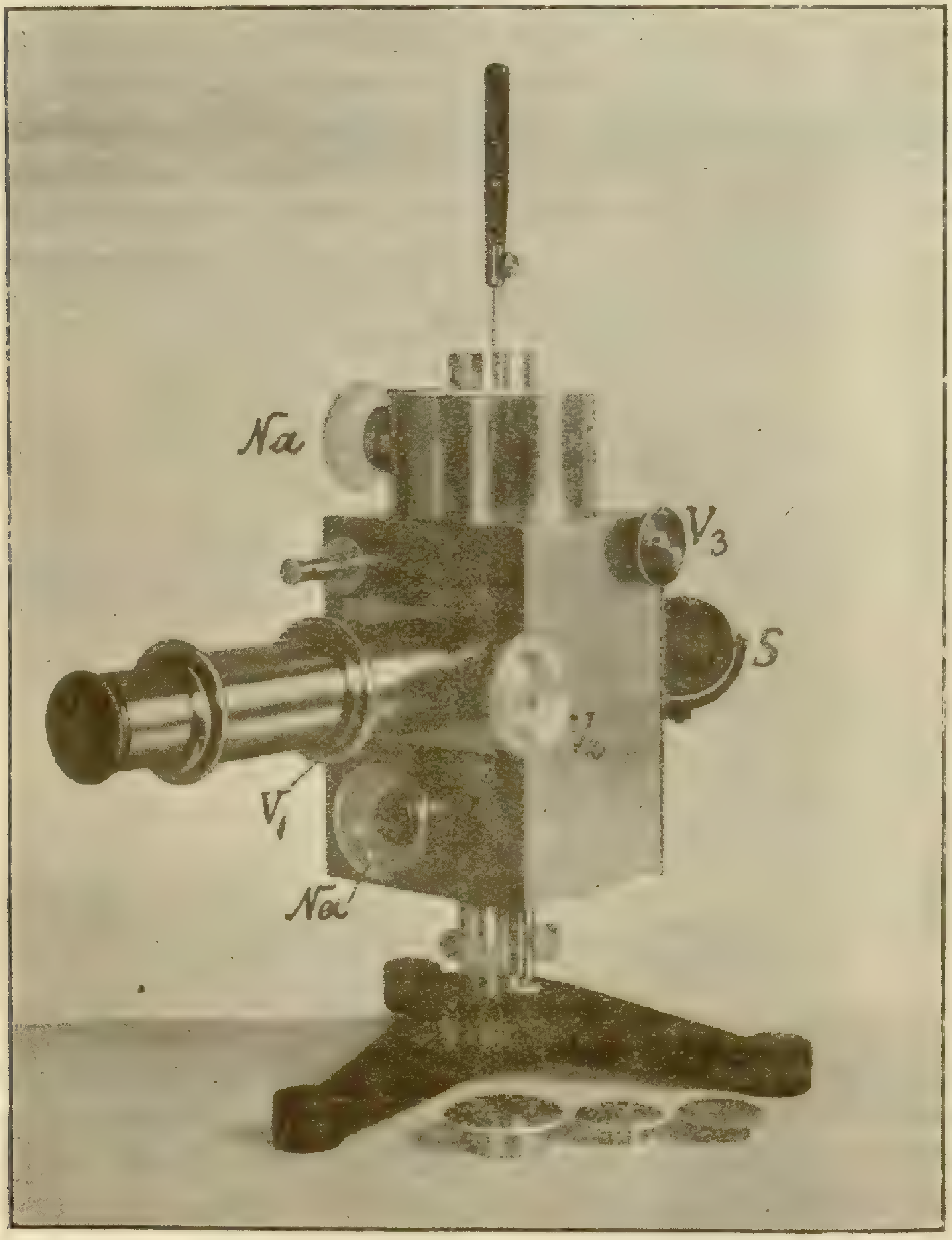


Fig. 4.

Cette forme d'exécution présente pourtant un désavantage sur la première. Les écarts ne sont plus indépendants de la température. En effet, le coefficient de dilatation des fils de quartz étant pratiquement nul, tandis que celui de la cage a une valeur différente de zéro, la tension et, par suite, la sensibilité doivent varier suivant la température. Mais on a facilement trouvé une compensation, car on possède dans l'acier au nickel un alliage dont le coefficient de dilatation est également fort petit. On a donc fixé la boucle inférieure à une baguette en acier au nickel qui descend de la paroi supérieure de la cage (elle n'est pas dessinée dans la figure). En cas de variations de la température, l'extrémité inférieure de cette baguette reste à la même distance du point d'attache supérieur des fils.

Un dernier perfectionnement a pour but de remettre sûrement le plan des fils dans la position perpendiculaire à l'axe du microscope. Cette position exacte est essentielle. Car autrement il est impossible de voir les deux fils simultanément bien nets au microscope. Pour y arriver, on mastique le bouton d'ambre dans un anneau métallique, dont la partie inférieure se prolonge un peu dans la cage de l'appareil et y porte un engrenage. La vis V_3 (Fig. 4) permet d'entraîner le bouton d'ambre avec le porte-fils en rotation autour d'un axe vertical, jusqu'à ce qu'on puisse voir bien nettement les deux fils à la fois dans le microscope.

Les fils sont alors retenus dans cette position par deux couteaux S, S (Fig. 3), placés des deux côtés à la même distance des fils. Constamment reliés à la terre, ils sont chargés par les fils eux-mêmes par induction ; c'est cette charge par induction qui maintient ensuite les fils dans le plan convenable, même quand un échauffement non uniforme amène de petits courants d'air dans la cage. Ces couteaux augmentent d'ailleurs la sensibilité. La distance des couteaux aux fils est prise assez grande pour que tout contact soit exclu en cas de charge trop forte ou pendant le transport, sauf toutefois les instruments de plus grande sensibilité.

Enfin il est très facile d'appliquer aux appareils de ce genre un dispositif permettant de varier la tension des fils. En effet, si on rend déplaçable le porte-boucle, le ressort Q peut se tendre à volonté. On obtient même à l'aide de l'étrier en quartz une tension beaucoup plus lente et plus uniforme que dans les instruments dans lesquels l'extrémité du fil est directement saisie.

Toutefois nous pensons que : 1° le champ de mesure de 160 divisions d'échelle surtout avec le double grossissement microscopique et le conducteur auxiliaire dont il va être question tout à l'heure, suffira réellement dans la plupart des cas. Qu'on songe aux multiples services qu'a déjà rendus et que rend encore continuellement l'électroscope à feuilles, et pourtant notre instrument peut avoir un champ de mesure 6 à 8 fois plus grand avec la même sensibilité et avec une bien plus grande précision. 2° Le réglage continuel de la tension est souvent la cause d'inexactitudes et d'erreurs. Il faut un jaugeage spécial à chaque tension. Mais il vaut évidemment beaucoup mieux que le jaugeage de l'appareil soit fait par le fabricant qui est muni des instruments de précision spécialement destinés à cet usage. Un champ de mesure bien déterminé, même s'il est un peu plus petit, est beaucoup plus précieux qu'un grand champ mal déterminé. Mais admettons qu'un instrument soit bien jaugé pour toutes les tensions, il pourra cependant facilement arriver, surtout aux rapides observations en plein air, qu'on fasse inexactement l'ajustage ou qu'on doute ensuite de la tension qui convient à chacune des observations.

Le seul cas dans lequel les fils susceptibles d'être tendus soient indispensables est celui où l'on se sert de l'instrument comme d'un oscillographe. Mais nous traiterons plus tard ce sujet dans un chapitre spécial.

CHAPITRE III

SUR LA THÉORIE DE L'ÉLECTROMÈTRE BIFILAIRE

Le développement de la théorie complète de l'électromètre décrit ici exigerait la solution du problème de la distribution de l'électricité sur les fils. Tant que ce problème ne sera pas résolu, le mode d'action de l'instrument ne pourra se développer qu'approximativement et incomplètement. Ce qui suit contient donc plutôt quelques remarques de détail sur la théorie que la théorie elle-même. Elles permettront pourtant de jeter un coup d'œil sur le mode d'action de l'appareil, et elles ont été en effet déterminantes pour le choix convenable des meilleures dimensions de certaines parties.

On peut chercher à résoudre le problème de deux manières. Ce sera ou bien un problème d'équilibre entre les forces électriques et les forces mécaniques du système mobile, ou bien un problème d'énergie entre le travail mécanique fourni à la déformation et l'énergie électrique dépensée. Pour plus de simplicité, on supposera toujours un appareil de la première forme, c'est-à-dire à tension constante à l'aide d'un petit poids.

1. L'équilibre des forces agissantes

L'ajustage des fils se fait évidemment à chaque charge de façon que les forces électriques écartant les fils fassent équilibre aux forces mécaniques du petit poids tenseur et de l'élasticité des fils qui tendent à les ramener à la position de station.

Pour déterminer tout d'abord la force avec laquelle la charge électrique écarte les fils, admettons que la longueur des fils est de 60 mm. et leur diamètre de 0,003 mm.; le rapport de la longueur à l'épaisseur est alors de 60 : 0,003 = 20 000. On peut donc avec grande approximation considérer les fils comme des cylindres infiniment minces. Si un tel cylindre reçoit une charge σ par centimètre, le potentiel d'un point à la distance verticale r de l'axe du cylindre est

$$V = 2\sigma \text{ log. nat. } \frac{c}{r},$$

où c est une constante sans importance, car elle disparaît sur-le-champ. En effet, on a encore pour la force sur l'unité électrique en ce point (intensité du champ)

$$-\frac{dV}{dr} = \frac{2\sigma}{r}.$$

Par conséquent, la force sur l'unité de longueur de l'autre fil portant la charge σ est $\frac{2\sigma^2}{r}$. Cela serait rigoureusement exact pour deux cylindres droits infiniment longs se trouvant à la distance r l'un de l'autre. Cela est également correct dans de très longs cylindres pour tous les points de l'un des deux d'où les extrémités de l'autre sont vues presque sous l'angle 2R. C'est ce qui arrive dans notre cas dans presque toute la longueur des fils par des écarts de 1 à 2 mm.

La densité de charge σ est constante au milieu de très longs cylindres pour leur plus grande partie. Elle serait plus forte aux extrémités libres. Mais comme celles-ci n'existent point dans notre cas, puisque le porte-fils (voir Fig. 1) fait suite aux fils en haut, et que la petite plaque se joint aux fils en bas, la charge sera au contraire beaucoup plus faible aux extrémités. Mais comme cette charge plus faible est partiellement compensée aux extrémités par le plus grand rapprochement des fils et que du reste la forme du système des fils s'altère le moins quand les extrémités seules éprouvent une répulsion un peu différente, nous pouvons supposer, sans grande erreur, que tous les points du fil éprouvent la même répulsion horizontale que les parties moyennes, c'est-à-dire $\frac{2\sigma^2}{r}$ par unité de longueur.

Lorsque les fils s'écartent sous l'action des forces électriques, la répulsion électrique s'affaiblit à cause de la distance plus grande. Les forces répulsives, la tension du petit poids et l'élasticité agissent plus énergiquement et il s'établit constamment un état d'équilibre. L'action du petit poids augmente (comme celle d'une corde de piano ou de violon) avec l'éloignement de la position de station à la première puissance, et l'élasticité des fils agit de même. On n'a donc pas besoin de les traiter tous les deux séparément, l'ajustage se fera précisément comme si les petits poids étaient plus lourds et les fils absolument mobiles.

Après ces simplifications, nous nous trouvons en face du problème de la chaînette, qui aurait tourné de 90°. Au lieu du poids de la chaîne par unité de longueur, nous avons la répulsion horizontale de l'unité de longueur $\frac{2\sigma^2}{r}$ et, au lieu de la tension horizontale de la chaîne, la tension du petit poids descendant.

On sait que l'équation de la courbe funiculaire est

$$y = \frac{h}{2}\left(e^{\frac{x}{h}} + e^{-\frac{x}{h}}\right)$$

où l'axe y passant par l'origine de la courbe est en même temps axe de symétrie, tandis que l'axe x lui est perpendiculaire à la distance h de la tangente au sommet.

Le paramètre h représente alors le rapport de la tension horizontale au poids de l'unité de longueur, c'est-à-dire, dans le cas présent, le rapport de la tension $\frac{mg}{2}$ (m étant la masse du petit poids tenseur) à $\frac{2\sigma^2}{r}$, force agissant sur l'unité de longueur, c'est-à-dire

$$h = \frac{mgr}{4\sigma^2}.$$

D'où il résulte que la distance du milieu des fils à la position de station est égale à la distance (Fig. 5)

$$\begin{aligned} \mathrm{AE} &= y_{x=\frac{l}{2}} - y_{x=0} \\ &= \frac{h}{2}\left(e^{\frac{l}{2h}} + e^{-\frac{l}{2h}}\right) - h, \end{aligned}$$

où l est la longueur d'un fil.

Comme il ne s'agit toujours ici que de petites déviations de la position de station, il est pratique de développer les fonctions exponentielles en séries et on obtient alors, en tenant compte des termes du premier jusqu'au troisième ordre,

$$\mathrm{AE} = \frac{l^2}{4h} = \frac{l^2\sigma^2}{mgr}.$$

La grandeur AE est également en relation avec l'écart n lu au microscope. Mesurée en unités du micromètre oculaire, la grandeur $\mathrm{AE} = \frac{1}{2}(n - a)$, où a représente la distance réciproque des fils à la position de station.

Mesurée en unités du micromètre oculaire, $r = cn$, c signifiant la valeur d'une division d'échelle en mm. On a ainsi

$$\frac{n - a}{2} = \frac{l^2\sigma^2}{mgcn}$$

ou bien

$$n = \frac{a}{2} + \sqrt{\frac{2l^2\sigma^2}{mgc} + \frac{a^2}{4}}.$$

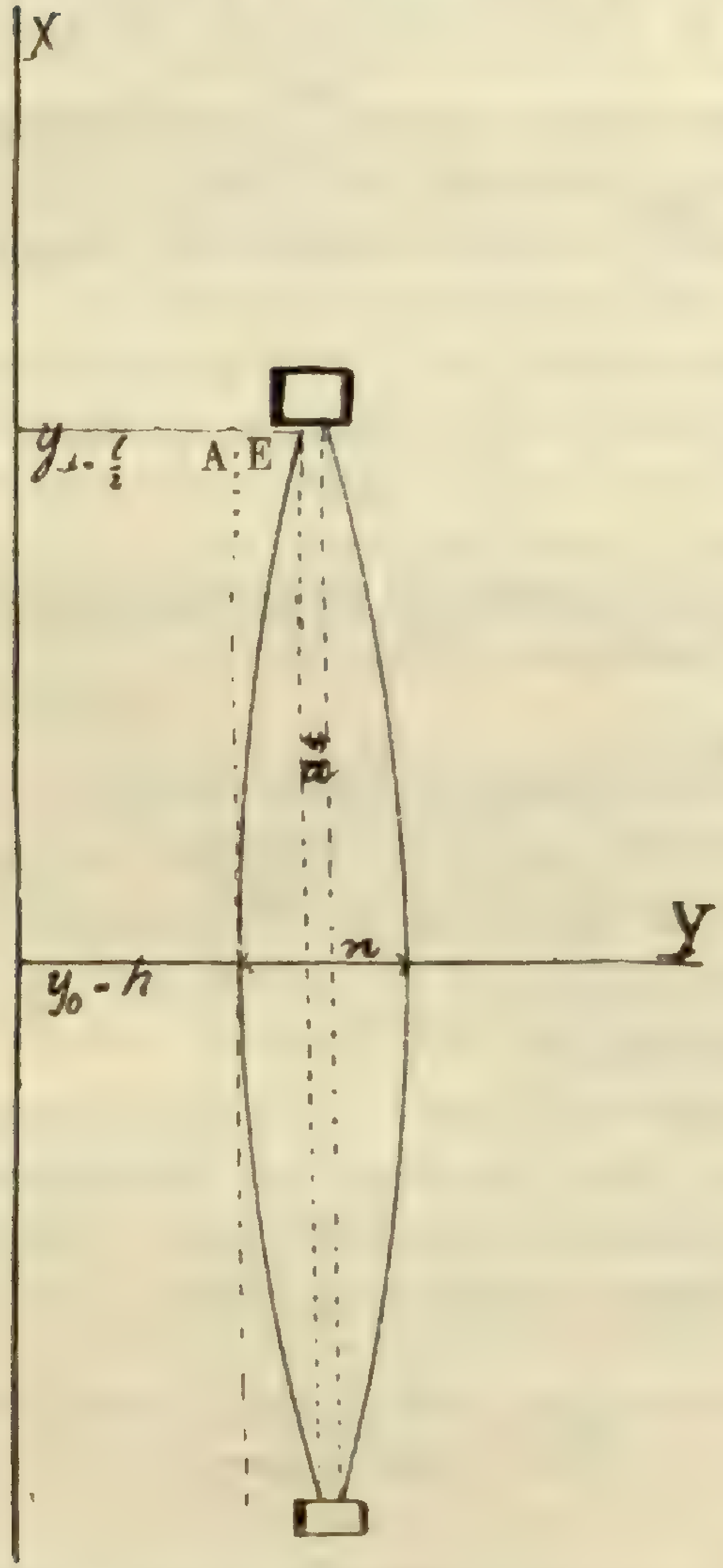


Fig. 5.

Si enfin nous posons, pour avoir des grandeurs mieux mesurables que la densité de charge σ,

$$\sigma = \frac{Q}{2l},$$

où Q est la charge totale des fils, nous avons

$$n = \frac{a}{2} + \sqrt{\frac{Q^2}{2mgc} + \frac{a^2}{4}}.$$

Mais le jaugeage se faisant ordinairement en volts, on posera mieux

$$Q = C_1 V$$

où C_1 est la capacité des fils et V leur potentiel.

On a alors

$$n = \frac{a}{2} + \sqrt{\frac{C_1^{\,2}}{2mgc} V^2 + \frac{a^2}{4}}. \tag{1}$$

Si nous comparons cette courbe à la courbe de jaugeage trouvée expérimentalement, nous constatons qu'elle suit réellement son cours normal. Pour les toutes petites charges, V = 0, elle représente une parallèle à l'axe V si on considère n et V comme coordonnées et les autres grandeurs comme constantes. Pour des valeurs de V assez grandes pour qu'on puisse négliger les termes en a, l'équation ci-dessus donne la proportionnalité entre n et V, ou une droite à travers le point initial.

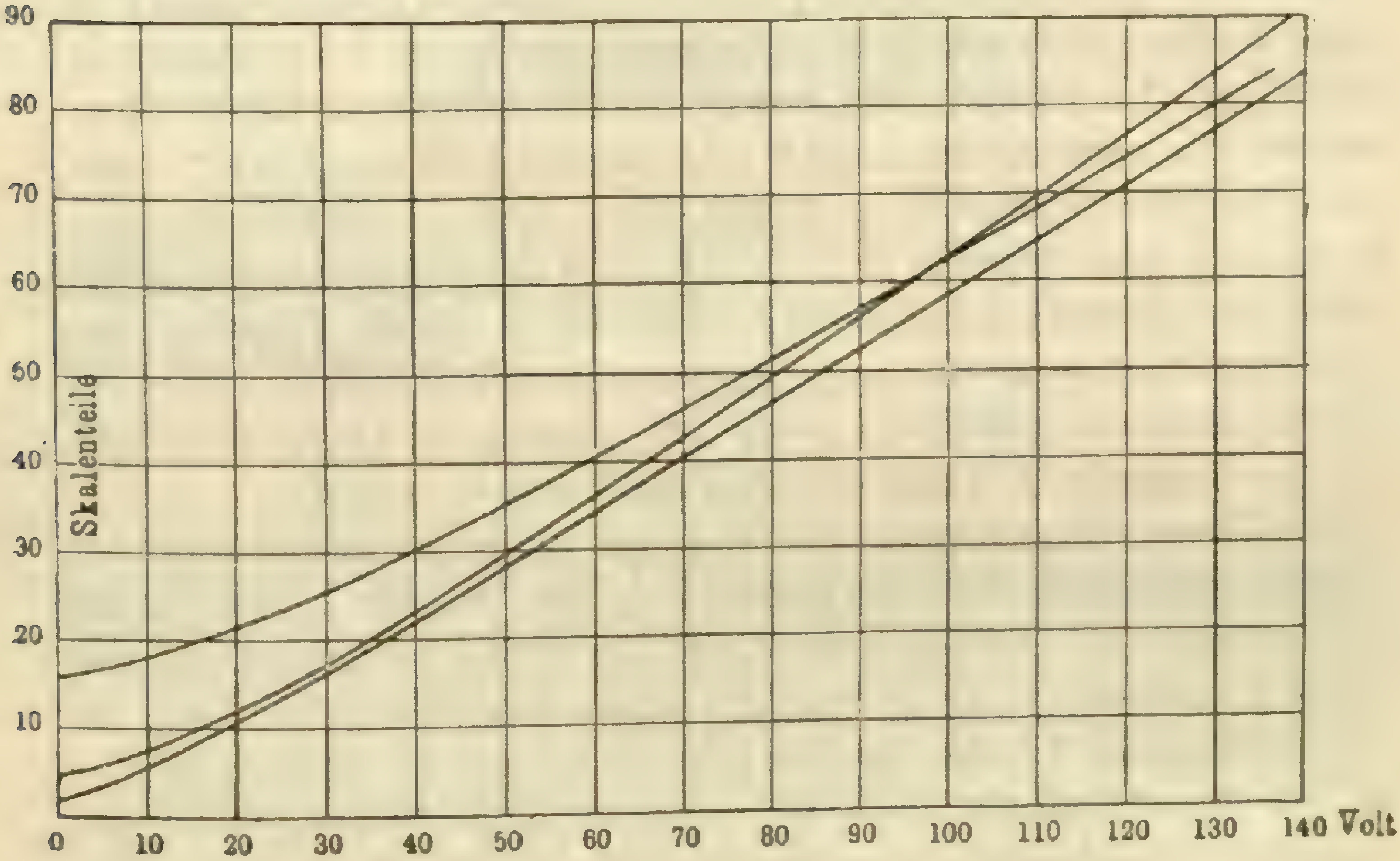


Fig. 6.

La courbe V réellement trouvée (voir Fig. 6) est bien approximativement, mais non point rigoureusement, une droite ; la sensibilité augmente encore un peu avec les écarts. Cela répond également à la formule ci-dessus, si nous nous rappelons que la capacité C_1 augmente en même temps que V et l'écart. Mais la formule (1) ne contenant rien sur la valeur de l'altération de la capacité, on ne peut pas attendre une concordance parfaite entre la théorie et l'expérience.

La formule (1) contient encore le rapport entre la sensibilité et le petit poids tenseur mg. Pour les grands écarts, permettant de négliger les termes en a, elle indique qu'au même potentiel V l'écart n est inversement proportionnel à la racine carrée de la tension.

On a fait quelques essais pour la vérification de ce rapport. A l'aide de fins petits crochets métalliques pesés, on a fait varier la tension de 3,7 jusqu'à 122,5 mgr. ; on a ensuite, à l'aide d'une batterie d'accumulateurs, établi une tension telle que l'écart tombait presque toujours à la même place dans la partie en ligne droite et la plus sensible de la courbe. De deux observations différentes de quelques divisions d'échelle, on a calculé l'agrandissement de l'écart pour une augmentation de tension d'un volt et on l'a pris comme sensibilité A pour cette charge m. Dans ces conditions, la formule (1) exige que l'on ait $A\sqrt{m} = \text{const.}$

Le tableau suivant montre qu'il en est réellement ainsi. Comme il était impossible de déterminer le poids des fils mêmes et du petit crochet fixé avec du mastic, on détermina indirectement par ajoute d'un nouveau petit crochet comme d'ordinaire la valeur de ce poids auquel il fallait encore faire l'addition de l'élasticité des fils. La force démonstrative de ce tableau consiste donc en ce que les trois dernières valeurs concordent bien entre elles.

TABLEAU I

m	$\sqrt{m}$	A	$A\sqrt{m}$
3,71	1,926	0,652	(1,257)
31,5	5,613	0,224	1,257
70,5	8,396	0,147	1,234
122,5	11,067	0,113	1,251

Enfin la formule (1) contient encore l'influence de la distance des fils a. Cette influence se fait d'autant plus sentir que V est plus petit. Mais plus a est grand, plus aussi l'autre terme sera en retard sur lui et plus, par conséquent, la partie initiale et moins sensible de la courbe sera grande. Comme cette dépendance est formellement de nature un peu plus compliquée, il suffira de donner ici quelques courbes de jaugeage (Fig. 6), avec différentes valeurs de a à la même échelle. On voit réellement que plus les courbes commencent près de zéro, plus elles prennent rapidement leur cours normal avec une sensibilité plus grande.

2. Travail des forces agissantes

La considération des conditions d'énergie fournit une seconde méthode explicative du mode d'action de l'appareil.

Un conducteur de capacité C_0 chargé au potentiel V possède l'énergie électrostatique

$$W_0 = \frac{1}{2} C_0 V^2$$

si le corps est rigide. S'il ne l'est pas, il sera généralement déformé par les forces électriques ; c'est ainsi que tourne l'aiguille d'un électromètre à quadrant. Les forces électriques fournissent toujours alors un travail, le potentiel baisse et la capacité augmente. Si nous nous imaginons le système mobile relié pendant ce travail à une source électrique au potentiel constant V_0, la quantité d'électricité Q au potentiel V_0 se communiquera pendant le mouvement au système mobile et lui apportera un accroissement d'énergie de

$$\Delta W = QV_0.$$

La grandeur de cette charge Q dépend du changement de capacité qui s'attache au mouvement ; si ce changement est $C_1 - C_0$, on aura

$$Q = (C_1 - C_0) V_0,$$

et, par conséquent,

$$\Delta W = (C_1 - C_0) V_0^2.$$

A la fin du mouvement, la provision d'énergie électrique est

$$W_1 = \frac{1}{2} C_1 V_0^2.$$

L'accroissement d'énergie électrique du système n'a donc été que de

$$W_1 - W_0 = \frac{1}{2}(C_1 - C_0)V_0^2$$

et par conséquent l'autre moitié de l'énergie enlevée à la source V_0 a été immédiatement dépensée en travail pendant le mouvement. Le travail mécanique effectué est (¹)

$$\Delta W_1 = \frac{1}{2}(C_1 - C_0)V_0^2. \tag{2}$$

Si l'on peut maintenant calculer d'une autre manière la valeur de ΔW_1 par les forces mécaniques et par la déformation, on a de nouveau un rapport entre n et V.

Le travail mécanique consiste en ce que le petit poids m est légèrement relevé. Cherchons comment le trajet ϵ de m dépend de l'écart n.

Les écarts étant fort petits relativement à la longueur des fils, nous pouvons considérer, en première approximation, la forme des fils déformés comme des portions d'un cercle (Fig. 7). Si a est encore la distance des fils en station, une déviation de chaque fil séparé $\frac{n-a}{2} = CD$ correspondra à l'écart n. Si la longueur totale du fil est l, nous aurons pour le rayon de courbure, en négligeant les puissances plus élevées,

$$R = \frac{l^2}{2(n-a)}.$$

La longueur d'arc AB est égale à l. Si s désigne encore la corde tout entière, on cherchera $\epsilon = l - s$.

(¹) On sait que ces lois ont été déduites, sous une forme tout à fait générale et pour la première fois en 1873, par J. Cl. Maxwell dans son célèbre *Treatise on Electricity and Magnetism.*

Si α est le demi-angle au centre, on a $\sin \alpha = \frac{s}{2R}$. Nous avons, d'autre part,

$$\text{arc AC} = \frac{l}{2} = R \text{ arc } \sin \frac{s}{2R}$$

ou bien

$$\sin \frac{l}{2R} = \frac{s}{2R}.$$

Si on développe le sinus en une série de puissances fort convergente ici à cause de la petitesse de l'angle, nous avons, en tenan compte des deux premiers termes,

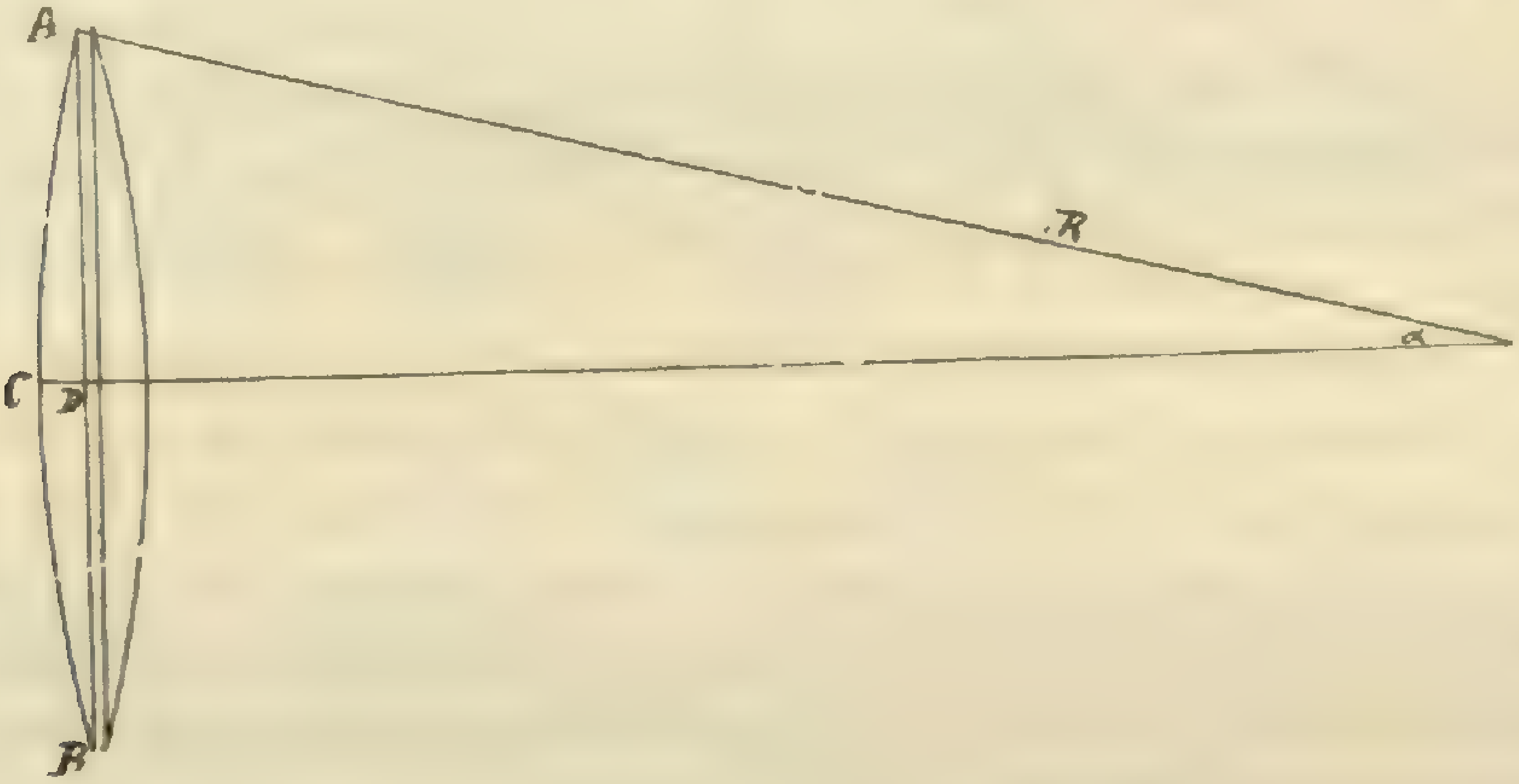


Fig. 7.

$$\frac{s}{2R} = \frac{l}{2R} - \frac{1}{3!} \frac{l^3}{8R^3},$$

et, par conséquent,

$$l - s = \frac{l^3}{24R^2},$$

ou bien, en remplaçant R par sa valeur,

$$\epsilon = l - s = \frac{(n-a)^2}{6l}.$$

A un écart n correspond donc comme travail relevant le petit poids :

$$\Delta W_1 = \frac{mg}{6l}(n-a)^2. \qquad (3)$$

La force avec laquelle le petit poids cherche à ramener les fils en direction *horizontale* est

$$\frac{dW_1}{dn} = \frac{mg}{3l}(n - a). \tag{4}$$

Elle est simplement proportionnelle à l'écart à la première puissance.

Il faudrait encore ajouter à cela le travail contre les forces élastiques. Mais puisqu'elles agissent proportionnellement à la première puissance de la déformation, comme on le sait par la théorie des cordes vibrantes, elles ne changent rien au cours de l'écart, et elles ont simplement pour effet de faire paraître le petit poids m un peu plus grand qu'il ne l'est en réalité. Si nous entendons désormais par m cette valeur corrigée, nous trouvons de (2) et (3)

$$n - a = V\sqrt{\frac{3l}{mg}(C_1 - C_0)}. \tag{5}$$

Cette équation répond également, en général, à la réalité. Elle comprend beaucoup moins d'hypothèses que la première. Sur la distribution de l'électricité dans les fils, elle ne fait aucune supposition. La seule approximation qu'elle comporte est que la forme des fils peut se concevoir comme une partie de ligne circulaire ; tout le reste est rigoureusement exact.

Par contre, cette équation contient un élément absolument indéterminé, à savoir l'altération de la capacité avec l'écart. Elle indique qu'à l'augmentation de l'écart la sensibilité augmentera lentement, $\sqrt{C_1 - C_0}$. Ces deux formules attirent donc simultanément l'attention sur la grande importance de la capacité et de l'altération de la capacité pour l'intelligence de l'appareil. Aussi consacrerons-nous un chapitre spécial à ce point.

CHAPITRE IV

L'ÉLECTROMÈTRE A CONDUCTEUR AUXILIAIRE

1. Défauts de l'instrument simple

Les appareils décrits jusqu'ici ont encore deux points susceptibles de perfectionnement. Ils n'indiquent que le montant de la charge et n'en donnent pas le signe. Si donc on veut observer des phénomènes pour lesquels on n'est pas sûr d'avance du signe, on ne peut se servir de l'électromètre sous la forme décrite jusqu'ici. La chute du potentiel de l'électricité atmosphérique a, par exemple, la plupart du temps, le même signe, surtout par beau temps. Mais il se présente parfois des inversions, surtout par temps de pluie. Ou bien, si on voulait examiner avec cet appareil la forme d'un courant alternatif, la partie négative de la courbe ne se distinguerait en rien de la partie positive. Toutes deux se trouveraient du même côté de la ligne neutre, au lieu d'être de part et d'autre.

Un deuxième défaut a été corrigé en même temps que le premier. Il consiste en ce que la sensibilité est considérablement moindre pour les petits potentiels, de sorte qu'un appareil indiquant 160 volts au maximum et possédant, par conséquent, une sensibilité moyenne d'un trait par volt demande une tension de 5 volts pour le premier trait d'écart.

Le dispositif dont on va lire la description corrige ces deux défauts d'une manière fort simple et parfaite.

2. Pensée fondamentale pour obvier à ces défauts

Voici le principe de ce dispositif (voir Fig. 8).

Si on applique à droite et à gauche des fils de l'appareil simple les conducteurs auxiliaires C qu'on charge au même potentiel, par exemple, + V, les fils donnent un écart même quand on les relie à la terre. En effet, il se produit, par induction, une charge négative sur les fils. Cette charge se trouve dans un champ électrostatique formé par le second fil chargé — et le conducteur voisin chargé +. Sous l'influence de ce champ, les deux fils doivent se courber en dehors. Quand on amène ensuite aux fils le potentiel à mesurer, l'écart augmente si le potentiel est également négatif, il diminue si le signe du potentiel à mesurer est positif.

Les écarts dépendent tout naturellement de la forme, de la position et surtout du potentiel des conducteurs auxiliaires, et il faudrait jauger spécialement l'appareil à chaque nouveau potentiel auxiliaire.

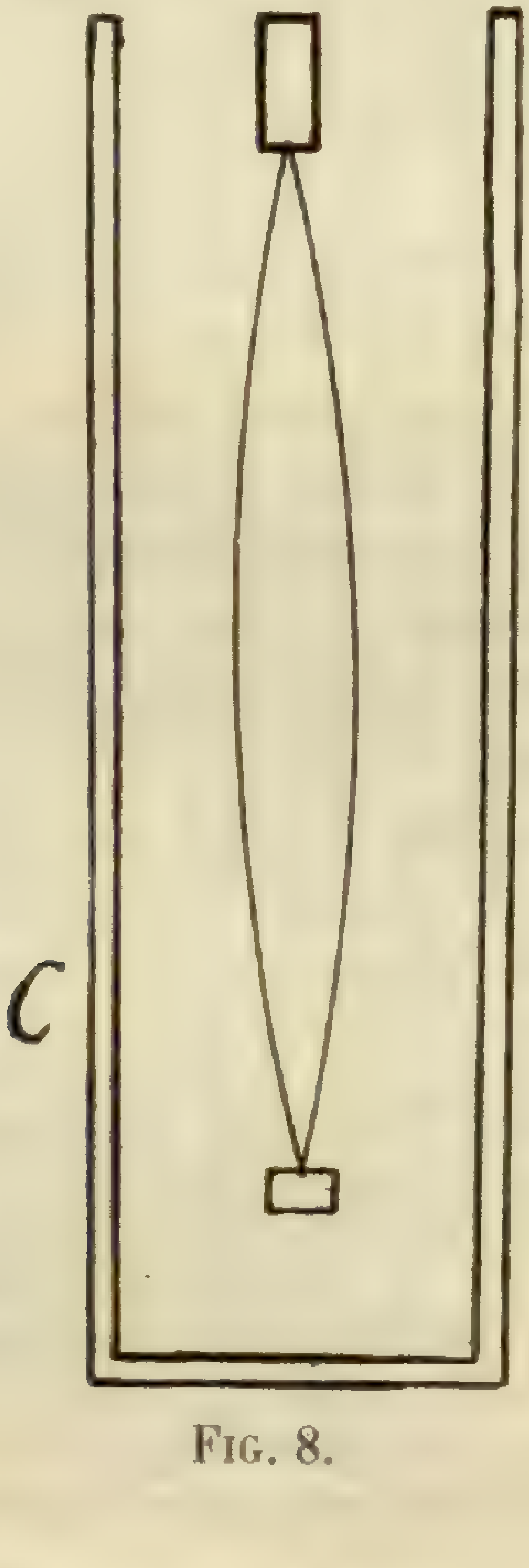


Fig. 8.

3. Théorie de l'instrument à conducteur auxiliaire

Cependant la considération des relations quantitatives qui existent ici a conduit à une disposition qui ne demande qu'un seul jaugeage pour tous les potentiels auxiliaires, le potentiel auxiliaire 0 y compris.

Nous ferons remarquer que les déductions qui vont suivre ne sont pas de simples approximations, mais qu'elles prétendent au contraire avoir une valeur rigoureuse.

Soit Q_1 la charge des fils, V_1 leur potentiel et C_1 leur capacité ; Q_2, V_2, C_2 représentent les mêmes valeurs pour le conducteur auxiliaire. Les deux parties étant reliées entre elles d'une manière permanente, nous pouvons les considérer comme un seul conducteur. Soit enfin C_{12} le coefficient de l'induction réciproque. D'après J. Cl. Maxwell (¹), on a alors à une charge quelconque du conducteur et des fils

$$Q_1 = C_1 V_1 + C_{12} V_2, \tag{6}$$

$$Q_2 = C_{12} V_1 + C_2 V_2. \tag{7}$$

Si l'on maintient constant le potentiel du conducteur auxiliaire V_2, en employant par exemple des éléments galvaniques, et qu'on n'augmente qu'un peu le potentiel des fils (δV_1), il faut pour cela une quantité d'électricité δQ_1 qui se détermine par l'équation

$$\frac{\delta Q_1}{\delta V_1} = C_1 + V_1 \frac{\delta C_1}{\delta V_1} + V_2 \frac{\delta C_{12}}{\delta V_1}.$$

En effet, comme les fils sont mobiles, ils donnent en général un écart à chaque changement de charge ; aussi faut-il traiter C_1, C_2 et C_{12} comme des grandeurs variables.

On prend en même temps à la source V_2 une certaine charge δQ_2 (positive ou négative) et on l'amène au conducteur auxiliaire. On a pour cette charge

$$\frac{\delta Q_2}{\delta V_1} = C_{12} + V_1 \frac{\delta C_{12}}{\delta V_1} + V_2 \frac{\delta C_2}{\delta V_1}.$$

Pour les conducteurs parfaitement rigides, C_1, C_2 et C_{12} sont constants et les dernières équations se simplifient ; on a

$$\frac{\delta Q_1}{\delta V_1} = C_1$$

$$\frac{\delta Q_2}{\delta V_1} = C_{12}.$$

Il faut bien observer qu'elles ne valent pas uniquement pour le cas spécial $V_2 = 0$, c'est-à-dire quand le conducteur auxiliaire est

---

(¹) Maxwell, traduction allemande de Weinstein, vol. I, p. 106.

relié à la terre, mais au contraire d'une manière tout à fait générale, même quand le conducteur auxiliaire est chargé à un potentiel à volonté. *La quantité d'électricité nécessaire à l'élévation potentielle d'un corps rigide est* SEULEMENT *proportionnelle à l'élévation potentielle* δV_1, *mais elle est indépendante du potentiel des corps voisins pourvu qu'ils soient maintenus à un potentiel constant.*

Bien que la déformation soit ici très petite — les fils, même aux plus grands écarts, ne s'écartent que de 2 à 3 mm. suivant l'agrandissement au microscope et cela seulement au milieu, tandis que les extrémités ne sont presque point déformées — l'expérience a pourtant montré qu'on obtient de remarquables déviations de ces relations simples surtout par des charges auxiliaires fort différentes.

Le facteur C_{12} est généralement soumis aux plus forts changements. En effet, C_1 ne change qu'à cause de la petite déformation des fils, tandis que C_{12} change également à cause de cette déformation et aussi parce que, à cette déformation, les fils viennent dans le champ de Q_2 aux endroits à potentiel plus élevé. C_{12} atteint sa valeur la plus haute aux endroits où le potentiel du champ est également V_2. Mais cela donne le moyen d'exclure complètement cette deuxième cause de changement pour C_{12}. En effet, quand on donne aux conducteurs auxiliaires une forme telle que les fils restent toujours aux endroits ayant le potentiel du champ V_2, l'influence du potentiel du champ altérateur cesse de se faire sentir. Pour cela, il suffit que le conducteur auxiliaire entoure entièrement les fils, au moins aussi loin qu'ils sont mobiles. Le principe à appliquer dans ce cas est que, si on amène aux fils une charge Q_1, on induit une charge tout à fait égale et de signe contraire dans le conducteur auxiliaire relié à la terre ou maintenu à un potentiel constant quelconque. Les équations (6) et (7) se transforment donc, pour $V_2 = 0$, en

$$Q_1 = C_1 V_1$$
$$Q_2 = - Q_1 = C_{12} V_1.$$

On a donc pour cette disposition (l'entourage complet des fils)

$$C_1 = - C_{12}$$

et les équations générales (6) et (7) peuvent s'écrire

$$Q_1 = C_1 (V_1 - V_2) \tag{8}$$

$$Q_2 = - C_1 V_1 + C_2 V_2. \tag{9}$$

C'est surtout de la première de ces équations qu'il faut tenir compte ici.

Comme en effet les fils se trouvent tout à fait à l'intérieur d'un conducteur, l'écart ne peut absolument plus dépendre de la charge Q_2 du conducteur auxiliaire. Il est donc uniquement déterminé par Q_1 et il y a une relation univoque entre Q_1 et l'écart. De même C_1 n'est plus variable qu'avec l'écart avec lequel il augmente constamment et lentement. *Par conséquent, le quotient*

$$\frac{Q_1}{C_1} = V_1 - V_2$$

de ces deux valeurs doit être une fonction univoque de l'écart. Aussi, quand on jauge une fois l'appareil en volts, en prenant par exemple $V_2 = 0$, *cette courbe de jaugeage reste aussi exacte pour d'autres potentiels auxiliaires* $V_2 \gtreqless 0$, *en tant que le potentiel lu* $\pm V$ *est égal à la différence* $V_1 - V_2$. Si le potentiel auxiliaire V_2 est connu, on a

$$V_1 = V_2 \pm V. \tag{10}$$

Le choix du signe est vite indiqué dans chaque cas donné. La détermination de V_2 peut être faite par l'appareil lui-même. En effet, quand on relie les fils à la terre et qu'on prend par conséquent $V_1 = 0$, la valeur lue donne sur-le-champ V_2.

4. Principales propriétés de cet instrument

Le dispositif de ces appareils était donc ainsi tout indiqué. Le conducteur auxiliaire devait recevoir une forme telle que l'induction fût complète dans les pièces mobiles de l'électromètre. On établit donc, bien isolée dans la cage, une légère caisse en tôle C (voir Fig. 3, p. 11), n'ayant qu'en haut une petite ouverture livrant passage au porte-fils. La paroi antérieure et la paroi postérieure sont munies de fenêtres pour laisser passer la lumière. Comme l'objectif dérangeait l'obturation électrique complète, il fut isolé du reste du microscope par un morceau d'ébonite et relié métalliquement au conducteur auxiliaire par un fil métallique élastique.

La capacité n'est que très peu augmentée par le conducteur auxiliaire. Elle est d'à peu près 2,3 cm. sans crayon de charge et sans chapeau.

Pour que la sensibilité soit indépendante de la température en cas de fils élastiquement tendus, le conducteur auxiliaire est également fixé à son extrémité inférieure à deux baguettes en acier au nickel vissées à la paroi supérieure de la cage et convenablement isolé.

Les rapports que nous venons de déduire théoriquemeut, ont été contrôlés par l'expérience. On jaugea l'appareil en volts. La courbe obtenue couvrit complètement la courbe qui accompagnait l'appareil fourni par le fabricant. — Le conducteur fut ensuite séparé de la terre et chargé d'un potentiel constant (— 112,7 volts) à l'aide d'une batterie d'accumulateurs. Puis les fils furent chargés de 10 en 10 volts en montant jusqu'à + 100 volts à l'aide d'une batterie de 100 éléments normaux Weston d'après Krüger (¹). Quand on marquait les lectures obtenues aux potentiels $V_1 - V_2$, c'est-à-dire ici à 112,7, 122,7, 132,7, jusqu'à 212,7, elles se trouvaient toutes sur la courbe obtenue auparavant.

On chargea ensuite négativement les fils au même potentiel auxiliaire. Leur charge fut alors $Q_2 = C_1 (V_2 - V_1)$, c'est-à-dire qu'elle diminuait tandis que la valeur de V_1 montait. Les lectures furent ensuite conjuguées aux potentiels 92,7, 82,7,... 12,7 et se trouvèrent également toutes sur la courbe de jaugeage.

A — 112,7 volts, $Q_1 = 0$ et l'écart est également nul. Si la charge négative des fils augmente encore, ils s'écartent de nouveau pour reprendre à $V_1 = 2V_2$ la même place qu'à $V_1 = 0$. Toutes ces valeurs se trouvèrent encore sur la courbe primitive.

On a donc ici ce cas intéressant que l'échelle tout entière est parcourue deux fois. C'est aussi, rigoureusement parlant, le cas dans les appareils sans charge auxiliaire, mais alors c'est aux potentiels égaux de signe contraire que correspond le même écart.

(¹) Krüger, Physik. Zeitschr., 7, 182, 1906.

Si V_1 et V_1' sont ici deux potentiels de fils avec le même écart, on a

$$V_1 - V_2 = -(V_1' - V_2)$$

ou bien

$$V_1 + V_1' = 2V_2.$$

Pour $V_2 = 0$ on a comme cas spécial $V_1 = - V_1'$.

L'emploi de l'appareil est encore plus simple quand il est question non point de la valeur absolue du potentiel des fils, mais de la différence de deux potentiels, comme c'est toujours le cas dans les mesures de radioactivité, de conductibilité de l'atmosphère et autres. On n'a aucunement à s'occuper alors du potentiel auxiliaire, puisqu'il disparaît quand on fait la différence. Il s'ensuit que la différence des deux valeurs, ou bien quand les fils ont dépassé zéro, que l'addition de ces deux valeurs, fournit la différence des potentiels des fils.

Le but proprement dit du conducteur auxiliaire consiste donc en ce que les fils soient déjà plus ou moins écartés quand ils ont le potentiel zéro. Cela constitue immédiatement la suppression du deuxième inconvénient de la faible sensibilité aux potentiels faibles. La charge auxiliaire amène les fils à des endroits plus sensibles. Il est évident qu'il est d'une grande importance pour nombre de travaux de trouver la sensibilité normale rigoureusement jusqu'à zéro.

Un troisième avantage de ces appareils est de posséder un champ de mesure aussi grand qu'on voudra sans altérer en rien leur sensibilité absolue. Si, par exemple, $+ V_0$ est le potentiel extrême qu'un appareil simple puisse mesurer sans charge auxiliaire, cette limite est reculée jusqu'à $V_0 + V_2$ quand on se sert du potentiel auxiliaire V_2. On peut donc mesurer des potentiels très élevés avec un appareil fort sensible.

Cela est tout spécialement important aux recherches sur les matières radioactives. Pour obtenir un courant de saturation, il faut prendre assez haute la valeur absolue du potentiel. On examine ensuite la chute du potentiel en un temps déterminé.

Quand on se sert à cet effet d'un appareil moins sensible, on ne peut déterminer la chute qu'avec très peu de précision, et un appareil sensible ne donne point de courant de saturation. Au contraire, un appareil à charge auxiliaire permet de joindre la haute tension du courant de saturation à la précision des appareils très sensibles.

CHAPITRE V

DE LA CAPACITÉ DE L'ÉLECTROMÈTRE

1. La capacité de l'instrument tout entier

Pour la plupart des recherches, la capacité d'un électromètre signifie une perte de sensibilité. Une fraction de leur charge est enlevée aux parties proprement actives et cette fraction se dépense à la mesure. Il en est ainsi dans presque tous les dispositifs usités pour les recherches sur les matières radioactives. Les corps de dispersion ajoutés sont la partie proprement active. Si une charge déterminée Q de cette partie se perd dans l'atmosphère rendue conductrice, et s'il n'y a que la capacité z du corps de dispersion, son potentiel baisse de

$$\Delta V = \frac{Q}{z}.$$

Mais s'il y a encore en plus la capacité c de l'électromètre, le potentiel ne baisse plus que de

$$\Delta V_1 = \frac{Q}{z + c}.$$

Il faut donc essayer de rendre aussi petite que possible la capacité des électromètres. L'idéal d'un appareil de mesure serait un électromètre à capacité 0. Les instruments usités jusqu'ici ne répondent que fort peu à cet idéal. Le tableau ci-après contient les instruments les plus usités et leur comparaison avec l'électromètre bifilaire.

Capacité de divers électromètres

Électromètre à quadrants	20 à 50 cm.
Électromètre à feuilles d'aluminium	5 à 10 cm.
Électromètre à corde de Lutz-Edelmann, selon le couplage	4,2 à 9,5 cm.
Électromètre bifilaire à conducteur auxiliaire avec crayon de charge	3,3 cm.
Électromètre bifilaire à conducteur auxiliaire sans crayon de charge	2,3 cm.
Électromètre bifilaire sans conducteur auxiliaire avec crayon de charge	2,5 cm.
Électromètre bifilaire sans crayon de charge	1,7 cm.

2. La capacité des pièces mobiles

De cette capacité complète il faut distinguer la capacité proprement dite des fils ou des parties mobiles de l'instrument. Cette dernière est seule importante pour la théorie. Elle n'est qu'une fraction certainement petite de la capacité totale, le reste se trouve notamment dans le porte-fils qui constitue, avec le bouchon d'ambre et sa douille métallique, un condensateur cylindrique complet. Mais cette capacité des fils même est importante non seulement pour la théorie, mais aussi pour la pratique. En donnant en effet une forme convenable au dispositif de suspension, on peut diminuer de plus en plus la capacité des porte-fils jusqu'à ce qu'on arrive finalement à un appareil qui possède une capacité seulement un peu plus haute que les fils seuls.

C'est pourquoi il a semblé qu'il valait la peine d'essayer de déterminer expérimentalement la capacité des fils seuls. Cet examen des capacités si petites présentait jusqu'à ces dernières années des difficultés très considérables. La plupart du temps on ajoutait à la capacité présente une capacité connue, et puis on comparait l'inconnue avec la connue. Mais comme toutes les capacités s'altèrent quand on approche d'autres corps, on n'obtenait ainsi que des valeurs inexactes, surtout quand il y avait à mesurer comme ici de très petites grandeurs. Il y a quelques années, Harms (1) indiqua une méthode exempte de ces défauts et permettant spécialement de déterminer rapidement la capacité des électromètres préalablement jaugés en volts. La disposition décrite ci-après s'attache à la méthode indiquée par Harms. Deux électromètres furent reliés par un fil de façon qu'ils pouvaient être séparés en tournant simplement l'un des instruments. L'autre instrument A était installé de façon à enlever facilement les fils du porte-fils et à les y remettre rapidement. On détermina d'abord d'après la méthode de Harms la capacité de l'instrument A avec les fils et on trouva 2,94 cm.

---

(1) **Harms**, **Physik. Zeitschr.**, 5, 47, 1904.

Ensuite on compara la capacité de cet instrument avec celle de l'autre, une première fois quand l'instrument A était muni de fils et une autre fois quand les fils étaient enlevés et qu'il ne restait plus que la tête et le porte-fils. Si k désigne la capacité de la tête seule, $k + x$ celle de la tête avec les fils, et B la capacité du second instrument avec le fil de jonction, on trouva

$$\frac{k}{B} = 0{,}420$$

$$\frac{k + x}{B} = 0{,}466$$

et, par conséquent,

$$\frac{k}{k + x} = \frac{0{,}42}{0{,}466}$$

$$x = k\,\frac{0{,}046}{0{,}42} = \frac{k}{9}.$$

Mais on connaissait

$$k + x = 2{,}94$$
$$x : k = 1 : 9,$$

d'où il suit que $x = 0{,}29$ ou, en chiffres ronds, 0,3 cm.

Dans ce cas, les fils avaient 5 cm. de long. Les fils de 6 cm. de long généralement utilisés peuvent donc se taxer à tout au plus 0,4 cm., en chiffres ronds.

Une autre recherche confirma ce résultat. En effet, en réduisant à 3 cm. une paire de fils de 6 cm. de long, la capacité de l'instrument diminua de 0,2 cm. Cette observation donna donc également pour les fils tout entiers la même capacité de 0,4 cm.

3. Altérations de la capacité avec l'écart

Ces altérations sont de la plus grande importance théorique. Si elles étaient connues, la formule (4) contiendrait la théorie complète de l'appareil. En somme, l'altération de la capacité à l'écart est essentielle à tout électromètre. Un instrument dont l'écart ne serait pas accompagné d'une altération de capacité, n'aurait précisément pas d'écart. L'altération de capacité est également décisive pour la sensibilité comme les forces mécaniques. L'électromètre le plus sensible est celui dans lequel le rapport de l'altération de capacité inhérente à un écart déterminé aux forces mécaniques répulsives est aussi grand que possible.

L'altération de la capacité a également de l'importance pour la pratique toutes les fois qu'il faut mesurer avec l'appareil non pas des différences de potentiel, mais des quantités d'électricité. C'est ce qui arrive presque sans exception dans toutes les recherches sur les matières radioactives et dans les observations d'électricité atmosphériques. On lit les différences de potentiel qui, multipliées par la capacité de l'instrument, donnent la quantité d'électricité disparue. Quand donc on veut faire des mesures exactes, il faut ou bien tenir compte de l'altération de la capacité ou bien s'assurer qu'elle est suffisamment petite. Une simple réflexion montre que ces altérations sont beaucoup plus petites dans l'électromètre bifilaire que dans les instruments à feuilles en usage. Dans ces derniers en effet les extrémités fortement chargées s'écartent de plusieurs centimètres, tandis que dans les électromètres à fils ce sont seulement les milieux faiblement chargés qui s'écartent l'un de l'autre et encore de 2 à 3 mm. tout au plus. Cette altération de capacité, déjà faible en elle-même, est encore souvent beaucoup moins sensible dans les résultats totaux, parce que les fils ne sont qu'une très petite partie de la capacité totale, à peu près $\frac{1}{10}$ dans l'exemple ci-dessus. Admettons, par exemple, que la capacité des fils s'altère même de 50 $^0/_0$ et passe par conséquent de 0,4 cm. à 0,6 cm., la capacité totale passe ainsi de 3 cm. à 3,2 cm. et ne s'altère donc que de 6,6 $^0/_0$.

Comme l'altération de la capacité totale est fort petite, il est très difficile de déterminer exactement cette altération. Il est vrai que cette altération est considérablement plus grande dans l'électroscope à feuilles, mais les indications inexactes de l'instrument y font échouer les déterminations précises. Aussi les seuls essais d'une telle détermination sont-ils ceux de Harms (¹). D'un réservoir chargé il faisait tomber des gouttes d'eau de grandeur constante dans un récipient relié à un électroscope à feuilles. Chaque goutte amenait avec elle une quantité d'électricité déterminée qui augmentait lentement le potentiel du système chargé. Quand ensuite la capacité augmentait avec l'écartement, le nombre de gouttes nécessaires à une élévation déterminée du potentiel devait également augmenter. Mais les inexactitudes de mesure étaient si grandes que Harms lui-même s'exprime ainsi au sujet de ses résultats : « Les valeurs (de la capacité) augmentent toutes avec l'écart, mais les différences à partir d'à peu près 125 volts jusqu'à 250 volts sont si insignifiantes qu'elles n'entrent pas pratiquement en compte. Je ne saurais décider si les valeurs trouvées pour les petits écarts répondent à la réalité, les fautes de lecture sont tellement grandes aux petits écarts qu'elles suffiraient éventuellement pour expliquer les différences (²). »

Les mesures de Harms ne commencent, il est vrai, qu'à 66 volts; les altérations au commencement, probablement les plus considérables, n'ont pu être examinées à cause de la faible sensibilité des instruments à feuilles. Non seulement les résultats manquent jusqu'ici, mais il manque encore une méthode d'investigation qui soit suffisamment rapide et sûre. Aussi nous permettra-t-on d'examiner ces recherches un peu plus à fond.

La possibilité d'une détermination plus exacte était indiquée par l'exécution d'un appareil à fils susceptibles d'être tendus. Un appareil semblable permet d'altérer l'écart et par conséquent aussi la capacité sans altérer la charge. En isolant l'appareil et sa charge, il suffit d'augmenter la tension à l'aide de l'étrier en fil de quartz pour observer sur-le-champ un écartement qui s'altère continuellement. Le potentiel change donc aussi sur-le-champ avec cette altération et l'on a

$$VC = V_1C_1.$$

(¹) Harms, Annalen der Physik von Drude, 10, 816, 1903.

(²) Harms, *l. c.*

Si donc on a jaugé l'appareil pour ces deux tensions, les courbes de jaugeage indiqueront un peu différemment les valeurs V et V_1. Mais on a

$$V : V_1 = C_1 : C$$

et l'altération de cette capacité est

$$C_1 - C = C \frac{V - V_1}{V_1}.$$

La capacité peut cependant se déterminer encore beaucoup plus exactement quand on dispose d'un second électromètre jaugé. En effet, les différences de V et V_1 étant fort petites, leur détermination sur deux différentes courbes de jaugeage ne donne que des valeurs très inexactes. Mais si on dispose d'un second électromètre, on le relie au premier. L'altération de capacité à la tension du premier se montre alors par une petite augmentation ou bien diminution de l'écart dans l'électromètre auxiliaire. Cet écart est également très petit, il est vrai, mais il se détermine pourtant avec une grande exactitude. En effet, on a sous la main le moyen de retourner très rapidement à la tension initiale et de faire en très peu de temps une longue série d'ajustages permettant de déterminer avec sûreté leurs différences jusqu'à 0,1 de trait. Si même la courbe de jaugeage de l'instrument auxiliaire était défectueuse, les fautes sortiraient presque entièrement à la formation de la différence du potentiel. Les fautes provenant de l'isolation défectueuse n'entrent pas davantage en compte. Si en effet on revient plusieurs fois à la même tension des fils, l'écart doit toujours être le même ; la différence de deux écarts indique sur-le-champ, quantitativement, les pertes de charge pendant le temps d'observation. C'est ainsi qu'on a pu non seulement déterminer avec sûreté une différence, mais encore la grandeur de cette différence dans les différentes parties de l'échelle.

Quand la capacité totale des deux appareils, à un écart moyen d'environ 59 traits et au potentiel V, était C, l'altération de la tension amenait peut-être cet écart à 80 traits, et la capacité augmentée d'un petit *c*, arrivait à C + *c*. Le potentiel commun tombait ainsi à V_1. Il en résultait

$$(C + c)V_1 = CV$$

et par conséquent

$$c = \frac{V_1 - V}{V_1} C. \qquad (11)$$

La capacité totale C déterminée comme ci-dessus par la méthode de Harms se trouva être de 9,2 cm. Les fils avaient 5 cm. de long. Le tableau ci-après contient dans la première rangée les écarts entre lesquels les fils de l'instrument inférieur se mouvaient à la tension. La deuxième colonne donne les écarts lus alors en parties d'échelle ΔN sur l'instrument auxiliaire ; la troisième contient les différences en volts, c'est-à-dire $V_1 - V$ de la formule (11) ; la quatrième indique les valeurs V_1 également lues sur l'instrument auxiliaire ; à l'aide de toutes ces données on calcule enfin la valeur de c en mesure absolue du système électrostatique.

TABLEAU II

$n - n_1$	ΔN	$V_1 - V$	V_1	c
10-25	0,84	0,633	208	0,028
25-40	0,49	0,365	210	0,016
40-70	0,73	0,550	220	0,023
70-120	1,10	0,826	380	0,020

L'altération totale de 10 à 120 traits s'éleva donc à 0,087 cm. ; celle jusqu'à 160 traits, c'est-à-dire de toute l'échelle, est donc plus petite que 0,1 cm. Si, par exemple, cet appareil a une capacité de 3,3 cm., cette capacité monte jusqu'à la fin de l'échelle à 3,4 cm., de 3 % seulement, dont plus de la moitié tombe sur les 50 premiers traits ; par un écart de 60 jusqu'à 160 divisions d'échelle, l'altération de capacité n'est que de 1 %. Les conditions deviennent encore plus favorables quand on ajoute d'autres capacités à l'appareil, par exemple les corps de dispersion à la mesure de la conductibilité de l'atmosphère. Les fautes de pourcentage diminuent à mesure que la capacité totale grandit.

Si on représente graphiquement les résultats obtenus, on a une courbe à cours parfaitement régulier. La figure 9 indique en abscisse les divisions de l'échelle, et en ordonnée l'augmentation de la capacité de 10 à 120 divisions d'échelle ; les valeurs de 120 à 160 sont ajoutées par extrapolation.

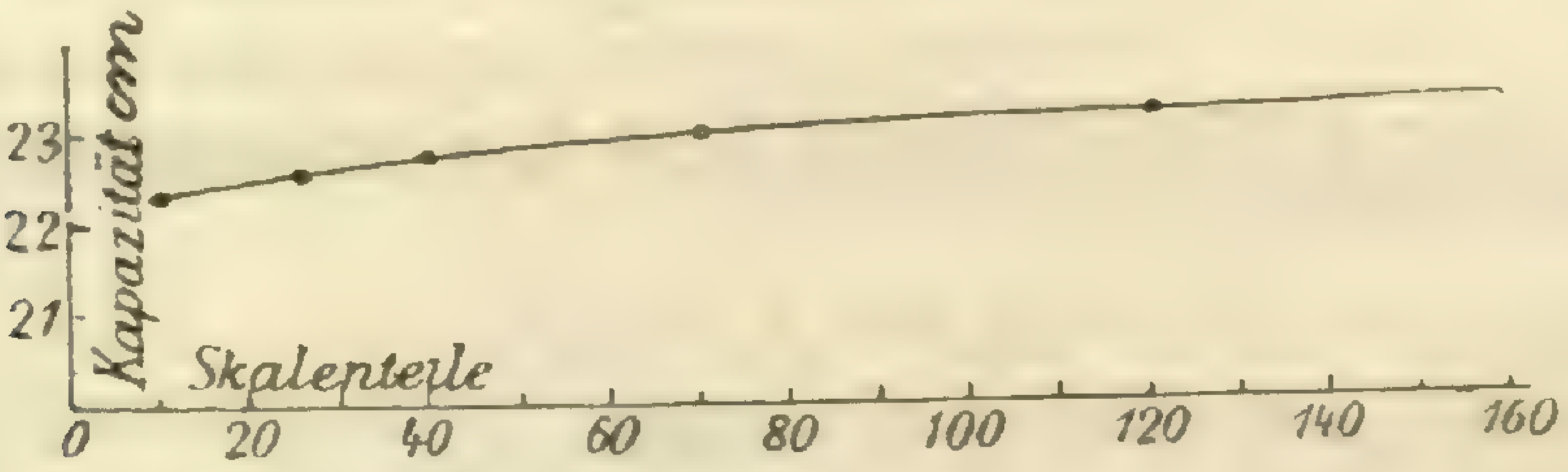


Fig. 9.

4. Détermination de la capacité de l'instrument avec des corps de dispersion

Quand on se sert de l'instrument spécialement pour la détermination de la radioactivité et de la teneur en ions de l'atmosphère, il arrive souvent qu'on relie à l'électromètre un corps de dispersion qui se trouve alors dans l'atmosphère ionisée. Pour que ces mesures aient leur pleine valeur, il faut qu'elles soient comparables avec les résultats obtenus par d'autres chercheurs et avec d'autres appareils, et c'est pourquoi elles doivent être exprimées en mesure absolue. Mais pour cela il est indispensable de connaître la capacité de tout le système chargé. Cette détermination peut se faire la plupart du temps avec le condensateur Harms. Mais fréquemment le corps de dispersion s'enferme dans une chambre d'ionisation et n'est pas accessible pour la réunion avec le condensateur. Parfois aussi on ne dispose pas d'un tel condensateur. La méthode indiquée ci-après a surtout quelque valeur parce qu'elle n'emploie absolument aucun autre instrument que l'électromètre à conducteur auxiliaire et parce qu'elle peut constamment s'exécuter sur l'appareil complètement fermé.

Cette méthode est fondée sur les équations de Maxwell (voir ci-dessus l'équation (6), p. 27).

$$Q_1 = C_1V_1 + C_{12}V_2.$$

Supposons que les fils soient chargés au potentiel V_0, le conducteur auxiliaire étant relié à la terre, leur charge est alors

$$Q_0 = C_1 V_0.$$

On isole ensuite les fils pour que la charge ne puisse point s'altérer et on applique au conducteur auxiliaire le potentiel auxiliaire V_2 (à l'aide d'une batterie d'accumulateurs ou d'eau). Cela change le potentiel des fils V_0 en V_1 et on a maintenant pour la même charge

$$Q_1 = C_1 V_1 + C_{12} V_2.$$

Mais comme $Q_1 = Q_0$, il en résulte

$$C_1 V_0 = C_1 V_1 + C_{12} V_2$$

ou bien

$$\frac{C_1}{C_{12}} = \frac{V_2}{V_0 - V_1}. \tag{12}$$

Les potentiels se lisent sur l'électromètre même, V_0 et V_2 directement ; V_1 résulte de la lecture V d'après l'équation (10).

$$V_1 = V_2 \pm V.$$

Si on connaît la capacité C_1 de l'électromètre qui est constamment déterminée avec le plus grand soin par le fabricant, en faisant la comparaison avec un condensateur Harms, on peut alors, à l'aide de l'équation (12), déterminer C_{12}, coefficient de l'induction réciproque entre les fils et le conducteur auxiliaire. *La valeur de C_{12} reste ensuite invariable, même quand on relie des capacités quelconques au porte-fils.* Si donc C_{12} est connu et que C_1 signifie alors la capacité de l'électromètre avec n'importe quels corps de dispersion, on peut aussi à l'inverse déterminer la capacité C_1 à l'aide du procédé décrit ci-dessus. Comme on le voit, cette méthode ressemble à celle de Harms. En effet, l'électromètre avec ses fils, son conducteur auxiliaire et sa cage constitue un condensateur Harms complet avec la différence qu'il est en même temps électromètre. De plus, Harms ne s'est servi que d'un seul cas spécial. En effet, le cas général (12) se décompose en deux simples cas spéciaux.

1) Dans le cas $V_0 = 0$, on isole simplement les fils non chargés. Si on applique V_2 au conducteur auxiliaire, les fils reçoivent le

potentiel V_1 déterminé absolument comme ci-dessus d'après l'équation (10) et alors on a

$$C_1V_1 + C_{12}V_2 = 0$$

et par conséquent

$$\frac{C_1}{C_{12}} = -\frac{V_2}{V_1}.$$

Après lecture de l'écart, on relie les fils à la terre et cet ajustage donne V_2.

2) Le cas $V_1 = 0$ est le cas employé par Harms. On applique V_2 au conducteur auxiliaire tout en reliant les fils à la terre. La lecture donne V_2. On relie ensuite à la terre le conducteur auxiliaire après avoir isolé les fils, la charge se distribue alors sur les fils et le porte-fils avec la tige de dispersion et le potentiel lu V_0 donne la charge

$$C_1V_0 = C_{12}V_2, \qquad \text{ou bien} \qquad \frac{C_1}{C_{12}} = \frac{V_2}{V_0}.$$

Le 1er cas présente parfois des avantages parce que les écarts peuvent facilement être amenés dans le domaine de la plus grande sensibilité, tandis qu'au 2d cas les écarts sont très petits pour V_0 si les corps de dispersion sont quelque peu considérables. Nous allons nous occuper sur-le-champ d'un nouvel avantage du 1er cas, plus spécial, sur le second.

Le rapport $C_1 : C_{12}$ est bien un peu variable avec l'écart. Mais comme un choix convenable des méthodes, de la grandeur et surtout du signe de la charge peut constamment amener que les fautes augmentent ou diminuent la véritable valeur, on peut même essayer de déterminer la grandeur de cette variation de capacité en combinant convenablement diverses observations. Nous allons brièvement esquisser ici une méthode toute simple.

Il s'agit, par exemple, de déterminer la variation de capacité entre un écart de 75 et 150 divisions d'échelle.

C_1 et C_{12} qui valent pour 75 traits deviennent $C_1 + \Delta$ et $C_{12} + \Delta$ pour 150 traits. Les variations sont égales pour les deux grandeurs parce que seule la partie de C_1 enfermée par le conducteur auxiliaire est variable.

On observe d'abord d'après le 1er cas en appliquant, après avoir isolé les fils non chargés, le potentiel V_2 au conducteur auxiliaire de façon que l'écart monte à environ 75 traits. On a alors

$$0 = C_1V_1 + C_{12}V_2.$$

Ce nouvel avantage de ce 1er cas est que la valeur de C_1 se rapporte toujours au même écart que C_{12}.

Pour déterminer V_2, il faut relier les fils à la terre, ce qui fait monter l'écart à 150 traits environ et la charge devient $(C_{12} + \Delta)V_2$.

Si on isole ensuite cette charge d'après le 2^1 cas et qu'on relie à la terre le conducteur auxiliaire, cette charge se distribue librement, l'écart revient à près de 75 traits et le potentiel est V_3. On a alors la suite de l'équation

$$(C_{12} + \Delta)V_2 = C_1V_3.$$

De ces deux relations résulte

$$\Delta = C_1 \frac{V_3 - V_1}{V_2}.$$

C'est ainsi qu'on a obtenu pour un instrument dont la capacité C_1 était de 2,3 cm., $C_1 : C_{12} = 1{,}927$ et par conséquent $C_{12} = 1{,}19$ cm.

Pour la variation de capacité entre 75 et 150 traits, une série de dix observations donna en bonne concordance avec le procédé décrit plus haut, $\Delta = 0{,}03$ cm.

Les valeurs extrêmes des dix observations ne différaient que de 2 % les unes des autres.

Le procédé décrit plus haut, équation (11), est pourtant plus exact parce qu'il détermine directement la petite différence de potentiel $V_1 - V$, tandis que la valeur correspondante $V_3 - V_1$ s'obtient ici à l'aide de deux séries d'observations.

DEUXIÈME PARTIE

L'application de l'électromètre bifilaire

Les multiples applications de l'instrument ci-dessus décrit sont pour la plupart évidentes par elles-mêmes. Dans beaucoup de cas, cet instrument est plus avantageux que ceux qui ont été en usage jusqu'ici. Ces avantages se basent sur ses excellentes propriétés, petite capacité, grande sensibilité, précision, rapidité, facilité de maniement et de transport.

Nous allons traiter, dans cette seconde partie, de l'application de cet instrument. Le premier chapitre contiendra quelques brèves indications sur son usage et son maniement en général. Dans les chapitres suivants, nous approfondirons quelques applications que l'emploi de cet instrument a rendues possibles pour la première fois, ou du moins qui paraissent ainsi considérablement facilitées et perfectionnées. Mais nous n'avons nullement cherché à donner ici un aperçu rigoureux ou à épuiser le sujet. Il y a même certains points qui ouvrent aux recherches scientifiques des domaines si vastes qu'il ne peut être question dans le présent travail que d'indiquer le chemin pour y arriver et non point d'approfondir ces domaines.

CHAPITRE I

GÉNÉRALITÉS SUR L'USAGE DE L'ÉLECTROMÈTRE BIFILAIRE

Pour ce qui concerne la lecture, elle peut se faire de trois manières différentes, ou bien par simple lecture subjective, ou bien par projection sur un écran pour un assez grand auditoire, ou bien enfin par enregistrement photographique.

1. L'observation subjective

Cet instrument donne les meilleurs résultats pour l'observation subjective. L'installation est extrêmement simple. On place l'appareil à une hauteur convenable de façon à avoir une fenêtre sur le côté et puis, à l'aide du petit miroir tournant en tous sens, on amène la lumière dans la direction de l'axe du microscope de manière que son champ visuel tout entier paraisse clair. On tire ensuite l'oculaire du microscope jusqu'à ce qu'on voie l'échelle dans toute son étendue, d'une manière aussi nette que possible.

L'ajustage bien net des fils se fait différemment dans les deux principales classes d'appareils. Dans les instruments à fils librement suspendus, il se fait à l'aide des trois vis calantes comme l'ajustage de l'écart symétrique.

Dans les appareils à boucle élastique en fil de quartz, il se fait en tournant une bague crénelée V_1 (Fig. 4 et 10) sur le support du microscope. L'ajustage pour obtenir des écarts égaux se fait en déplaçant le chariot du microscope.

Si, après avoir enlevé le couvercle, on met la sonde de charge, on peut charger et puis lire l'écart.

Quelquefois, surtout après de très difficiles transports, il arrive que les deux fils se sont touchés et collent un peu l'un à l'autre. On s'en aperçoit si, après une faible charge, les deux fils ne paraissent pas parallèles, ou ne sont pas tous deux à la fois au point. Alors on les sépare en frottant un bout d'ébonite ou de verre isolant et en touchant le crayon de charge, jusqu'à ce que les fils disparaissent tous deux du champ visuel. S'ils sont lentement déchargés (touchez avec une allumette ou un crayon !), ils reviennent bien droit dans le champ visuel. Sinon, on répète le procédé en donnant une charge plus forte. Pendant de petits voyages, il vaut mieux tenir les appareils toujours chargés. Il arrive qu'il n'est pas possible de mettre au point les deux fils en même temps. On corrige alors un peu le plan des deux fils en tournant le bouton d'ambre avec le porte-fils par la vis V_3 (Fig. 4 et 10).

Pour la mesure on additionne les deux lectures des deux côtés du zéro de l'échelle. Les positions décisives sont celles des bords internes des fils. Il est bien indifférent que les deux écarts soient égaux ou non. On peut pourtant obtenir les lectures les plus exactes en faisant coïncider aussi parfaitement que possible avec un trait le bord de l'un des fils et en faisant alors l'estimation des dixièmes à la position de l'autre. En effet, si on admet qu'on peut faire une faute de 0,1 de trait à la détermination de la position du fil, on fera au pis-aller une faute de lecture de 0,2 mm. avec les deux fils. Mais l'ajustage sur le trait même se fait beaucoup plus nettement, de sorte que les fautes ne dépassent guère 0,1 trait. C'est également ainsi que se font les tableaux de jaugeage en comparant les écarts avec un voltmètre de précision.

2. La projection

S'il s'agit de la projection des deux fils pour conférences, on rabat entièrement sur le côté le petit miroir, on relève le verre dépoli et puis on dirige sur la petite fenêtre les rayons d'une source de lumière. Cette source de lumière sera autant que possible en forme de point afin que toute la lumière fasse son effet dans le microscope. Une très forte source de lumière n'est plus nécessaire alors. C'est ainsi qu'une petite lampe à arc de deux ampères environ, installée dans un appareil à projections d'après Grimsehl, a rendu de bons services et a suffi pour un grand auditoire. Une très forte lampe n'est pas même bonne, car le revêtement métallique des fils pourrait souffrir de la grande chaleur. En tout cas, il est bon d'intercaler un petit réservoir d'eau pour absorber la chaleur. Quand on se sert du microscope ordinaire appliqué à l'instrument, on établit l'écran à projection à une distance de 1 à 2 m., environ, de l'oculaire. Une distance beaucoup plus petite et pouvant même se réduire jusqu'à 50 cm. est plus avantageuse pour les petits auditoires.

3. L'enregistrement

L'appareil convient tout spécialement à l'enregistrement photographique. Les fils apparaissent comme deux lignes noires extrêmement nettes dans le cône de lumière qui sort de l'appareil. De ce cône de lumière tombe une bande horizontale médiane sur une fente de l'appareil photographique. Dans cette fente se trouve une lentille cylindrique qui concentre toute la lumière dans une ligne droite horizontale. Les deux fils sombres apparaissent comme deux points noirs dans cette droite et s'écartent plus ou moins l'un de l'autre selon l'écartement des fils. Le papier photographique sensible se trouve justement dans cette ligne et marque ainsi l'écart comme deux points blancs sur une ligne sombre.

L'enregistrement photographique peut toujours être employé, cela va sans dire. Mais il présente de grands avantages quand il s'agit de l'enregistrement continuel d'une différence variable de potentiel, par exemple, du cours de la chute du potentiel atmosphérique ou bien quand les variations de tension se produisent si rapidement qu'on ne peut plus les suivre des yeux, par exemple, en cas de détermination de la forme d'une courbe de courant alternatif. Dans tous les cas, il faut faire mouvoir le papier ou le film dans la verticale à l'aide d'un mouvement d'horlogerie ou à volonté. C'est ainsi que les positions occupées successivement par les fils dans le temps se produisent en juxtaposition dans l'espace et forment dans leur enregistrement continuel deux lignes continues.

Les autres installations diffèrent tellement selon l'objet à enregistrer qu'il vaut mieux les décrire alors seulement que l'on traite ces divers problèmes.

Parmi les multiples domaines d'application de l'instrument, nous en traiterons ici trois en particulier, celui de la radioactivité et celui de l'électricité atmosphérique à cause de leur grand intérêt actuel, puis l'emploi de cet instrument comme oscillographe, parce que c'est ici la première fois qu'un appareil électrostatique sert à l'enregistrement d'oscillations rapides.

CHAPITRE II

LES PROBLÈMES DE LA RADIOACTIVITÉ

1. Généralités sur la détermination de la radioactivité

Parmi les diverses propriétés des corps radioactifs, la plus importante est sans doute celle de rendre conducteur l'air ambiant en y produisant des ions. Cela est extrêmement important pour la connaissance de l'essence de la radioactivité ; cependant cette question ne regarde pas notre travail. Cette propriété est encore importante pour la raison qu'elle est jusqu'ici l'unique moyen qui permette de déterminer quantitativement le degré de l'activité. La détermination de cette conductibilité de l'atmosphère par l'électromètre fait de cet instrument l'appareil le plus important dans le domaine entier de la radioactivité. Dans la grande majorité des cas, les recherches se font de telle façon qu'on relie à l'électromètre un corps de dispersion qui se trouve alors dans le milieu rempli d'air ionisé. En cas de faibles chutes de potentiel entre le corps de dispersion et les parois du récipient reliées à la terre, on s'aperçoit d'un relèvement de la force du courant entre le corps de dispersion et les parois quand la chute de potentiel augmente. Mais cela atteint sa limite quand tous les ions produits se déchargent au bout de très peu de temps. Un relèvement ultérieur de la chute du potentiel ne peut plus alors amener d'augmentation du courant, on a ce qu'on dit un courant de saturation. Ce courant de saturation est la mesure directe de la force ionisante du corps examiné.

Or, il est prouvé que de très faibles chutes de potentiel suffisent à la production du courant de saturation dans les substances très faiblement radioactives ; souvent 20 volts par cm. suffisent. Mais la chute doit être proportionnellement plus grande pour les corps fortement actifs. Quand on sait profiter de ce fait, on arrive à une disposition d'appareils qui permet de faire, avec très peu d'auxiliaires, des recherches sur les corps très faiblement radioactifs aussi bien que sur les corps à très forte radioactivité. Cette disposition est esquissée dans la figure 10. On place tout d'abord sur la tête de l'instrument un plateau T dont le milieu est ouvert pour le passage du corps de dispersion. Pour étudier les rayons α on étend simplement sur ce plateau les substances solides à examiner. Au-dessus du plateau se pose ensuite le récipient G qui ferme le tout. Quand on se propose d'examiner les rayons β, on met la substance au-dessus du couvercle z de feuille de zinc très mince, mais qui suffit à supprimer totalement tous les rayons α. Le couvercle D enfin absorbe en plus les rayons β et ne laisse pénétrer que les rayons γ. Du reste, il sert aussi à préserver la mince couche z et se trouve généralement sur l'appareil.

Mais comme les rayons γ sont la plupart du temps très faibles pour ioniser un gaz, l'appareil décrit ci-dessous (Fig. 12) est beaucoup plus sensible pour les rayons γ.

Si, par exemple, au bout d'une heure, la substance à examiner a produit N ions de chaque signe portant chacun la charge ϵ, l'instrument perdra par heure, en cas de courant de saturation, la quantité d'électricité $Q = N\epsilon$; cette perte se fera reconnaître par une chute de potentiel de $\frac{N\epsilon}{C}$ où C indique la capacité totale de l'électromètre avec le corps de dispersion. L'écart obtenu doit donc toujours être inversement proportionnel à la capacité de l'instrument. Par conséquent, plus la capacité est petite, plus on atteint rapidement l'écart nécessaire à une lecture sûre. On rendra donc aussi faible que possible la capacité pour les recherches sur les corps faiblement radioactifs. Un crayon Z posé au-dessus ou souvent même le petit tuyau métallique S dépassant l'ambre constituent les meilleurs corps de dispersion. La chute de potentiel est bien alors petite à cause de la distance plus grande, mais on a pourtant encore le courant de saturation.

Pour les objets fortement actifs, on remplace le simple crayon par un condensateur cylindrique C_1 C_2 (Fig. 10, A). La chute de potentiel est alors plus grande à cause de la distance plus petite, mais la coïncidence des fils ne se fait pourtant pas trop vite à cause de la capacité plus grande.

2. Radioactivité des corps solides

Voici un exemple pour les corps solides. On sait par les recherches de Strutt que la roche du tunnel du Simplon présente une radioactivité sensible. Pendant l'été de 1908, l'auteur a pu passer une nuit dans ce tunnel pour y prendre des mesures. Sous le mont Leone, à la traverse 39, on prit un petit échantillon de roche qui fut concassé et mis dans l'appareil. La capacité de l'instrument avec un petit crayon était alors de 2,9 cm. La perte de charge était de 4 traits à l'heure sans roche et de 7 traits à l'heure avec à peu près 20 gr. de roche. Les pierres amenaient donc une augmentation de décharge de 3 traits par heure. Ces 3 traits correspondaient à 2,2 volts $= \frac{2,2}{300}$ unités électrostatiques du potentiel et à une quantité d'électricité de $\frac{2,2 \times 2,9}{300} =$ 0,021 unité électrostatique. En comptant avec Thomson (¹) la

---

(¹) Afin de rendre possible une comparaison avec les résultats des autres observateurs, nous gardons ce nombre de Thomson bien qu'il soit probable,

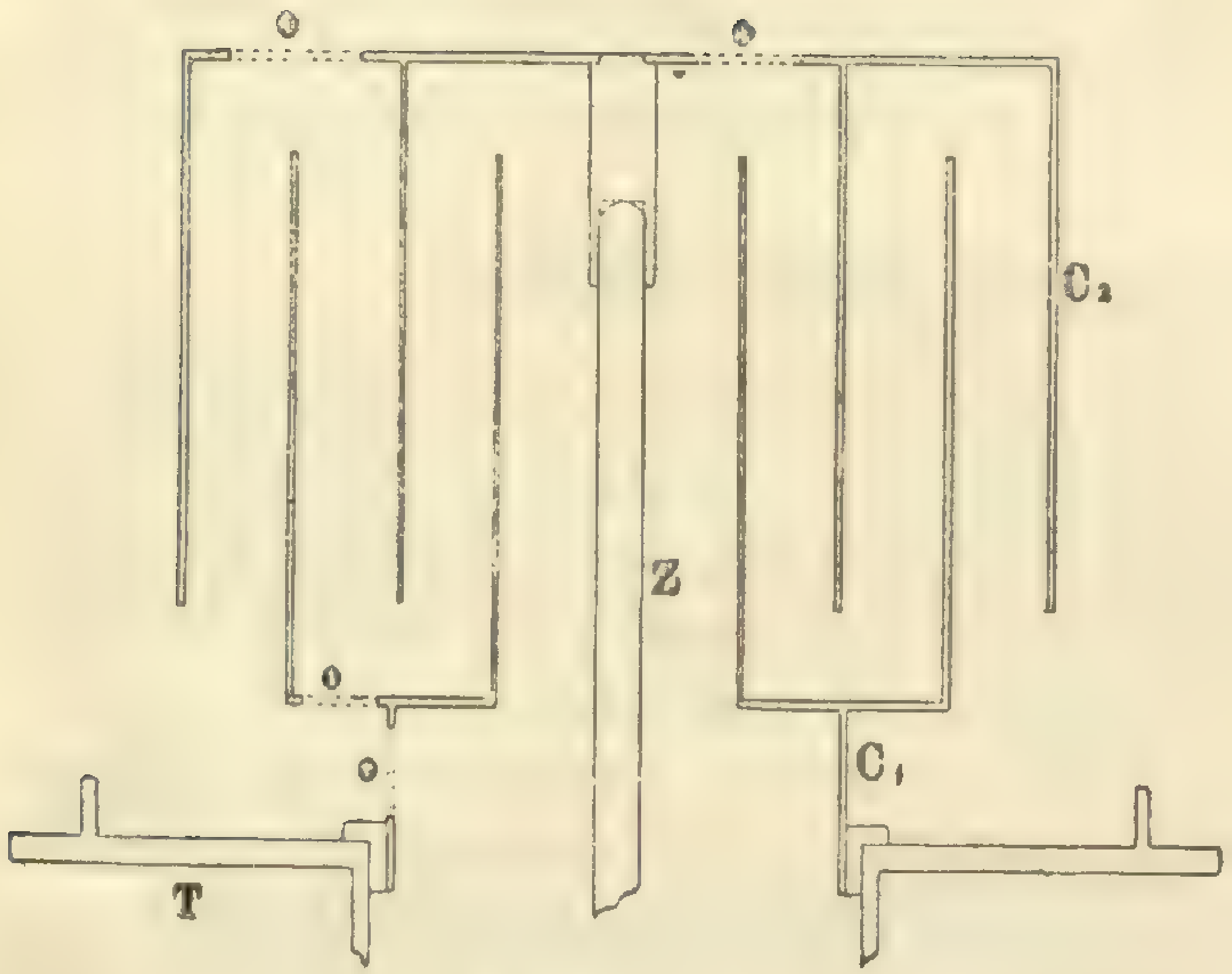

o
o
C₂
Z
o
o
C₁
T

Fig. 10. A.

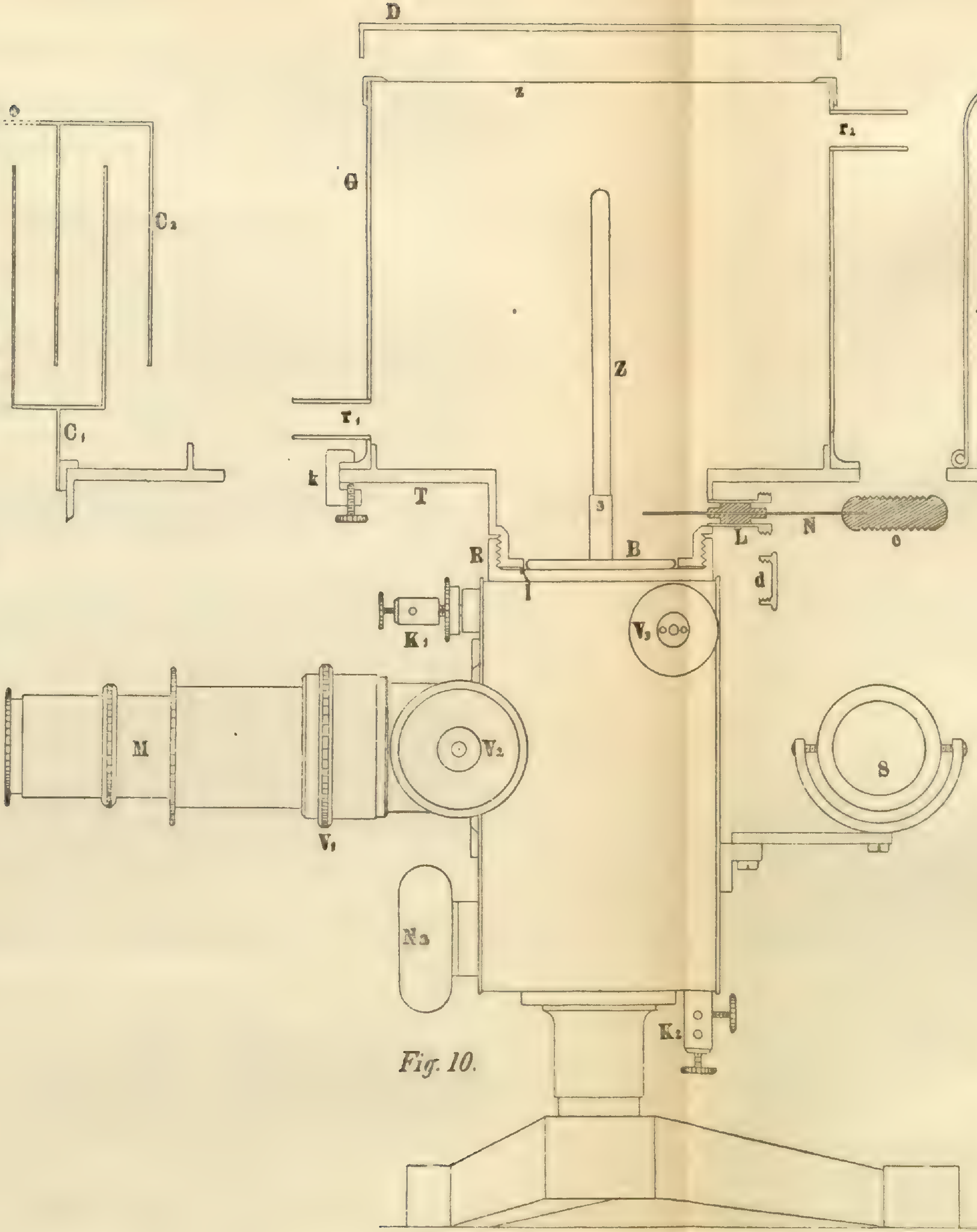

D
z
r₂
G
Z
r₁
k
T
s
R
B
L
N
o
d
K₁
V₃
V₂
M
V₁
S
N₂
K₂

Fig. 10.

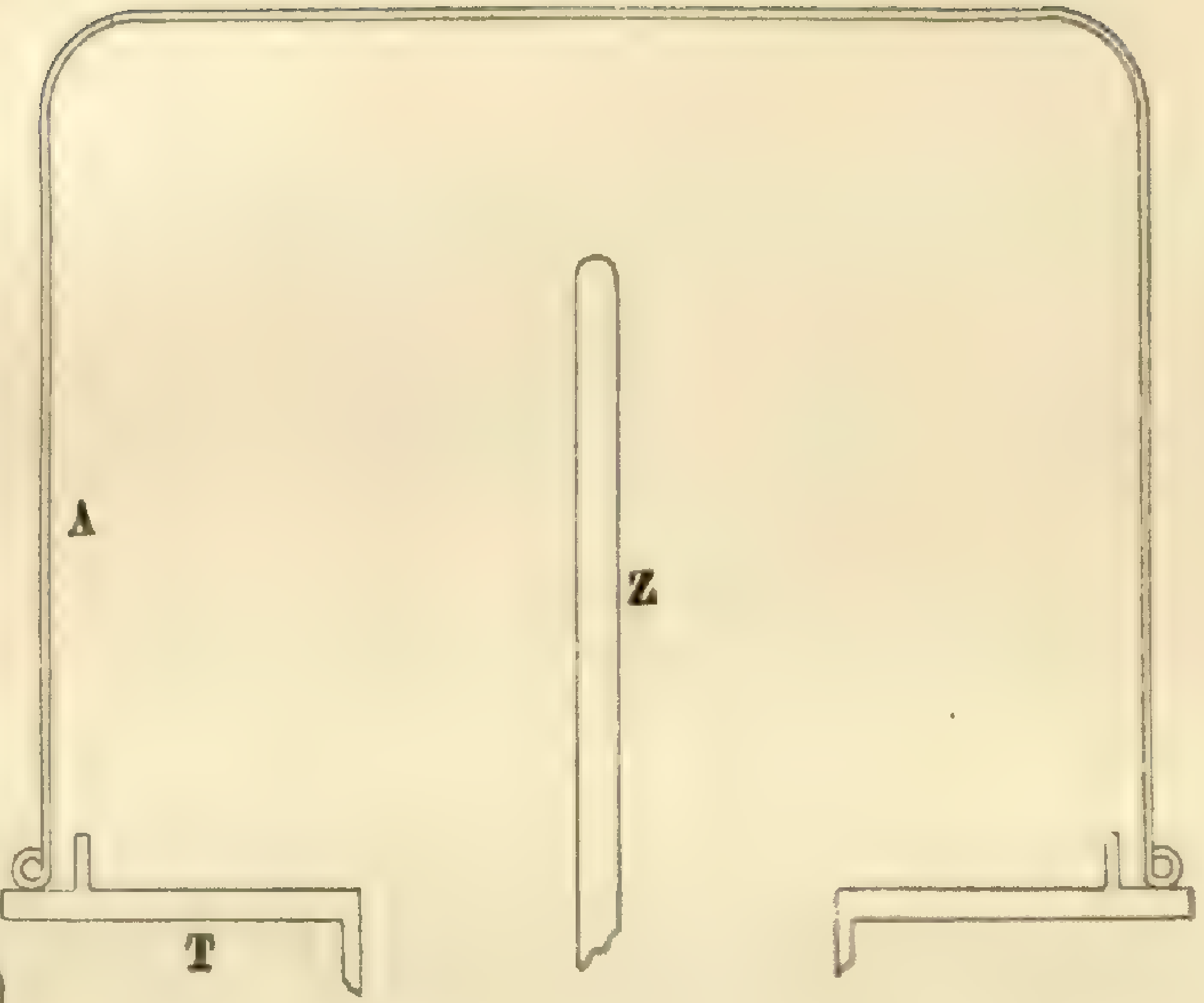


Fig. 10. B.

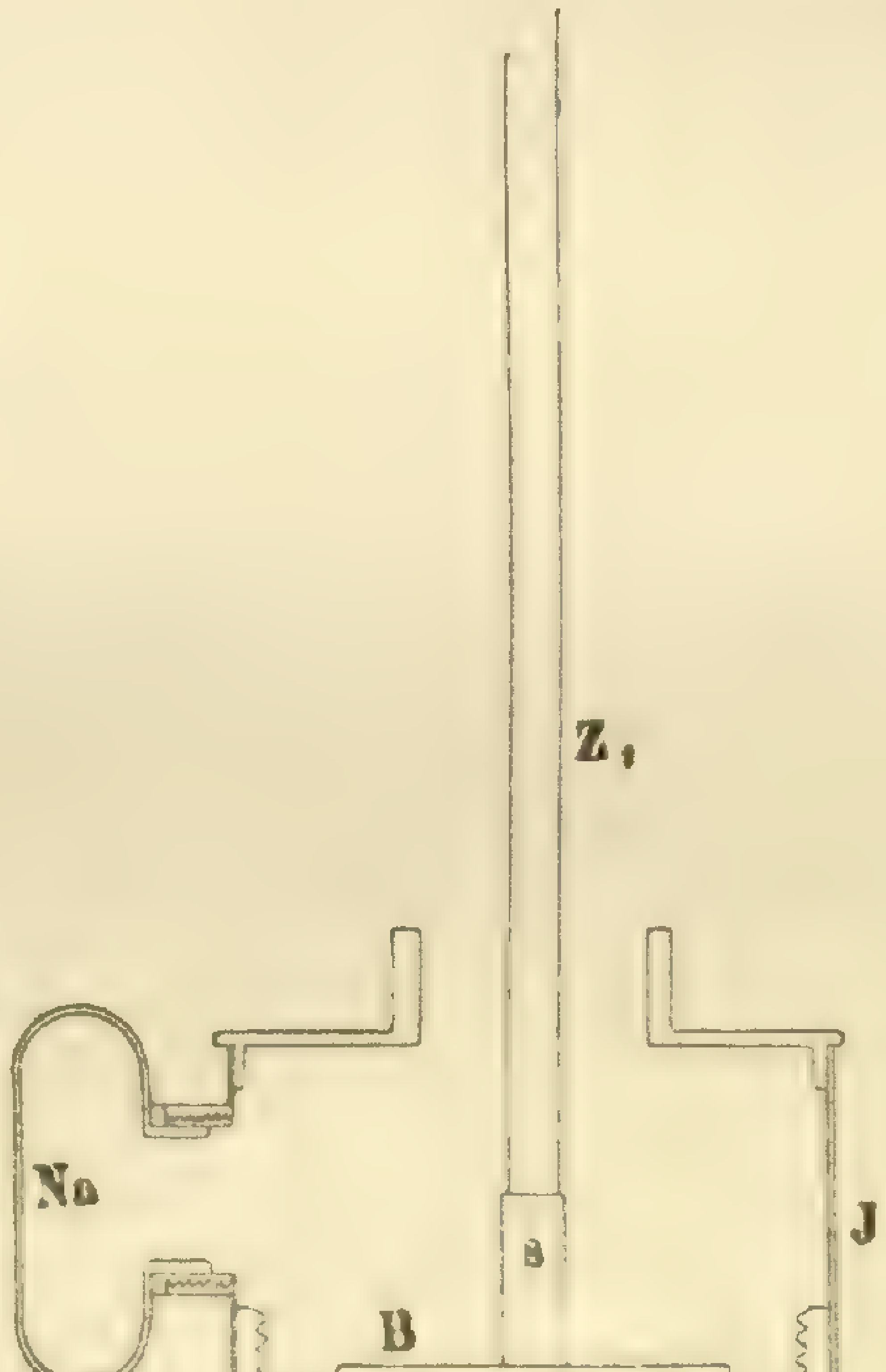


Fig. 10. C.

charge d'un ion à $3,4 \times 10^{-10}$ unité électrostatique, ces 20 gr. de roche produisaient par heure $\frac{0,021}{3,4 \times 10^{-10}} = 62$ millions d'ions de chaque signe, c'est-à-dire plus de 3 millions d'ions par gr.

3. Radioactivité des corps liquides

Les liquides contiennent parfois en solution des sels de radium et de thorium, comme, par exemple, la plupart des sources minérales. De même l'eau de pluie, la neige et la grêle possèdent une activité induite qui s'éteint plus ou moins vite suivant la composition. Quand on évapore l'eau rapidement, la substance active se fixe sur le récipient et rend conducteur l'air enfermé. Pour examiner la question de savoir à quelle hauteur dans l'atmosphère se trouvent les substances radioactives, il est important de s'assurer si la neige et la grêle sont aussi radioactives sur les sommets des montagnes, ou bien si elles ne reçoivent ces propriétés qu'à une faible hauteur. C'est pourquoi, pendant la tempête du 21 août 1908 à Schwarzsee au pied du Matterhorn, à une hauteur de 2600 mètres, on évapora 100 gr. de grésil dans un récipient en aluminium. Quand tout fut sec, on renversa simplement le récipient sur le plateau T (Fig. 10, B). Sans récipient activé, l'électromètre perdait 10 traits par heure ; après avoir reçu le récipient, il perdait 460 traits = 315 volts par la même capacité de 2,9 cm. Mais au bout d'une demi-heure, cette valeur avait baissé de moitié environ, ce qui prouve bien qu'il s'agit ici d'une activité induite.

4. Radioactivité de corps gazeux

L'air, surtout en cave et caverne, contient toujours des quantités considérables d'un gaz radioactif, appelé émanation. L'émanation se trouve aussi dans le gaz CO_2, qui se dégage en plusieurs endroits de la terre. On a trouvé particulièrement que l'eau de quelques sources minérales et thermales est fortement chargée

---

d'après les recherches récentes de Rutherford, que la vraie valeur soit plus grande. Espérons qu'on se décidera au prochain congrès de Radiologie à Bruxelles sur la valeur à appliquer.

d'émanation. On peut se servir de l'instrument (Fig. 10), pour calculer la quantité qui y existe. La plupart du temps l'émanation sera très faible et on n'emploie alors que le cylindre Z, comme corps de dispersion. Le gaz est pompé, à l'aide d'un soufflet en caoutchouc, par les ouvertures r_1 et r_2 dans le récipient. Ensuite on charge l'électromètre à l'aide de l'aiguille N, à un potentiel suffisamment élevé, pour produire un courant de saturation. L'électromètre indique, chaque seconde, une perte de Δv volts $= \frac{\Delta v}{300}$ unités électrostatiques du potentiel, c'est-à-dire, de la quantité d'électricité de $\frac{C\,\Delta v}{300}$ (déduction faite des pertes, dues à l'isolation). On a, par conséquent, une production d'électricité de $\frac{C\,\Delta v}{300.A}$ par seconde et par litre, si A représente le volume du gaz en litres.

L'air des cavernes ne sera cependant que par exception assez riche en émanation pour pouvoir se servir de cette méthode, mais l'acide carbonique, qui se dégage du sol, peut être assez actif pour être analysé. On recueille de ce gaz dans un flacon rempli d'eau d'une capacité de 2 à 3 litres et on le ferme avec un bouchon percé de deux trous. Pour mesurer l'activité du gaz on se sert de tuyaux appliqués en r_1 et r_2 avec le soufflet en caoutchouc, qui par un courant d'air entraîne le gaz accumulé dans le flacon et l'introduit dans le récipient G, jusqu'au mélange complet. Le récipient G doit être fermé hermétiquement. A cet effet les surfaces de contact doivent être graissées et les étaux en *k* serrés.

Supposons qu'il y ait dans le récipient A litres de gaz. Ils provoquent un courant de saturation de $\frac{C\,\Delta v}{300}$ unités électrostatiques. En tout il y a $A + B + d$ litres de gaz de la même activité, à savoir, A dans le récipient G, B dans le flaçon d'absorption, d dans les tuyaux et le soufflet. Ils produiront donc un courant $i = \frac{C\,\Delta v}{300} \frac{(A + B + d)}{A}$. Cette quantité est contenue en B litres du gaz recueilli ; il s'ensuit que 1 litre soutiendra un courant de $i = \frac{C\,\Delta v\,(A + B + d)}{300\,AB}$ unités électrostatiques. Par convention on mesure la teneur en émanation par cette force de courant.

La plupart du temps l'émanation est dissoute dans l'eau des sources. On recueille alors dans un flacon d'environ 2 litres, selon que l'émanation est plus ou moins forte, 1/2 l. à 1 l. Ensuite on laisse passer l'air du récipient G par un dégouttement continuel, en agitant bien dès le commencement, si l'on veut accélérer le mélange. Enfin on mesure la teneur en émanation comme de coutume.

Soient :

A La capacité du récipient ionisateur G.
w La quantité d'eau.
H L'espace vide dans le flacon au-dessus de l'eau.
d Le volume des tuyaux et du soufflet.
α Le coefficient d'absorption de l'eau pour l'émanation.
C La capacité électrostatique de l'instrument.

H. W. Schmidt (¹) a démontré que, pour le courant de saturation de l'émanation dans un litre d'eau, on a la formule

$$i = C\,\frac{\Delta v}{300\,w}\left[\frac{A+H+d}{A}\left(1+\alpha\,\frac{w}{H}\right)\right]$$

selon les recherches de R. Hofmann (²), α a des valeurs différentes suivant les différentes températures. A savoir :

$$\begin{array}{lllll} \theta = & 0 & 20 & 40 & 60 \\ \alpha = & 0{,}52 & 0{,}27 & 0{,}16 & 0{,}12 \end{array}$$

Pour ce qui concerne les corrections causées par les défauts d'isolation, d'activité induite, d'influence des parois du récipient G, nous renvoyons aux recherches des spécialistes.

5. Radioactivité induite

Elster et Geitel ont montré qu'on peut obtenir directement de l'atmosphère des dépôts radioactifs sur des fils qu'on charge négativement à un potentiel de 1000 volts et qu'on expose plusieurs heures à l'air. Cette activité se perd également plus ou moins vite selon la composition de l'induction de radium et de thorium.

(¹) H. W. Schmidt, Phys. Zeitschrift, 6, 561, 1905.
(²) H. Mache et St. Meyer, Phys. Zeitschrift, 6, 692, 1905.

L'examen de ces fils a également eu lieu à l'aide de la disposition ici décrite. Le fil de 10 m. environ avait été enroulé sur un petit bâti (Fig. 11) qui allait justement sous le récipient G (Fig. 10). L'observation se fait ensuite comme dans les cas de corps solides.

6. Rayons pénétrants de l'atmosphère

Plusieurs savants (¹) ont prouvé qu'il y a constamment dans l'atmosphère un rayonnement d'un grand pouvoir pénétrant (rayons γ) par lequel l'air s'ionise dans les récipients clos. Mais il est prouvé en outre que les parois des récipients métalliques émettent aussi constamment des rayons ionisants qui diffèrent suivant les métaux. Il est donc désirable que les observations se fassent avec le même appareil pour obtenir du moins ainsi des résultats à peu près comparables. C'est pour ce motif que j'ai essayé de construire pour ces observations un appareil aussi par-

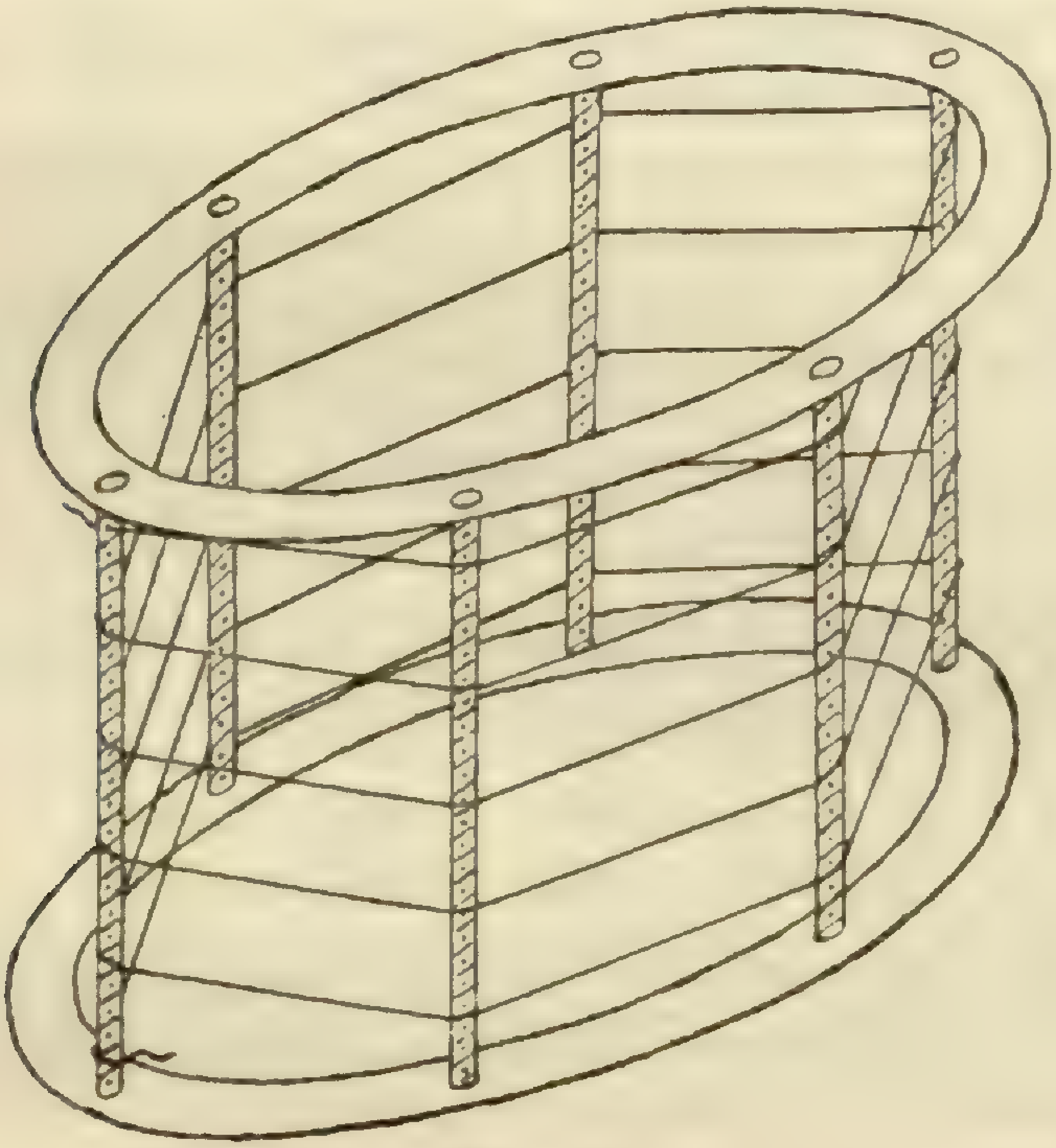


FIG. 11.

(¹) E. Rutherford et F.-L. Cooke, PHYS. REV., 16, 183, 1903 ; J.-C. Mc. Lennan et E.-F. Burton, PHIL. MAG., 5, 699, 1903.

fait que possible. Après avoir décrit cet appareil, nous communiquerons quelques résultats des observations.

a) L'appareil. Il a été constaté que les rayons γ de l'atmosphère sont soumis à des variations constantes mais faibles, d'où la nécessité d'employer des appareils aussi sensibles que possible. Comme les rayons γ pénètrent de grands espaces sans affaiblissement sensible, le nombre des ions produits augmente avec le volume d'air. Mais on ne peut pas prendre un récipient d'un trop grand volume, autrement les appareils seraient d'un transport trop difficile. On a finalement choisi un récipient de près de 3 litres.

La sensibilité est d'ailleurs d'autant plus grande que la capacité des parties chargées est plus petite. La capacité de cet instrument a pu être portée bien au-dessous des valeurs généralement usitées en se servant des fils mêmes comme de corps de dispersion. La capacité totale ne fut plus alors que de 1,2 cm.

En troisième lieu, il faut tenir compte de la sensibilité de l'électromètre. Mais comme il faut être constamment sûr du courant de saturation, on ne peut choisir la sensibilité à volonté. Un appareil allant jusqu'à près de 200 volts s'est trouvé être le plus favorable, car la tension peut baisser alors de 200 jusqu'à 150 volts environ et puis il faut recharger.

Deux points surtout étaient décisifs pour la forme de la cage : l'étanchéité complète à l'air et la possibilité d'absorber partiellement les rayons extérieurs par l'application de plaques de plomb sur les parois. On choisit un tambour horizontal de 17 cm. de diamètre et de 13 cm. de profondeur. Déduction faite de la partie du microscope qui s'avance à l'intérieur, ce tambour a une contenance d'à peu près 2700 cm^3. Les deux surfaces planes limites se composent d'étain en lames minces. Ces surfaces étant entièrement libres, on peut facilement les renforcer en les recouvrant de lames de plomb. Dans le manteau du cylindre sont pratiquées les ouvertures pour la lumière (voir Fig. 12), le microscope et la chambre desséchante au sodium.

Les fils sont fixés en haut à un petit cylindre en ambre. Ce cylindre est porté par une baguette dépassant en haut l'instrument et terminée par un disque crénelé. A l'aide de ce disque, le plan des deux fils peut toujours être ajusté verticalement à l'axe du microscope, ce qui fait que les deux fils se voient constamment avec une grande netteté et simultanément.

Il était enfin désirable de pouvoir aussi déterminer en tout temps les fautes d'isolation. C.-T.-R. Wilson (¹) s'affranchit de ces fautes en donnant au petit morceau de soufre isolateur la charge du potentiel moyen de la petite feuille et en admettant ensuite que les fautes s'annulent. Mais ce procédé exige une batterie extrêmement constante et peut, pour ce motif, s'employer rarement hors du laboratoire. Et c'est pourtant précisément hors du laboratoire qu'on rencontre des valeurs anormales de dispersion, comme, par exemple, dans les cavernes, et c'est là qu'il serait fort nécessaire de pouvoir faire un tel examen.

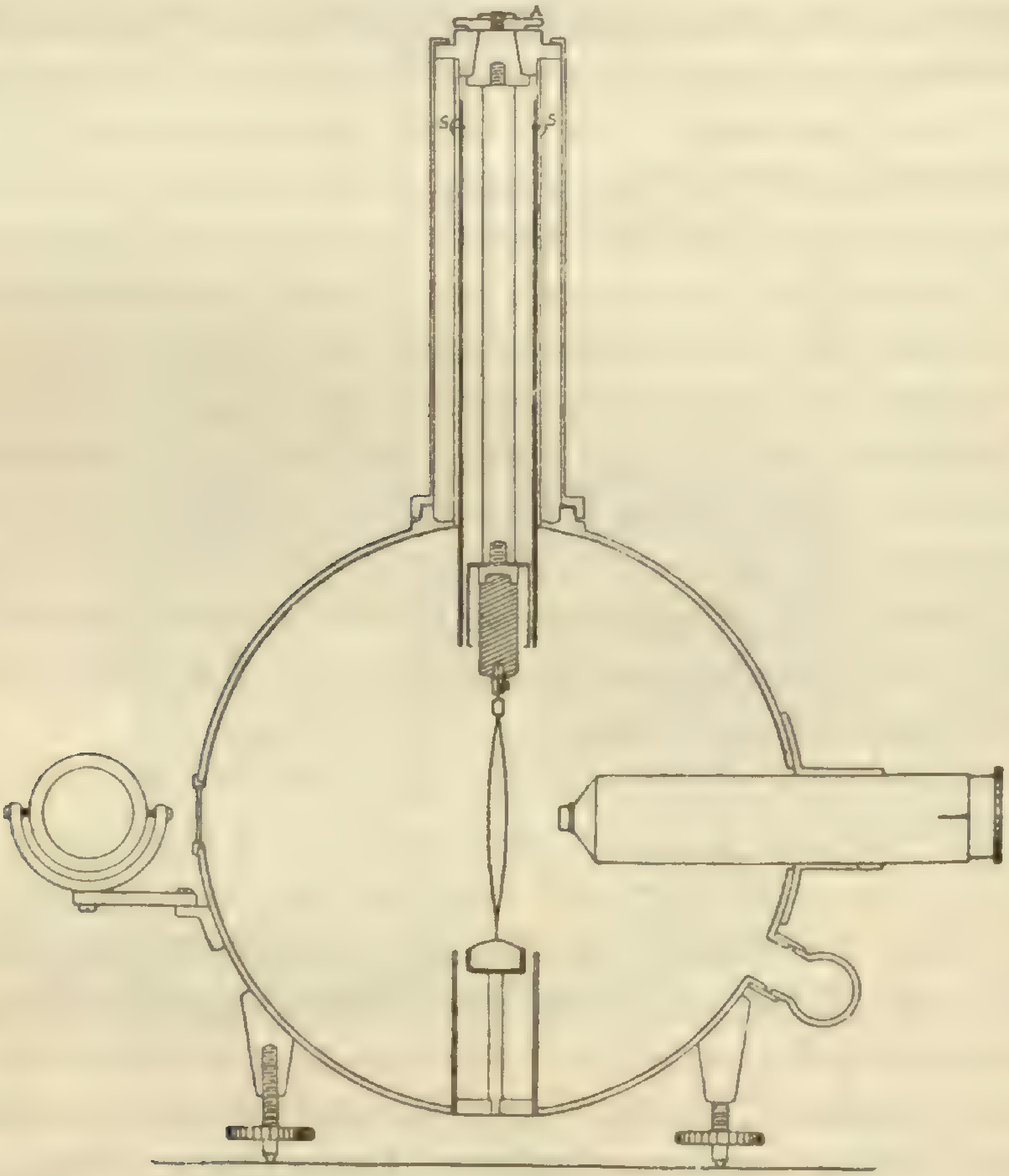


Fig. 12.

La méthode ci-après décrite n'exige absolument aucun appareil auxiliaire et s'exécute en laissant la cage entièrement fermée. En voici le principe fondamental.

(¹) C.-T.-R. Wilson, Proc. Roy. Soc. 68, 152, 1901.

La perte de charge Q observée pendant un temps déterminé, 1 seconde, par exemple, se compose en général de la perte d'isolation A et de la perte causée par les ions de l'air enfermé. Si V est le volume du récipient et B la charge d'ions produite par cm^3 et par seconde, on a, au courant de saturation,

$$Q = A + BV.$$

Mais si on diminue fortement le volume V en V_1, la part du rayonnement diminue proportionnellement tandis que les fautes d'isolation ne varient pas et prédominent par conséquent d'une manière relativement considérable. On a alors au même potentiel

$$Q_1 = A + BV_1.$$

De là résulte que la perte d'isolation est

$$A = \frac{VQ_1 - V_1Q}{V - V_1}.$$

Si V_1 est petit comparé à V, Q_1 sera aussi petit comparé à Q par une bonne isolation et on aura par approximation suffisante

$$A = Q_1 - \frac{V_1}{V} Q. \tag{13}$$

La charge d'ions par cm^3 est donc

$$B = \frac{Q - Q_1}{V - V_1}. \tag{14}$$

Comme l'instrument donne immédiatement les voltages, on a besoin d'une petite réduction pour trouver les valeurs de Q et Q_1. Soit Δv la diminution du potentiel en volts $= \frac{\Delta v}{300}$ unités électrostatiques, qu'on a trouvé pour une heure, soit C la capacité de l'appareil (par exemple, celui qui était employé avait la capacité de 1,2 cm.), on a la perte de charge d'une seconde $Q = \frac{C\Delta v}{300 \times 3600}$ $= \frac{1,2}{300 \times 3600} \Delta v$ unités électrostatiques.

De même la perte dans le petit espace $Q_1 = \frac{1,2}{300 \times 3600} \Delta v_1$, si

Δv_1 signifie la diminution du potentiel par heure avec le cylindre en bas. On a donc

$$B = \frac{1{,}2}{300 \times 3600\,(V - V_1)}(\Delta v - \Delta v_1).$$

Si enfin on admet comme valeur probable de la charge d'un ion $\epsilon = 3{,}4 \times 10^{-10}$ unités électrostatiques, le nombre d'ions par cm^3 et seconde sera

$$N = \frac{B}{\epsilon} = K(\Delta v - \Delta v_1). \qquad (15)$$

ou K est pour chaque appareil une constante

$$K = \frac{C}{300 \times 3600\,(V - V_1)\epsilon}.$$

Quand l'isolement est en bon état, Δv_1 est négligeable, et le nombre d'ions d'un signe produits par seconde dans 1 cm^3 se calcule par la formule simple

$$N = K\Delta v.$$

La diminution de volume a été rendue possible en faisant glisser un cylindre étroit au-dessus des fils. La figure 12 représente ce dispositif intérieur, Le cylindre est ordinairement dans un tuyau à rainures au-dessus de l'instrument. Pour examiner l'isolation, on lit d'abord la position des fils et puis on abaisse le cylindre à l'aide des deux vis S avançant dans les rainures. Au bout d'un temps convenable, une heure, par exemple, on remonte ce cylindre et on lit immédiatement la perte. L'approche du cylindre altère, il est vrai, la capacité de l'instrument et il faudrait un jaugeage spécial. Aussi ne faut-il lire qu'après éloignement du cylindre et tout peut alors se rapporter au même jaugeage. Pour exclure d'ailleurs toute espèce d'erreur, le cylindre ne possède aucune ouverture pour la lumière. Cela simplifie la construction et isole plus complètement le petit espace de sa grande ambiance.

Pour empêcher l'air frais de pénétrer lentement à l'intérieur de la cage à travers les rainures, on a encore prévu un cylindre fermé par le haut qui isole tout le tuyau surmontant et forme fermeture étanche par l'interposition d'une bague de cuir graissé. C'est ainsi que toutes les autres ouvertures ferment hermétiquement.

Au commencement, l'influence de la polarisation à la charge était très forte et se faisait d'autant plus sentir que la capacité était plus petite et la sensibilité plus grande. Cet inconvénient disparut entièrement après que l'instrument eut été fermé plusieurs jours et desséché au sodium. La première lecture peut se faire immédiatement après la charge.

La charge se fait à l'aide d'un contact tournant solidement relié à la cage (il n'est pas dessiné dans la figure 12). Quand on tourne ce contact, un fil métallique se pose à l'intérieur ou sur la cage ou sur le porte-fils, juste au-dessous de la petite baguette d'ambre.

On voit par là que ces essais sont d'une extrême simplicité. On ajuste l'appareil à l'aide des vis calantes de façon que les fils apparaissent bien nettement ; on charge pour le mieux à l'aide d'une pile de Zamboni, et puis on n'a plus besoin de faire les lectures que toutes les demi-heures ou toutes les heures. S'il est impossible d'avoir les deux fils bien nets simultanément, on tourne légèrement, très lentement et avec précaution le disque au haut de l'instrument.

b) Voici quelques résultats déjà obtenus avec l'appareil ci-dessus décrit.

1) De la variation temporaire du rayonnement pénétrant.

On sait que plusieurs savants ont observé une période quotidienne du rayonnement γ de l'atmosphère qui, chose remarquable, concorde généralement avec le cours quotidien du potentiel de l'atmosphère. Ce fait est de la plus grande importance aussi bien pour la question de l'origine du rayonnement que pour celle de l'origine du champ terrestre.

Grâce à la plus grande précision et sensibilité de mon appareil, j'ai pu étendre sur plusieurs points les résultats de mes savants prédécesseurs et donner des indications quantitatives sur l'amplitude de la variation quotidienne, ce à quoi n'a pas peu contribué le temps extraordinairement favorable des mois d'octobre et de novembre de l'année passée, 1908.

Le mois d'octobre était encore tout spécialement important parce que c'est pendant le cours de ce mois que le type estival de la chute du potentiel passe au type hivernal à l'exception de la dépression de midi. La question était donc de savoir si le rayonnement γ se comporte de même, s'il a un cours différent en été et en hiver.

Mes observations ont montré qu'il en est réellement ainsi. En voici les preuves.

Après quelques observations préparatoires au commencement d'octobre, le temps fut pluvieux le 10 et le 11, mais il se remit le 12 et les observations commencèrent. Du 12 au 15, le temps fut continuellement beau et eut un caractère absolument estival.

L'observation du rayonnement donna les mêmes résultats durant ces quatre jours : deux maxima de 8 à 9 h. le matin et le soir, deux minima après midi et après minuit. Le tableau suivant indique les valeurs moyennes horaires de ces quatre jours. Les nombres représentent les pertes de charge par heure en volts.

TABLEAU III

	12-1	1-2	2-3	3-4	4-5	5-6	6-7	7-8	8-9	9-10	10-11	11-12
Matin	17,2	16,6	16,6	16,6	16,7	16,75	17.9	18,9	19,7	19,4	18,6	18,8
Soir	18,4	18,3	17,5	17,3	18,6	18,4	18,5	18,6	19,2	18,6	18,3	18,3

En tenant compte de la capacité et du volume du récipient de dispersion et en admettant la charge élémentaire $3,4 \times 10^{-10}$ unité électrostatique pour un ion, il en résulte que le nombre d'ions produits dans 1 cm^3 en une seconde est compris entre 27,2 et 32,3.

L'amplitude de la variation du matin est aussi la plus grande comme pour la chute du potentiel, c'est-à-dire 16 % de la plus haute valeur. L'amplitude de la variation du soir n'a été que de 10 %.

La pluie reparut le 16 et le 17 octobre. Les observations donnèrent bien un cours analogue, mais ne servirent pas à former des moyennes.

C'est alors que vint la grande période de beau temps du 18 octobre jusqu'au 10 novembre, interrompue une seule fois, le 24 octobre, par des nuages et de faibles pluies. Mais le temps avait déjà un caractère tout à fait hivernal et le thermomètre tomba plusieurs fois la nuit au-dessous de zéro.

Or, il est caractéristique de voir comment, à mesure que la saison avançait, la dépression méridienne du rayonnement pénétrant diminuait toujours davantage.

Dans la seconde moitié d'octobre, la lecture se faisait presque à chaque heure et les observations continuaient aussi pendant la nuit, mais avec une lecture toutes les 2 ou 3 heures. Pour bon nombre de ces lectures, je dois des remercîments à quelques-uns de mes amis. Dans la valeur moyenne de ces observations, l'amplitude de la marche de l'après-midi ne s'élève plus qu'à 4,5 % de la plus haute valeur.

En novembre disparut entièrement la dépression méridienne. Le maximum du matin se transporta en même temps vers 10 à 11 h. avant midi. Les observations avaient lieu la plupart du temps de 6 h. avant midi à 9 h. après midi.

L'amplitude s'éleva à 21 % de la plus haute valeur et était par conséquent de 5 % plus haute qu'en octobre.

C'est exactement ainsi que se comporte dans nos contrées la chute du potentiel. La dépression méridienne disparaît, les amplitudes du jour augmentent et le maximum du matin se présente à peu près une heure plus tard.

Il résulte de tous les détails de ces observations un parallélisme complet entre la chute du potentiel atmosphérique et le rayonnement pénétrant. Il ne resterait plus qu'à rechercher si les variations, que nous considérons comme des troubles de la marche ordinaire, vont également de pair dans les deux phénomènes. On a déjà commencé à ce sujet des observations dans lesquelles fonctionnent simultanément l'appareil enregistrateur du potentiel ci-dessous décrit et l'appareil à rayonnement.

2) De la différence locale du rayonnement pénétrant.

Il n'est pas facile d'obtenir sur ce point des résultats certains, à cause des variations temporaires ci-dessus qui se présentent toujours. On ne peut qu'avec la plus grande prudence désigner comme réelles les minimes différences qui ne dépassent pas le domaine de l'amplitude quotidienne. On ne pourra donner des indications certaines à ce sujet que quand deux observateurs travailleront avec deux appareils qui auront été préalablement comparés entre eux pendant un temps assez long.

Mais ce seraient surtout les observations faites en ballon et au lancement de cerfs-volants qui pourraient aussi donner de très précieux résultats sur la question de savoir s'il faut chercher le point de départ de ces rayons dans l'écorce terrestre ou bien dans l'atmosphère ou bien même dans les astres.

Elster et Geitel (¹) ont déjà expressément attiré l'attention sur l'importance des observations dans les cavernes.

Les recherches faites avec un appareil ont amené les résultats ci-après.

Dans la chambre, même près d'une fenêtre ouverte, l'amplitude moyenne de la période quotidienne pendant 8 jours consécutifs calmes, du 1 au 8 novembre, était de 9 $^0/_0$ de la plus haute valeur.

Du 9 au 16 novembre, l'appareil était en plein air, devant la fenêtre d'une chambre située au S.-E. Les variations déterminées de la même manière qu'auparavant s'y élevèrent à 21 $^0/_0$.

Les variations relativement petites dans la chambre et la faible sensibilité des appareils qui exigeait une durée d'observation de plusieurs heures pour obtenir des écarts bien mesurables, expliquent suffisamment comment cette période quotidienne a pu échapper complètement à l'attention de quelques savants.

J'ai eu, en outre, l'occasion de faire des observations dans les immenses cavernes de craie qui se trouvent dans le voisinage de Fauquemont et de Maastricht, en Hollande et en Belgique. La roche connue en géologie sous le nom de craie de Maastricht est très tendre. Elle fournit depuis des siècles des matériaux de construction pour les maisons ordinaires, et on y trouve des galeries de plusieurs kilomètres de long à multiples embranchements. On ne fait point sauter les pierres à la mine, mais on les coupe à la scie. L'air n'y est donc pas contaminé par la fumée des explosifs. A quelque distance de l'entrée, il y règne toute l'année une température constante de 11°,2. L'humidité y est de 100 $^0/_0$.

Voici les mesures de précaution prises pour être sûr des observations :

(¹) Elster et Geitel, Physik. Zeitschr., 6, p. 733, 1905.

On reprenait les mêmes observations à différents jours et à différents endroits des cavernes. Elles duraient tantôt 1 heure, tantôt 5 h. 1/2.

Pour ne pas avoir à souffrir des rapides variations de température qui auraient pu survenir, on ne choisissait que les journées pendant lesquelles la température extérieure était également d'à peu près 11°.

L'observation dans la caverne se faisait constamment entre deux observations de plusieurs heures hors de la caverne. Ces valeurs d'avant et d'après ne différaient jamais plus les unes des autres qu'elles ne le faisaient autrement dans l'intervalle de temps correspondant.

L'appareil se chargeait dehors et y était observé 1 ou 2 heures, puis on le portait tout chargé dans les cavernes où on continuait simplement la lecture.

L'appareil était hermétiquement fermé, tous les joints des vis étaient soigneusement rendus étanches avec de la cire à luter ou de la graisse de pompe à air. A l'intérieur des cavernes, on n'ouvrait absolument rien à l'appareil.

Voici les résultats obtenus. Toutes les observations sans exception présentèrent le phénomène observé par Elster et Geitel (1) dans les salines d'Hedwigsburg et attribué par eux à une action spéciale du sel gemme. Seulement ce phénomène était encore bien plus justement accentué dans la craie de Fauquemont : les pertes diminuaient d'à peu près 42 % à l'entrée dans les cavernes, tandis qu'elles avaient diminué d'à peu près 28 % dans les salines.

Le tableau ci-dessous indique les pertes en volts par heure : avant, dans les cavernes et après. Les nombres de la deuxième colonne donnent la durée du séjour dans la caverne. La dernière colonne représente la diminution de perte en % de la valeur moyenne de l'observation d'avant et d'après.

---

(1) *Loc. cit.*

TABLEAU IV

Date	Durée	Avant	Caverne	Après	°/₀
31 oct.	1 h. 1/3	**17,3**	**9,9**	**18,6**	42
6 nov.	1 h.	**15,4**	**9,0**	**14,2**	40
14 nov.	5 h. 1/2	**13,5**	**8,3**	**15,3**	43

La diminution de la dispersion commença immédiatement à l'entrée dans la caverne et cessa subitement à la sortie de la caverne.

Les *mesures* de précaution si bien prises et la parfaite concordance des diverses observations semblent bien exclure ici toute illusion. Il est surtout absolument impossible d'admettre des troubles dans le sens d'une isolation beaucoup meilleure dans les cavernes humides, isolation commençant subitement à l'entrée et disparaissant avec la même soudaineté. Il ne reste donc plus que cette explication fort simple : les roches arrêtent (entièrement ou partiellement) le rayonnement à grand pouvoir pénétrant qui existe au dehors dans l'atmosphère. L'épaisseur de la couche de roche au-dessus du lieu d'observation est estimée à 15 ou 20 m.

De ces observations on peut tirer quelques conclusions sur les causes de la perte d'électricité dans la chambre de dispersion. Voici les sources possibles de ces pertes :

1° Isolation incomplète du corps chargé.

2° Ionisation de l'air enfermé, ionisation opérée par des rayonnements provenant des parois du récipient.

3° Ionisation de l'air enfermé, ionisation opérée par des rayonnements provenant de l'extérieur et pénétrant les parois du récipient.

Comme dans l'appareil fermé ce dernier facteur a seul changé à l'entrée dans les cavernes, il s'ensuit qu'il faut attribuer au rayonnement pénétrant de l'extérieur au moins 42 °/₀ de la perte totale observée à l'extérieur ou 10,7 ions pour 1 cm³ et 1 seconde. Si on réussissait à trouver des endroits encore plus profonds et montrant une baisse encore plus grande, il s'ensuivrait que la participation du rayonnement pénétrant est encore plus grande.

Les pertes provenant de l'isolation étaient très petites. Il est vrai qu'on n'avait pas encore appliqué à l'appareil employé le tuyau diminuant le volume. Voici les résultats de l'essai de l'isolation fait de la manière ci-dessus décrite sur un appareil achevé plus tard. Les pertes s'élevèrent à 15 volts environ avec le volume tout entier ; quand on y mit le cylindre, la perte se réduisit instantanément à 0,4 volt. Voici donc ce qui s'ensuit :

1° En aucun cas la perte causée par les fautes d'isolation n'est plus grande que 0,4 volt, c'est-à-dire 2,7 %. Cela suffit déjà dans la plupart des cas.

2° Mais de ces 0,4 volt il faut sûrement déduire l'import du rayonnement pénétrant attribuable au volume du cylindre étroit V_1. Dans ce cas, le rayonnement de l'extérieur avait causé au moins 42 % de l'effet total, c'est-à-dire 6,3 sur 15 volts. Le volume V_1 étant $\frac{1}{90}$ V, il revient donc au moins 0,07 volt de ces 6,3 volts au volume V_1. Les pertes d'isolation s'élèvent donc sûrement à moins de 0,33 volt.

Rigoureusement parlant, le rayonnement extérieur est légèrement réduit par la paroi du cylindre étroit. Mais il est facile de se convaincre que c'est là une quantité négligeable.

3° De ces 0,33 volt il y a encore une partie à attribuer au rayonnement α qui part des parois mêmes du tuyau étroit. L'import de cette influence n'est pas exactement connu, parce qu'on n'a pas réussi jusqu'ici à séparer nettement du rayonnement des parois du récipient l'effet du rayonnement extérieur. Cependant Campbell (¹) a montré que, dans les récipients suffisamment étroits, l'effet des parois est également proportionnel au volume.

Si donc on fait le tuyau étroit en une matière ayant le même pouvoir ionisant que toute la cage, le résultat sera celui qui a été présupposé à la dérivation des formules (13) et (14), c'est-à-dire que tout l'effet du rayonnement tant de l'extérieur que des parois elles-mêmes diminue proportionnellement au volume. Dans cette

---

(¹) N. R. Campbell, Jahrbuch der Radioaktivitat, 2. 434. 1905.

supposition, la perte d'isolation est donc suivant la formule (13)

$$A = 0{,}4 - 0{,}17 = 0{,}23 \text{ volt},$$

c'est-à-dire 1,5 % de l'effet total.

Il résulte finalement que, dans cet appareil, les pertes d'isolation constituent des imports extrêmement faibles, ces pertes dépendant en partie de rayons pénétrant de l'extérieur, en partie d'un rayonnement qui part des parois. Le premier effet est d'au moins 42 % et probablement encore un peu plus.

Ce résultat est encore remarquable en tant que Cooke (¹) n'a pas réussi à arrêter plus de 30 % du rayonnement à l'aide d'écrans en plomb, même quand il mit l'appareil dans un bloc de plomb pesant cinq tonnes. Cette circonstance s'explique probablement par le fait que le plomb est lui-même radioactif.

Si on compare ces résultats avec ceux trouvés par Elster et Geitel (²) dans les salines et par Gockel et Wulf (³) dans le tunnel du Simplon, l'influence des masses de roches environnantes se trouve être double. D'une part, elles arrêtent le rayonnement extérieur et, d'autre part, elles émettent elles-mêmes un rayonnement capable de pénétration.

Selon que le dernier effet est plus grand ou plus petit que le premier, le rayonnement total dans les cavernes est plus grand (Simplon) ou plus petit (salines, craie de Fauquemont) qu'à l'extérieur.

C'est pour cela que l'appareil décrit ici offre un moyen bien simple de faire des recherches sur la radioactivité des roches. Ces recherches seraient tout spécialement importantes pour découvrir la cause de l'augmentation de la température à l'intérieur de la terre. En effet, on sait que plusieurs savants ont exprimé la supposition que l'élévation de température à l'intérieur de la terre était due à des substances radioactives. Dernièrement encore J. Joly (⁴) a montré quelle importance ces recherches auraient pour la géologie tout entière. Le présent appareil offrirait le

---

(¹) Cooke, PHIL. MAG., 6, 483, 1903.

(²) Elster et Geitel, PHYS. ZEITSCHR., 6, 733, 1905.

(³) Gockel et Wulf, PHYS. ZEITSCHR., 9, 907, 1908.

(⁴) J. Joly, NATURE, 78, 456, 1908.

moyen de décider directement cette question. En effet, la chute de température devrait monter et descendre comme le rayonnement pénétrant. Les lieux à chute de température anormalement élevée ou basse seraient surtout d'une haute portée. Les observations dans le tunnel du Simplon, où on sait que la température est anormalement élevée, plaident pour l'origine radioactive de la chaleur souterraine. Les observations de Fauquemont serviront difficilement à cet usage, parce que les cavernes y sont trop peu profondes pour permettre de déterminer avec quelque précision l'augmentation de température.

CHAPITRE III

LES PROBLÈMES DE L'ÉLECTRICITÉ ATMOSPHÉRIQUE

1. La chute du potentiel atmosphérique

La chute du potentiel est le premier élément de l'électricité atmosphérique. L'examen s'en fait ou bien par des observations isolées ou bien par un enregistrement continu. Le présent instrument convient très bien à ces deux modes. Il n'y a rien de spécial à mentionner ici sur l'observation subjective qui se fait absolument comme d'ordinaire. Nous allons succinctement décrire ici l'appareil pour l'enregistrement continu de la chute du potentiel.

La figure 13 représente une vue de l'appareil tout entier. Ses dimensions sont 20 × 30 × 40 cm. L'électromètre et le dispositif enregistreur sont solidement montés sur une planche qui sert de base commune. Un collecteur à flamme ou à jet d'eau est relié par le fil métallique A à l'électromètre dont les fils s'écartent plus ou moins selon le potentiel. Un petit objectif projette l'image des parties médianes des fils sur une bande de papier photographique qu'un mouvement d'horlogerie fait avancer bien uniformément.

Comme, dans les problèmes à résoudre tout d'abord, il s'agit avant tout de connaître le cours parfaitement régulier de la chute du potentiel, la soi-disant électricité de beau temps, on a pu prendre un mouvement tellement lent que les frais de papier ne jouent plus qu'un rôle insignifiant. Une bande de 1 m. de long et de 6 cm. de large suffit pour une semaine entière et la courbe journalière s'étend alors sur 14 cm. Comme le mouvement d'horlogerie marche lui-même une semaine, l'appareil peut fonctionner pendant tout ce temps-là sans qu'on ait besoin de s'en occuper.

Un dispositif est encore maintenant requis pour enregistrer simultanément le temps sur la photographie. A cet effet, un contact appliqué au mouvement d'horlogerie excite à chaque heure un petit électro-aimant. Le levier H est ainsi attiré et pousse d'abord de côté le ressort F pour se poser immédiatement après contre le crayon de charge C et décharger l'électromètre. Les deux fils se rapprochent et on obtient deux points isolés dans la courbe.

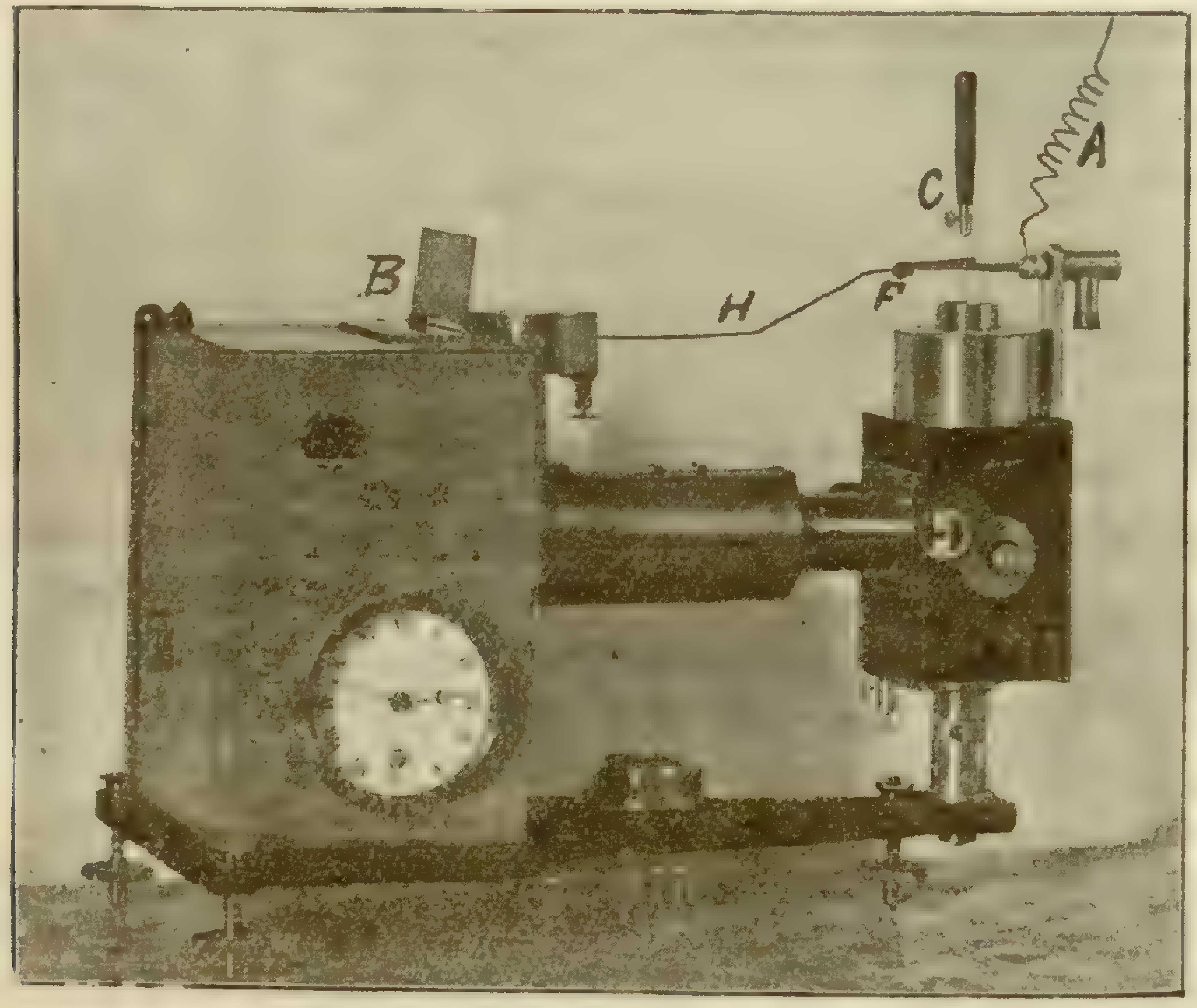


FIG. 13.

Ces deux points désignent donc

a) Le temps par leur distance des couples de points voisins.

b) La position de l'électromètre à zéro par leur distance l'un de l'autre ;

c) Deux points appartenant exactement à un couple déterminé de points des deux courbes. S'il arrivait que le papier avançât de travers, l'exacte valeur de la faute serait enregistrée à chaque heure et cette faute serait ainsi neutralisée. Pendant l'enregistrement du point horaire, le collecteur demeure isolé (sans se décharger) ; seule la faible capacité de l'électromètre est reliée à la terre ; quand donc l'électromètre est remis en marche, les fils retournent immédiatement presque entièrement à leur vraie position.

Il est souvent désirable de déterminer également de l'extérieur la position des fils, soit pour savoir la chute du potentiel à un instant quelconque, soit pour s'assurer du fonctionnement régulier de tous les dispositifs. A cet effet, on projette en haut une autre petite bande du cône lumineux à l'aide d'un étroit miroir incliné. Cette petite bande y rencontre une glace dépolie en B sur laquelle est gravée une échelle en mm.

Ce dispositif peut en même temps servir à l'ajustage bien net des fils. En effet, le miroir est installé de façon que, quand les fils sont au point sur la glace dépolie en B, ils le sont également sur le papier. On peut donc charger d'abord l'appareil dans la chambre noire, puis le transporter éventuellement sur le lieu d'observation et l'y mettre en marche à la pleine lumière du jour.

Si l'on ne voulait enregistrer que le cours normal du potentiel, il ne pourrait y avoir aucun doute sur le signe. Il semble cependant désirable d'enregistrer en même temps les faibles variations de signe. On se sert alors d'un électromètre à conducteur auxiliaire. Comme potentiel auxiliaire il suffit de quelques éléments secs du format le plus petit, d'environ 10 volts. Les contacts du temps enregistrent alors automatiquement à chaque heure la valeur du potentiel auxiliaire, de façon à enlever plus tard tout doute sur sa constance.

La figure 14 donne, par exemple, les variations du potentiel à un jour calme, le 27-28 février 1909. L'enregistrement s'est fait au laboratoire de physique du Collège Saint-Ignace de Fauquemont (Hollande). La batterie auxiliaire était composée d'éléments normaux à la Weston et avait 24 volts. L'électromètre étant relié à la terre, on obtient un écart constant de 8 mm. Quand le pôle positif est au conducteur auxiliaire, l'écart augmente dans l'électromètre isolé par suite du signe négatif de la chute du potentiel dans le champ terrestre non troublé. La chute du potentiel positif se ferait alors reconnaître par deux courbes qui se trouveraient à l'intérieur des marques du temps.

La figure montre clairement le cours normal des variations du potentiel dans nos latitudes : deux minima à midi et à minuit, et deux maxima après le lever et le coucher du soleil.

Dans les expéditions scientifiques, par exemple en ballon où on n'enregistre que quelques heures, on peut entièrement se passer de la batterie auxiliaire quand on s'assure de temps en temps du signe de la charge à l'aide d'une baguette d'ébonite qu'on a frottée.

La source lumineuse peut être très faible. Une petite lampe à pétrole d'une bougie environ, suffit ; au besoin, on prend même une simple bougie de stéarine. Les plus petites flammes d'acétylène, les petites lampes Osram de 4 volts sont déjà trop fortes et doivent être affaiblies par une glace dépolie. Pendant qu'il fait jour, on peut simplement diriger dans l'appareil, à l'aide d'un petit miroir, la lumière diffuse du jour pénétrant par une fenêtre.

Pour qu'on puisse ensuite évaluer plus facilement les courbes, il se trouve une échelle millimétrique sur verre clair immédiatement devant le papier photographique. Cette échelle trace dès le commencement de l'enregistrement tout un système de lignes sur le papier, de sorte qu'on peut simplement lire ensuite les écarts en millimètres.

Pour déterminer plus facilement le nombre des différentes heures, il est bon d'éloigner chaque jour la lumière pendant quelques minutes. On obtient alors une ligne claire transversale sur toute la bande et, à partir de cette ligne, on peut facilement s'orienter au sujet du temps. La figure 14 présente deux de ces lignes entre 6 et 7 h. avant midi et entre 7 et 8 h. après midi.

2. La teneur de l'atmosphère en ions

La teneur de l'air en ions de signe + et — se détermine d'ordinaire à l'aide de l'appareil d'Ebert (¹). Quand cet appareil est muni d'un électromètre bifilaire, la lecture devient considérablement

---

(¹) H. Ebert, Physik. Zeitschr., 2, 662, 1901.

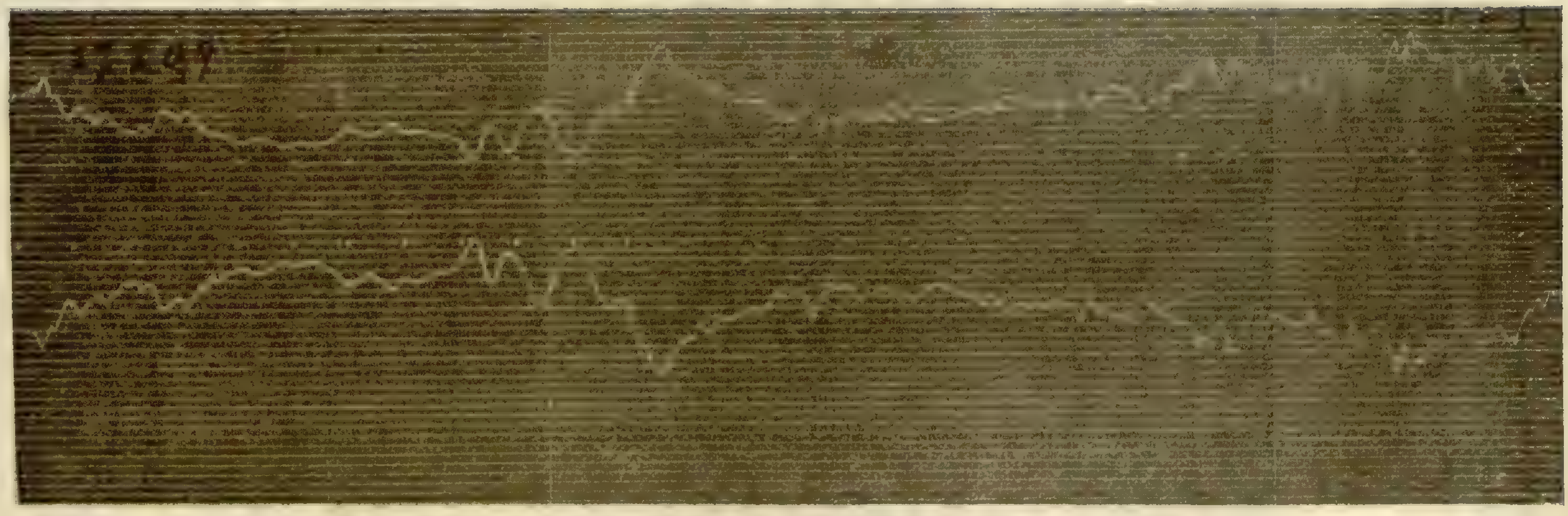


FIG. 14. Chute du potentiel atmosphérique enregistrée à Fauquemont du 26 févr. 1909, 9 h. soir, jusqu'à minuit du 28 févr.

plus exacte, et la durée d'observation, d'à peu près 15 minutes autrefois, peut être réduite à 4 minutes environ. Il est clair que cela doit constituer un énorme avantage surtout quand il s'agit de déterminer des valeurs conjuguées d'ions + et —. L'instrument est disposé maintenant de façon à séparer facilement l'électromètre et à servir à d'autres usages.

3. La dispersion de charges électriques dans l'atmosphère

La dispersion de corps chargés positivement et négativement par les ions de l'air atmosphérique se détermine la plupart du temps jusqu'ici avec les appareils d'Elster et Geitel (1). C'est tout spécialement le travail de Schering (2) qui a montré combien peu les résultats de cet appareil concordent avec ce qu'ils doivent réellement mesurer ; on obtient principalement un courant de saturation indiquant la vitesse avec laquelle l'air pénètre à l'intérieur du cylindre protecteur. Quand on met simplement un fil métallique de 30 à 60 cm. de long et de 0,5 cm. de diamètre sur l'électromètre bifilaire pour servir de corps de dispersion (voir Fig. 10, C), on obtient ainsi du premier coup un appareil complet pour mesurer la dispersion, et le courant est presque entièrement un courant libre ; l'observation n'exige que 2 à 3 minutes ; une minute même a suffi dans les hautes montagnes de Zermatt.

CHAPITRE IV

EMPLOI DE L'ÉLECTROMÈTRE COMME OSCILLOGRAPHE ÉLECTROSTATIQUE

Quand on commença à s'occuper des courants alternatifs, on ne tarda pas à reconnaître que le courant n'est pas complètement défini par son amplitude et par la durée de ses oscillations. Les courants produits s'écartent constamment plus ou moins de la courbe idéale de sinus et ne sont nullement de même valeur pour certains usages techniques. Mais comme ces courants se passent en quelques centièmes de seconde, les instruments de mesure en usage ne sont pas à la hauteur de cette mission. Ils se meuvent beaucoup trop lentement pour être capables de suivre les détails de ces courants. C'est encore beaucoup plus le cas pour les oscillations qui ont lieu dans les bobines d'induction de Ruhmkorff des téléphones, et qui font 1000 oscillations et plus à chaque seconde.

---

(1) Elster et Geitel, Physik. Zeitschr., 1, 11, 1899.

(2) H. Schering, *Der Elster und Geitelsche Zerstreuungsapparat*. Göttinger Inaug.-Dissert. Leipzig, 1904.

On se servait exclusivement jusqu'ici de galvanomètres pour enregistrer ces oscillations, les forces mouvantes étant les actions magnétiques de conducteurs parcourus par le courant.

Comme l'électromètre se met à la position de station avec une rapidité si extraordinaire, on dut bientôt songer à le transformer également en oscillographe. En effet, il a sur tous les oscillographes l'avantage de n'exiger aucun miroir mobile et de présenter par conséquent la plus petite masse en mouvement, avantage que seuls les galvanomètres à corde possèdent comme lui. Cet appareil n'a du reste aucune self-induction et aucune capacité. Or, on sait que ces deux facteurs causent une défiguration de la courbe qui devrait être simplement tracée. Cette défiguration est d'autant plus considérable que les oscillations ont un cours plus rapide. L'enregistrement à l'aide des appareils électrostatiques offre donc d'énormes avantages dès qu'il s'agit de rapides variations de tension. Parfois aussi les courants produits sont tellement faibles qu'ils ne peuvent mettre en mouvement les appareils en question. En tout cas, il est intéressant d'examiner une fois le travail d'un instrument électrostatique.

Les conditions auxquelles un oscillographe trace exactement les oscillations rapides ont été exposées théoriquement pour la première fois par Blondel (¹) et appliquées ensuite à la construction des premiers bons oscillographes. La théorie a tout d'abord de la valeur pour les oscillographes du type galvanomètre, mais les résultats restent les mêmes si on remplace les forces magnétiques

---

(¹) A. Blondel, *Oscillographes*, C. R. de l'Ac. des Sc., 1893, vol. 116, p. 502. — Conditions générales que doivent remplir les instruments indicateurs ou enregistreurs. *Ibid.*, 1893, vol, 116, p. 748. — Rapports présentés au Congrès international de Physique, 1900, T. 3, p. 264.

par des forces électrostatiques. Les conditions d'enregistrement exact trouvées par Blondel, à savoir :

1) Que la période d'oscillation propre soit petite relativement aux oscillations examinées, et

2) Que les instruments soient justement amortis jusqu'au mouvement périodique,

ne contiennent en réalité rien des propriétés particulières des forces de déviation et n'ont au contraire que les propriétés mécaniques du système.

Ce sont donc ces deux conditions qui vont être examinées ci-après. Puis viendra la description de l'appareil en tant qu'elle n'a pas été donnée plus haut, et nous terminerons par la citation de quelques-uns des résultats obtenus jusqu'ici.

1. Durée de l'oscillation

Quand les fils sont très faiblement tendus, l'amortissement par l'air seul est tellement fort que les fils se rendent très lentement à leur place en plusieurs secondes. On ne s'est pas servi de cette période pour l'électromètre bifilaire. En effet, quand les fils sont trop peu tendus, la position de station n'est pas suffisamment déterminée. Mais on s'est efforcé de se rapprocher autant que possible de ces conditions. En réalité, ce point est le plus favorable pour la fabrication d'appareils extrêmement sensibles. La mise en position se fait alors en une fraction de seconde et le mouvement est presque entièrement amorti par l'air. D'un côté, la tension est assez petite pour donner une grande sensibilité, et, de l'autre, suffisamment grande pour donner une position constamment déterminée aux fils même à la position de station.

Pour l'emploi comme oscillographe, la rapidité de la prise de position de station doit être considérablement plus grande. Cela ne peut se faire que par une tension plus forte. Il faut donc augmenter le petit poids ou bien serrer plus fort le ressort élastique. Le mouvement se fait alors tout à fait d'après les lois des cordes telles qu'elles existent pour les pianos, violons, cithares et autres instruments du même genre.

Si l est la longueur d'une telle corde, r son rayon, ρ sa densité et P sa tension mesurée en dynes, le nombre d'oscillations N est par seconde

$$N = \frac{1}{2lr}\sqrt{\frac{P}{\pi\rho}}. \qquad (16)$$

Comme $\pi r^2\rho$ est la masse d'un cm. de fil, on peut l'introduire en la désignant par μ et on a alors

$$N = \frac{1}{2l}\sqrt{\frac{P}{\mu}}. \qquad (17)$$

De cette équation on peut lire que, pour augmenter N, il faut d'abord diminuer la longueur l. Puis la masse μ doit être très petite relativement à la tension P. Il faut donc prendre la matière la plus mince, la moins dense et la plus solide pour que la tension puisse devenir grande.

Il faut ensuite distinguer deux choses à l'exécution : *a)* le choix de fils convenables en tenant compte de l'épaisseur, de la densité, de la solidité et de la longueur des fils ; *b)* l'utilisation des fils choisis. Il ne peut plus y être question que d'une variation de la tension. Une variation de la longueur des fils serait même une opération beaucoup trop difficile pour travailler normalement avec l'appareil achevé.

Parmi les fils fins et suffisamment mobiles viennent en question les fils fins de platine (fil à la Wollaston) et les fils de quartz (ces derniers ayant un poids spécifique 10 fois moindre que le platine (2,2 : 21,5), ils sont déjà de loin préférables pour cette raison. Ils ont d'ailleurs une bien plus grande solidité et peuvent par conséquent à égale épaisseur se tendre beaucoup plus fort avant de rompre.

L'épaisseur des fils diminue la période à cause de leur plus grande masse. On peut bien appliquer une tension double à un fil de section double avant qu'il casse, mais alors la sensibilité diminue considérablement. Ainsi donc pour joindre la sensibilité plus grande à la période propre la plus grande, il faut prendre des fils aussi fins que possible. Il n'y a pas d'autre limite théorique dans ce sens que celle où les fils ne peuvent plus être fabriqués ; l'état actuel de la technique ne permet pas de fabriquer un fil de moins de 0,001 mm. de diamètre.

Il est vrai que la capacité des fils diminue avec leur épaisseur. Avec le même potentiel, il n'y a par conséquent de place sur les fils que pour de plus petites quantités d'électricité. Mais cette variation n'est que fort minime, puisqu'elle ne correspond qu'au logarithme du rayon ; aussi est-elle abondamment compensée par l'augmentation de sensibilité.

Reste encore la longueur absolument arbitraire des fils. On la fera aussi courte que possible pour les plus hautes vitesses. Mais il faut bien considérer qu'une faible longueur des fils entraîne une faible sensibilité. Bien que la sensibilité ne fasse pas ici de difficulté, puisque les courants alternatifs enregistrés ont pour la plupart une tension de quelques centaines de volts ou qu'ils puissent facilement être portés à de telles tensions par l'application de transformateurs du plus petit format, pourtant l'augmentation ultérieure du nombre d'oscillations a finalement une limite telle que la sensibilité en deviendrait trop petite.

On a vu jusqu'ici que les courants de la technique indiquant à peu près 100 commutations de pôles à la seconde pouvaient encore bien s'enregistrer avec des fils d'environ 6 cm. de long. On a également employé avec succès des fils de 3 cm. de long pour les ondes sonores faisant jusqu'à 1000 vibrations par seconde. On a encore obtenu ainsi des sons aigus jusqu'à 2000 périodes. Les nombres de vibrations de la voix humaine allant tout au plus à 1000 environ dans le soprano, on pourra donc l'examiner dans toute son étendue à l'aide du présent électromètre.

En se servant de l'instrument tout prêt, on ne pourra donc plus varier le nombre de vibrations que par la tension. Nous possédons déjà les recherches approfondies d'Einthoven (¹) sur les conditions correspondantes du galvanomètre à corde. Il a trouvé que la sensibilité de son galvanomètre à corde est inversement proportionnelle au carré du nombre de vibrations. Il en doit être de même pour l'électromètre à corde de Cremer-Lutz-Edelmann, construit d'après le même principe. En effet, il est acquis, d'après la formule (16), que les nombres de vibrations sont proportionnels aux racines carrées de la tension dans tous les instruments à cordes tendues. Mais, suivant Einthoven, les sensibilités se comportent à l'inverse des tensions. Les nombres de vibrations sont donc inversement proportionnels aux racines carrées des tensions,

---

(¹) W. Einthoven, Annalen d. Physik v. Drude, 21, pp. 483 et 665, 1906.

ce qui veut dire que, pour doubler le nombre de vibrations d'un instrument, il faut rendre sa sensibilité quatre fois plus petite.

La formule (16) étant également en vigueur pour les instruments bifilaires, les nombres de vibrations sont donc directement proportionnels à la racine carrée de la tension. Mais il est également établi d'après ce qui a été dit plus haut (Tableau I) que la sensibilité est inversement proportionnelle à la racine carrée de la tension. Si donc on veut doubler le nombre de vibrations de cet instrument, il suffit de réduire de moitié la valeur de sa sensibilité.

Ce résultat a pu aussi se vérifier expérimentalement. On a varié la tension d'un couple de fils en y suspendant des petits crochets de fil métallique bien pesés, et on l'a jaugée à chaque fois avec des potentiels connus d'accumulateurs et d'éléments normaux. La sensibilité étant ainsi déterminée, on a employé l'instrument comme oscillographe. Le mouvement n'avait été amorti que par l'air. Les fils furent ensuite mis en vibration par les chocs d'induction d'un petit transformateur. En faisant écrire en même temps sur le papier un diapason dont on connaissait le nombre de vibrations et qui inscrivait aussi ses vibrations propres, on a pu, en mesurant et comptant de 10 à 20 oscillations, déterminer leur durée d'une manière suffisamment exacte. La sensibilité n'étant pas la même dans toute l'étendue de l'échelle, on a constamment travaillé dans la partie à sensibilité presque constante et autant que possible entre les mêmes traits de l'échelle. Le résultat est consigné dans le tableau ci-dessous. La première colonne contient les tensions employées en mgr. ; la deuxième les sensibilités différentes en parties d'échelle A de l'écart par une différence de potentiel de 1 volt ; la troisième, les nombres de vibrations N enregistrés. Si alors les N se comportent à l'inverse des A, les produits AN doivent être constants. Ces produits sont contenus dans la dernière colonne. Vu la difficulté de déterminer exactement les oscillations propres à cours si rapide, on peut considérer la concordance comme suffisamment bonne.

TABLEAU V

Tension mgr.	Sensibilité A	Nombre de vibrations N	NA
9,6	0,098	233	22,8
36,6	0,051	399	20,3
76,4	0,035	588	20,6

Si donc, en somme, les instruments à deux fils sont déjà supérieurs en sensibilité aux instruments à une seule corde à cause du plus grand rapprochement des parties agissantes l'une sur l'autre, cette supériorité se fait tout spécialement remarquer dans les applications aux oscillations rapides.

2. L'amortissement

De la plus grande importance pour les oscillographes est l'application d'un amortissement convenable des oscillations propres. C'est ce que montre pratiquement le tableau comparatif de plusieurs oscillogrammes dans la figure 15. Tous représentent le même courant alternatif d'à peu près 40 périodes entières à la seconde, vers laquelle la durée de l'oscillation de l'électromètre est très petite. La courbe supérieure I a été obtenue avec un électromètre très peu amorti. Sur la courbe proprement dite du courant alternatif se déposent constamment les oscillations propres de façon à recouvrir entièrement la forme du courant alternatif. La courbe II fut enregistrée avec un affaiblissement plus grand, mais encore incomplet. Dans la courbe III, les oscillations propres sont presque entièrement supprimées, et il n'en reste plus aucune trace dans la courbe IV. Mais on voit en même temps que la courbe du courant ressort plus clairement à mesure que les oscillations propres disparaissent.

L'obtention d'un amortissement suffisamment variable offrait de grandes difficultés. Les méthodes employées dans les oscillographes usités jusqu'ici sont toutes basées sur les effets magnétiques de courants fermés et ne pouvaient donc pas être appliquées à cet instrument électrostatique. Pour les faibles tensions de fils très légers et très fins, la résistance de l'air suffit à l'amortissement apériodique complet ; mais la mise en position de station devient oscillatoire dès qu'on prend des tensions de mouvement modérément rapide. On pourrait alors essayer d'augmenter la résistance de l'air en comprimant ce dernier ou en y introduisant des vapeurs

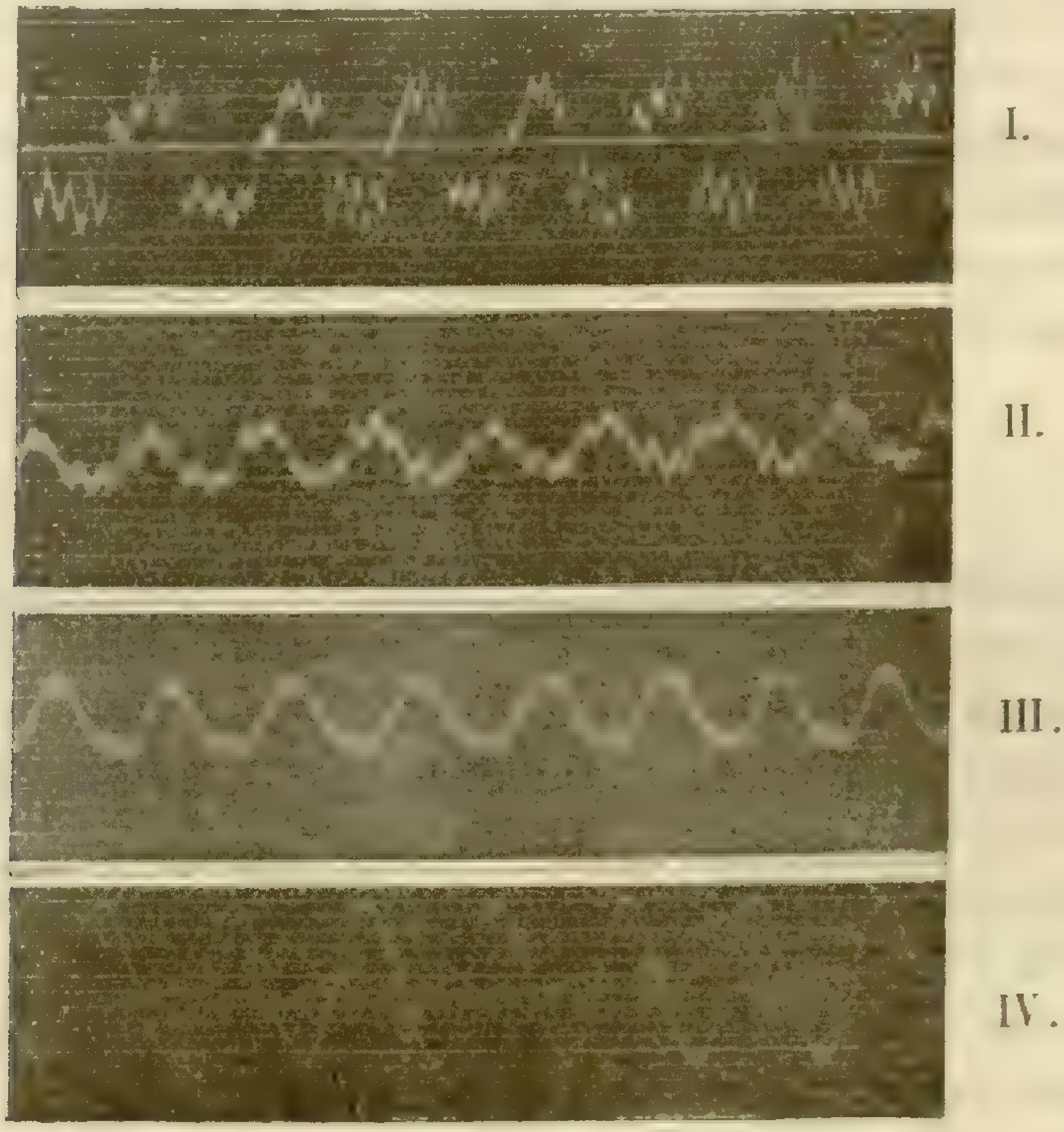


Fig. 15. Courant alternatif. Influence de l'amortissement.

fort lourdes. Ces deux moyens présentent des difficultés considérables surtout quand il faut pouvoir produire toujours exactement l'« amortissement critique » pour différentes tensions. On appelle amortissement critique le degré d'amortissement auquel la mise en position de station périodique passe à l'apériodique. En effet, dans ce cas, le temps nécessaire au repos définitif est un minimum.

L'essai ci-après décrit amena finalement une heureuse solution de la difficulté. Une ficelle de 150 cm. de long fut tendue assez fortement pour rendre un son quand on la pinçait. Le mouvement n'était donc pas complètement amorti par l'air. On fixa ensuite un bout de la ficelle au fond d'un haut cylindre en verre qui fut lentement rempli d'eau. L'effet amortissant de l'eau se fit sur-le-champ fortement sentir dans le fil, et quand l'eau fut à 20 cm., on ne sentit plus aucune oscillation.

Ce principe fut ensuite appliqué à l'électromètre. On versa simplement à l'intérieur de l'électromètre une huile bien isolante (huile de paraffine) jusqu'à ce qu'elle baignât l'extrémité inférieure des fils. Une couche d'huile de quelques mm. fit déjà disparaître complètement les oscillations propres des fils modérément tendus. En remplissant le récipient, de façon que les fils plongent entièrement ou même seulement pour la plus grande part dans l'huile, le mouvement est constamment apériodique. On trouve donc toujours entre les deux une hauteur à laquelle on atteint justement l'amortissement critique.

3. Dispositif de l'oscillographe

Conformément aux conditions énoncées, l'électromètre devait avoir une construction spéciale en quelques points pour servir aux usages de l'enregistrement. Tout d'abord il faut remarquer que la couche extrêmement mince de métal, qui fait les fils conducteurs de l'électricité, se détruit rapidement par les oscillations. Jusqu'ici on ne pouvait faire usage satisfaisant dans l'oscillographe que des fils de platine à la Wollaston.

Il s'agissait alors de pouvoir régler à volonté la tension des fils. On rejette complètement la variation de la tension à l'aide de petits poids. Il serait d'abord trop gênant d'être obligé d'ouvrir à chaque fois toute la cage, et puis il fallait une très grande habileté pour suspendre souvent ces petits crochets sans endommager les fils. On prit donc des *mesures*, comme nous l'avons déjà mentionné ci-dessus, pour tendre les fils à l'extérieur (Fig. 16). De plus, la tête de vis servant à opérer la tension est munie d'une division qui rend constamment visible du dehors la tension du moment. Mais le mouvement de la vis se communiquant aux fils non pas immédiatement, mais bien par l'intercalation du ressort élastique, la tension se fait très lentement et uniformément, tandis que, sans ce ressort, le moindre petit excès de tension casserait nécessairement les fils.

Le mécanisme tenseur des fils usurpait une partie de la place du conducteur auxiliaire. D'autre part, ce dernier est indispensable, autrement on ne pourrait plus distinguer les uns des autres les nœuds positifs et négatifs des courbes. C'est pourquoi on a installé la cage elle-même de façon qu'elle puisse être chargée et jouer ensuite le rôle du conducteur auxiliaire. Il suffisait à cet effet d'isoler de la cage le pied de l'appareil par l'interposition d'un bouchon en ébonite. On a isolé de même les parties qui devaient nécessairement être touchées, à savoir la tête de vis pour tendre les fils, et le microscope pour l'ajustage bien net.

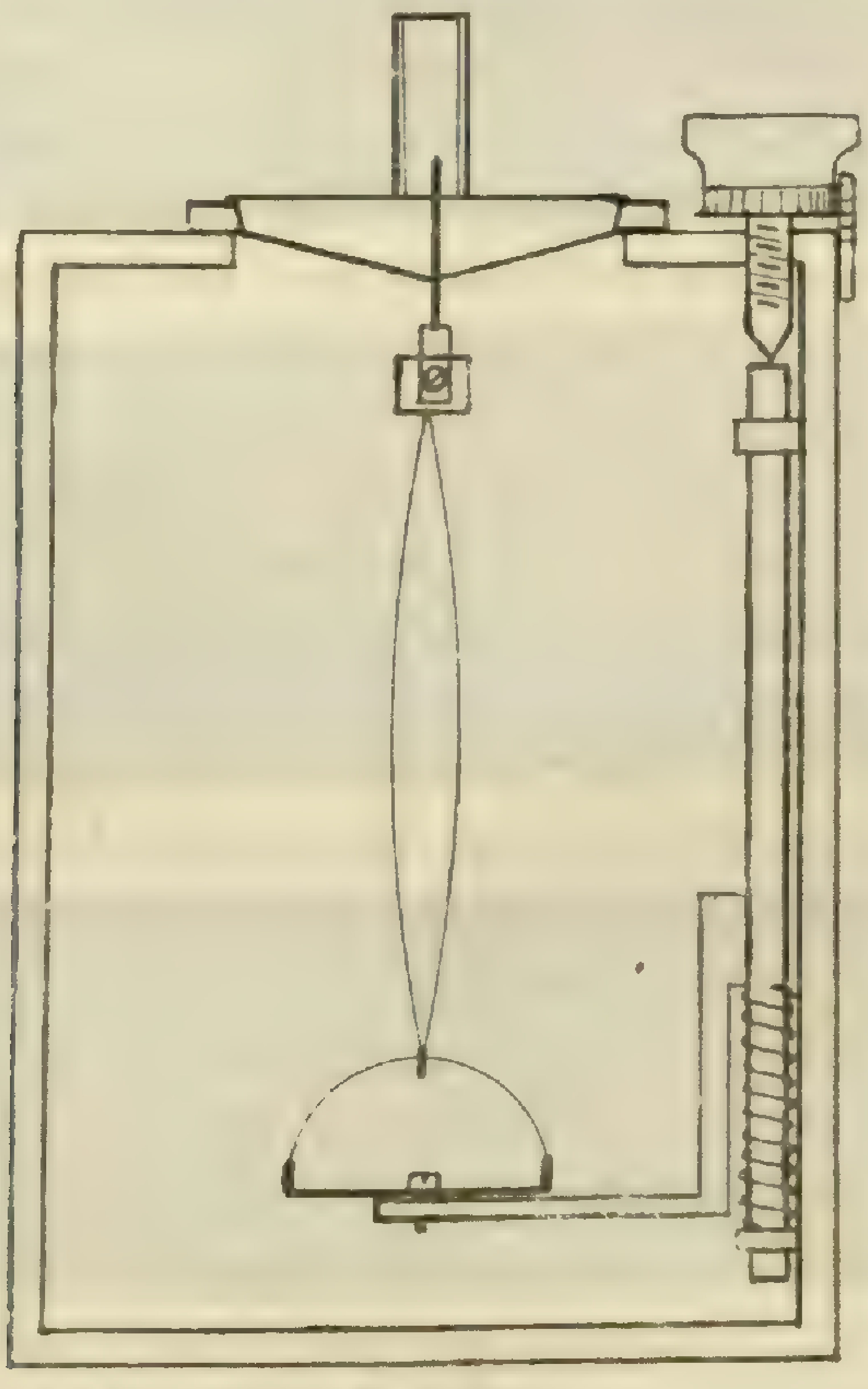


Fig. 16.

Pour l'introduction plus facile de l'huile amortissante, et pour permettre de s'assurer commodément de sa hauteur, on a mastiqué dans le bas de l'une des parois un tuyau en ━┫. La branche horizontale pénètre dans la cage. La branche descendante est fermée par un petit robinet servant à faire écouler l'huile. La branche ascendante est en verre et sert en même temps à introduire l'huile et à indiquer du dehors son niveau.

Pour faciliter la mesure des écarts obtenus, il y a juste devant le papier photographique une échelle millimétrique sur verre divisant toute la fente en millimètres. La lumière est réfléchie sur le côté, là où sont gravés les traits fins. On obtient ainsi sur toute la bande les lignes parallèles contenues dans les photographies reproduites.

Il arrive très souvent qu'on désire déterminer par les enregistrements non seulement la forme des courbes, mais encore le temps exact de chacune des oscillations. Il faut donc un inscripteur du temps tel que ceux de toutes formes qui servent aux enregistrements astronomiques, physiques et physiologiques du même genre. L'enregistrement des oscillations rapides se fait fréquemment par l'élégante méthode de G. Garten. Elle consiste en une roue à rais très fins tournant rapidement devant la fente de l'appareil. Chaque rai interrompt alors la lumière pendant un instant et inscrit une fine ligne en travers du papier. Comme on a déjà les traits millimétriques dans le sens de la longueur, les photogrammes finissent par porter tout un système de coordonnées. La roue est mise en rotation bien uniforme à l'aide d'un mouvement d'horlogerie ou d'un électromoteur.

C'est un autre moyen qui a été appliqué aux présents essais. Il ne donne pas des photogrammes aussi élégants, mais on peut se le procurer, la plupart du temps, sans dépense et il surpasse encore peut-être en exactitude et en sûreté la méthode ci-dessus. Il consiste en un diapason électromagnétique dont l'une des branches porte un petit fil métallique dirigé en haut. Ce fil est dans le cône lumineux juste devant la fente de l'appareil. Quand le diapason parle, il passe et repasse devant la fente et fait toujours uniformément un nombre déterminé de vibrations à chaque seconde. Dans la plupart des expériences on s'est servi d'un diapason à 100 vibrations à la seconde, de sorte qu'une vibration signifie toujours 0,01 seconde. Mais alors la vitesse et l'uniformité avec lesquelles le papier se meut sont choses absolument indifférentes. Comme le diapason vibre lui-même toujours uniformément, on peut mesurer ensuite au *compas* et avec la mesure millimétrique les temps des courbes enregistrées. La mesure se fait encore plus simplement avec une échelle sur une petite règle en verre. En posant cette règle sur le papier on peut lire immédiatement les distances en millimètres.

La figure 17 contient quelques épreuves des diagrammes qui ont servi à déterminer les nombres de vibrations. Comme l'ajustage doit être très net pour obtenir encore des courbes nettes par ces mouvements très rapides, on s'est contenté, la plupart du temps, de photographier l'un des deux fils. La forte ligne ondulée inférieure est à chaque fois la courbe du diapason. Le diapason

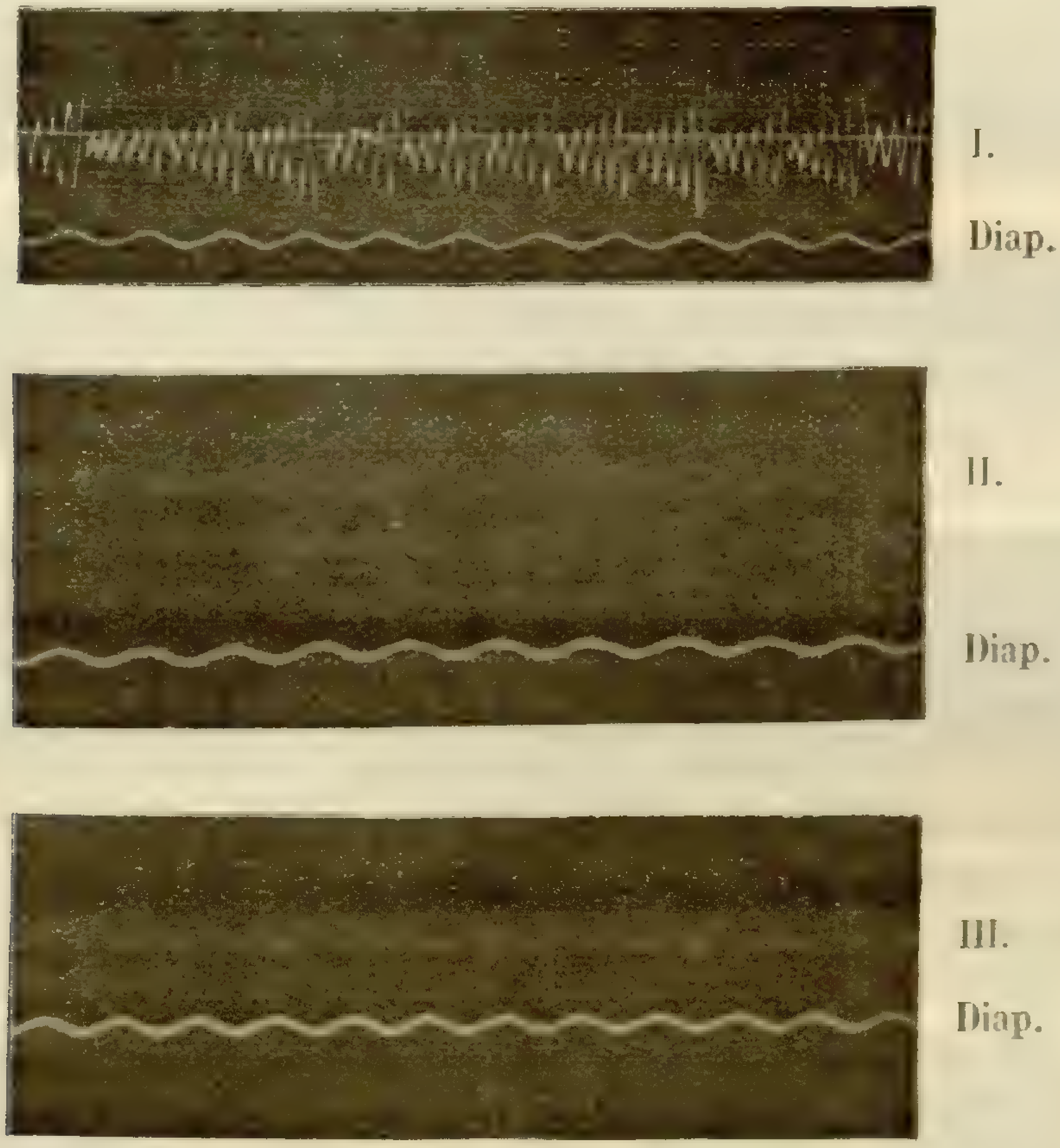


Fig. 17. Oscillations propres des fils.
Courbe I. N : 500 vibr. par seconde.
Courbe II. N : 1000 » »
Courbe III. N : 2000 » »
Le Diapason fait 100 vibr. par seconde.

Les courbes II et III bien visibles sur les originaux étaient trop faibles pour la reproduction.

ayant besoin de 0,01 seconde pour une vibration entière, cette ligne montre que, pour ces enregistrements, le papier était animé d'un mouvement de 60 à 70 $\frac{\text{cm.}}{\text{sec.}}$ Les courbes supérieures indiquent les vibrations propres des fils, pour diverses tensions des fils. Les chocs d'induction étaient donnés par le diapason lui-même comme interrupteur. Les différentes amplitudes du premier écart montrent le peu de confiance qu'on peut avoir dans le contact de platine employé.

4. Quelques recherches avec l'oscillographe électrostatique

Il nous reste encore à indiquer quelques résultats obtenus avec l'oscillographe. Le temps et les moyens pécuniaires n'ont pas permis jusqu'ici d'étendre davantage ces essais, bien qu'il y ait encore plus d'un problème à résoudre.

1. *Courbes de courants alternatifs.* — Ne disposant pas d'un courant alternatif d'usine électrique, j'ai fait les enregistrements à l'aide d'une petite dynamo Fein à courant continu et à courant alternatif. Les courants de la machine avaient une tension verticale d'à peu près 30 volts et étaient portés à 300 volts environ par un petit transformateur. Comme la figure 15 contient déjà quelques épreuves, nous n'en donnerons pas davantage ici. Nous ferons simplement remarquer que toutes les courbes contiennent les clichés originaux qui n'ont été ni rephotographiés ni retouchés et qui sont tels qu'ils ont été retirés de l'appareil.

2. *Courbes des ondes sonores.* — Les ondes sonores jusqu'à 2000 vibrations et plus par seconde sont un objet très convenable pour ces recherches. Voici la disposition du couplage. On produit comme d'ordinaire des chocs de courant dans un bon microphone. Ces courants ayant une très faible tension, on élève cette tension dans un transformateur. L'un des pôles de la bobine d'induction est à terre, l'autre est aux fils de l'électromètre.

Si on parle ou si on chante alors dans le microphone, ou bien si on joue d'un instrument de musique, les fils se mettent à vibrer.

Le tracé de ces vibrations est important sous divers rapports. Tout d'abord sous le rapport technique, pour examiner dans les microphones la force des vibrations, la forme, la matière, etc.

les plus avantageuses de la membrane, la quantité et le genre des sons supérieurs. Mais l'enregistrement des consonnes est encore plus important dans la pratique, car elles concourent beaucoup plus que les voyelles à l'information. En effet, il s'est trouvé que l'électromètre répond aussi aux consonnes. Mais ces recherches n'ont pas encore pu être terminées. Le tracé des ondes sonores a encore un but scientifique, l'examen des tons musicaux.

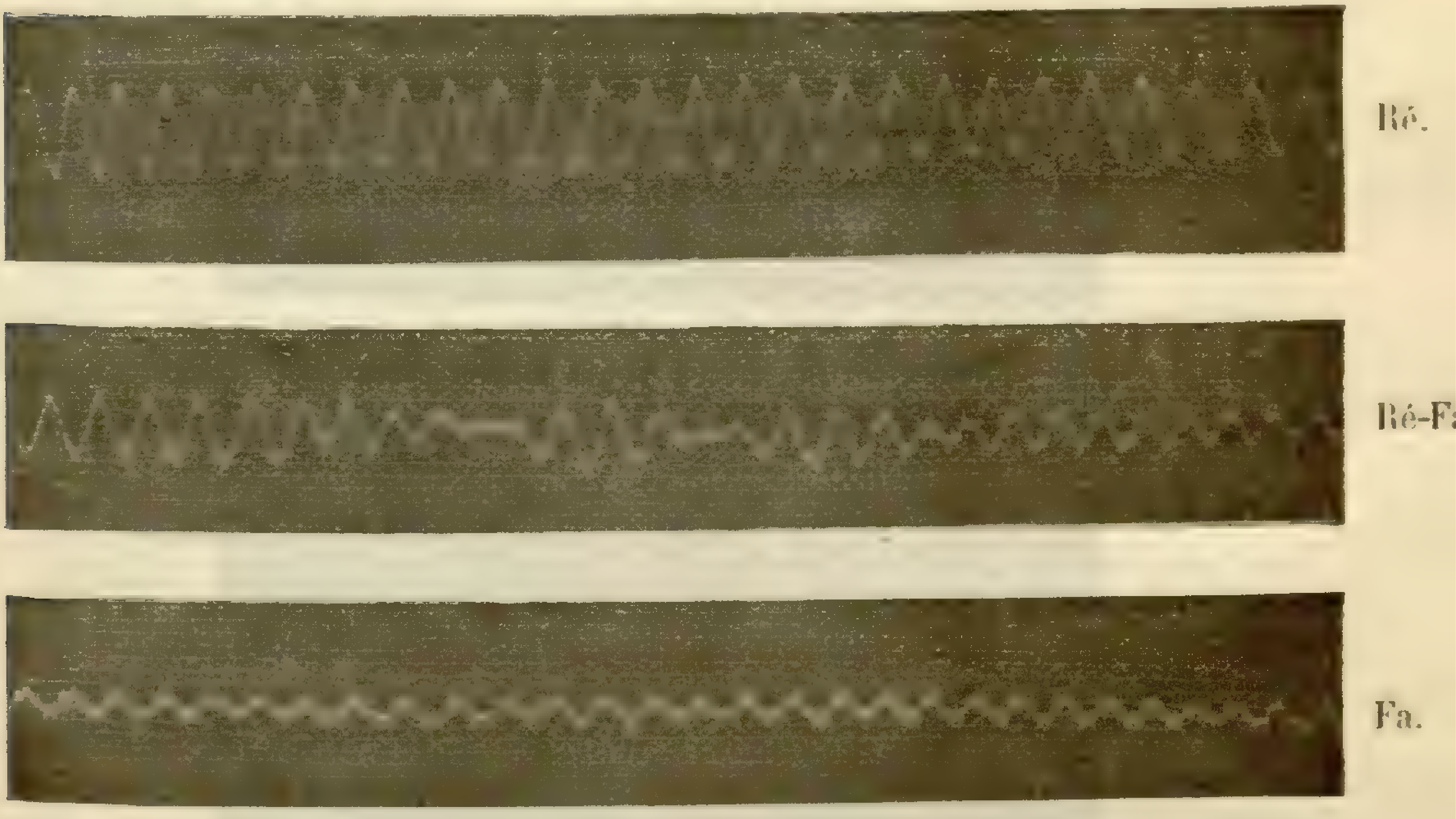


Fig. 18. Violon : Ré-Fa.

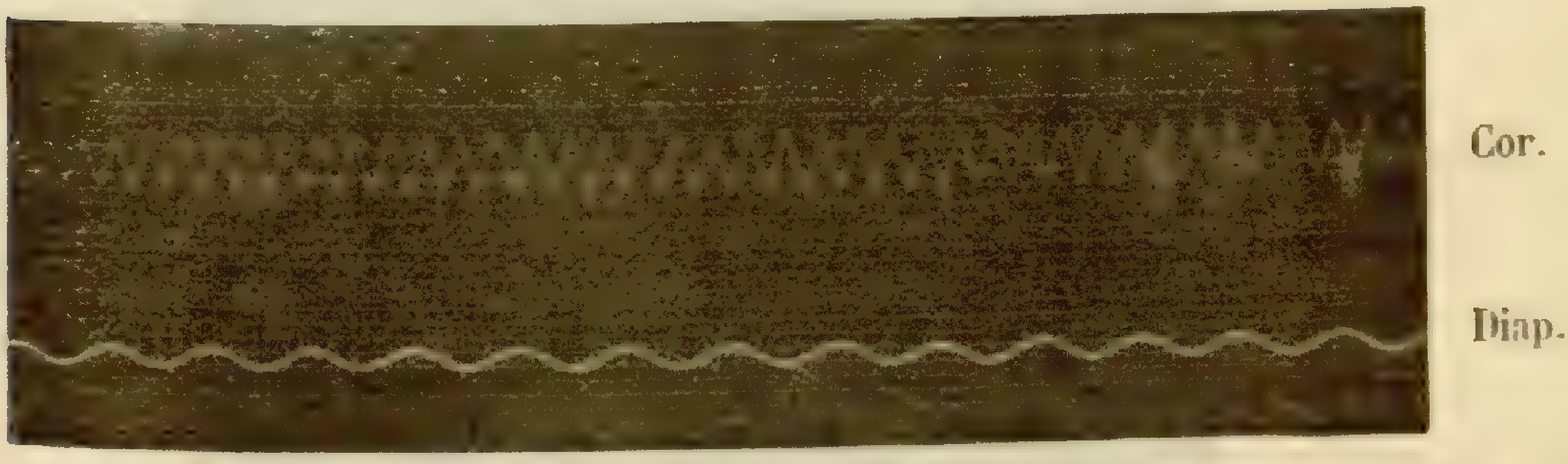


Fig. 19. Cor : Ré. Le diapason fait 100 vibr. par seconde.

Comme le connaisseur reconnaît chaque instrument à son timbre, il s'ensuit que les ondes sonores produites se distinguent non seulement par l'acuité et la gravité, mais encore par autre chose qui donne à l'instrument son timbre particulier.

La figure 18 contient des ondes sonores d'un violon. Les trois

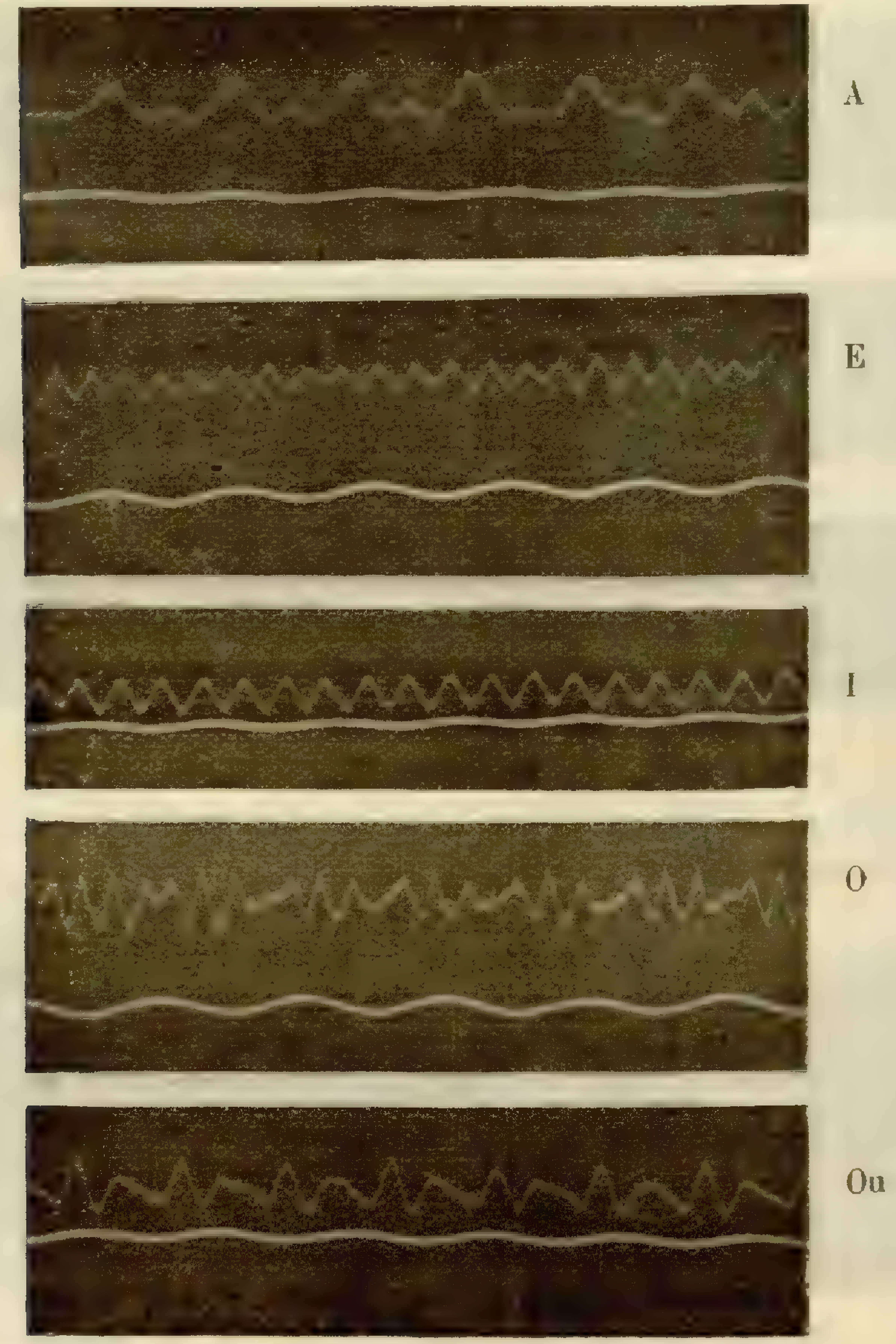


Fig. 20. Voyelles chantées. Diap. 100 vibr. par seconde.

bandes formaient une ligne continue. Au milieu de la médiane, le doigt se mettait sur la corde et le son passait de *ré* en *fa*. On voit, très prononcé en *fa*, le troisième son supérieur avec quatre fois plus de vibrations.

La figure 19 enregistre le son d'un cor. Il semble qu'il n'y ait pas eu de sons supérieurs à la hauteur qu'enregistre l'électromètre ou du moins qu'ils n'aient pas été assez forts. La courbe inférieure est du diapason à 100 vibrations par seconde.

Passons maintenant à la voix humaine, le plus merveilleux des instruments de musique. La différence la plus frappante entre la voix humaine et tous les instruments de musique réside dans les différentes voyelles. A l'analyse oscillographique des voyelles, on a trouvé des formes merveilleusement caractéristiques. La figure 20 contient une série de voyelles, telles qu'on les a obtenues avec l'électromètre de la manière ci-dessus décrite. Les tracés en sont encore aux premiers essais.

Quelle merveilleuse variété dans les sons de la voix humaine : A, E, I, O, U avec leurs innombrables degrés intermédiaires, et les finesses de différenciation des consonnes dans les diverses nations ! Nous pouvons distinguer à leur voix tous les hommes que nous connaissons. Chacun d'eux dispose, en outre, d'une infinité de registres. Enseignement, persuasion, prière, flatterie, blâme, commandement, menace, colère, pleurs, désespoir, espoir, triomphe, tout cela s'exprime dans la voix et passe de la bouche à notre oreille dans les ondes sonores de l'atmosphère. Nous entendons tout cela par les ondes sonores, même quand nous ne voyons pas celui qui parle et même quand nous ne comprenons pas sa langue. Mais si tout cela est contenu dans les ondes sonores, il faut aussi que les ondes sonores elles-mêmes soient douées de cette variété infinie. Celui qui saurait pénétrer jusqu'au fond tout cet enchaînement, devrait également entendre à la lecture des tracés d'ondes toutes ces fines différences de la voix, toute cette série de sentiments et d'états d'âme de l'homme, comme il les comprend en entendant le son.

Mais ce sont là des problèmes réservés aux siècles futurs.

La maison Günther et Tegetmeyer de Brunswick (Allemagne) fournit parfaitement conditionnés et jaugés avec le plus grand soin tous les appareils et dispositifs décrits dans le présent travail.

TABLE DES MATIÈRES

PREMIÈRE PARTIE

L'Instrument

CHAPITRE I

INTRODUCTION

1. Électromètre à feuilles 2
2. Électromètre à corde 3

CHAPITRE II

ÉLECTROMÈTRE BIFILAIRE

1. Principe de l'instrument. 5
2. Première forme d'exécution : fils tendus par des poids. 5
3. Seconde forme d'exécution : fils élastiquement tendus 10

CHAPITRE III

THÉORIE DE L'ÉLECTROMÈTRE BIFILAIRE

1. Équilibre des forces agissantes 15
2. Travail des forces agissantes 21

CHAPITRE IV

ÉLECTROMÈTRE A CONDUCTEUR AUXILIAIRE

1. Défauts de l'instrument simple 25
2. Pensée fondamentale pour obvier à ces défauts 25
3. Théorie de l'instrument 26
4. Principales propriétés de l'instrument. 29

CHAPITRE V

CAPACITÉ DE L'ÉLECTROMÈTRE

1. Capacité de l'instrument tout entier. 32
2. Capacité des pièces mobiles 33
3. Variation de la capacité suivant l'écart 35
4. Détermination de la capacité de l'instrument avec des corps de dispersion 39

DEUXIÈME PARTIE

Quelques applications de l'électromètre bifilaire

CHAPITRE I

GÉNÉRALITÉS SUR LA MANIÈRE DE TRAVAILLER AVEC L'INSTRUMENT

1. L'observation subjective 43
2. La projection 45
3. L'enregistrement 45

CHAPITRE II

LES PROBLÈMES DE LA RADIOACTIVITÉ

1. Généralités sur la détermination de la radioactivité 46
2. Radioactivité des corps solides 48
3. Radioactivité des corps liquides 49
4. Radioactivité des corps gazeux (Émanation) 49
5. Radioactivité d'induction 51
6. Rayonnement pénétrant de l'atmosphère 52
   a) L'appareil 53
   b) Quelques résultats d'observations 57

CHAPITRE III

LES PROBLÈMES DE L'ÉLECTRICITÉ ATMOSPHÉRIQUE

1. Chute du potentiel. Appareil pour l'enregistrement continu de cette chute 65
2. Teneur de l'atmosphère en ions 68
3. Dispersion des charges électriques dans l'atmosphère 69

CHAPITRE IV

L'ÉLECTROMÈTRE BIFILAIRE COMME OSCILLOGRAPHE

1. Durée des oscillations de l'électromètre 71
2. Amortissement des oscillations propres 75
3. Dispositif de l'oscillographe 77
4. Quelques recherches avec l'oscillographe électrostatique 82
   1. Courbes de courants alternatifs 82
   2. Courbes des ondes sonores des instruments de musique et de la voix humaine 82

UN ÉMULE DE VIÈTE : LUDOLPHE VAN CEULEN

Analyse de son " Traité du Cercle "

PAR

H. BOSMANS, S. J.

Le *Traité du cercle* (¹) par Ludolphe van Ceulen !

Peu d'ouvrages de mathématiques du XVIᵉ siècle ont laissé une réputation aussi incontestée. En réalité, chose surprenante, il n'en est guère qui soit moins connu. D'où vient cette ignorance ?

(¹) *Vanden Circkel. Daer in gheleert werdt te vinden de naeste Proportie des Cirkels-diameter tegen synen Omloop / daer door alle Cirkels (met alle Figueren / ofte Landen met cromme Linien besloten) recht ghemeten kunnen werden. Item aller Figueren-syden in den Circkel beschreven / Beginnende van den 3 / 4 / 5 / 15 / hoeck / in Irrationale ghetallen te brengen / al hadde de Figuer veel hondert-duysent hoecken. Item des 7 / 11 / 13 / 17 / 19 / 23 / Hoecxsyden / ende wat syden ofte Coorden men begeerdt / welcker Bogen groot zijn Graden / Minuten / Secunden / &c. Naer elcx behaghen. Noch de Tafelen Sinvvm, Tangentivm, ende Secantivm, met het gebruyck van dien, hoogh-noodigh voor de Land-meters : Met veel andere konstighe stucken, dierghelijcke noyt in druck uytghegheven. Ten laetsten van Interest / met alderhande Tafelen daer toe dienende / met het ghebruyck / door veel constighe Exempelen gheleerdt / ende door 't gheheele werck bewesen / ende gheproeft. Alles door Lvdolph van Cevlen, gheboren in Hildesheim, beschreven, ende inden druck ghebracht.* (Portrait représentant van Ceulen à l'âge de 56 ans). *Tot Delf, Ghedruckt by Jan Andriesz. Boeckvercooper / woonende aen 't Marct-veldt in 't Gulden ABC. Anno 1596.* In-folio.

L'ouvrage existe au British Museum et à la Bibliothèque de l'Université de Leyde, mais ne se trouve pas dans les dépôts publics belges ; l'exemplaire dont je me sers appartient à M. Le Paige. Je cite en abrégé cette édition par le simple mot : *Circkel*.

Le *Circkel* a eu une réédition :

Vanden Circkel, Daer in gheleert werdt te vinden de naeste Proportie des Circkels-Diameter teghen synen omloop / daer door alle Circkels (met alle

De la difficulté que les historiens et les géomètres eurent, de tout temps, à recourir au texte original.

Van Ceulen ne savait pas le latin (1) et écrivit en flamand. Le *Traité du cercle* fut du coup soustrait à la lecture de la plupart des savants de l'Europe, si l'on excepte ceux des Pays-Bas. Ensuite la première édition de van Ceulen devint vite fort rare.

Willebrord Snellius, héritier des papiers scientifiques de l'auteur, comprit quelle gloire pourrait rejaillir sur sa patrie, s'il essayait de faire connaître à l'étranger l'œuvre d'un tel maître.

Il entreprit donc de le traduire en latin. Mais, au titre près (2), cette traduction a peu de pages communes avec le texte primitif.

Figueren / ofte Landen met cromme Linien besloten) recht ghemeten connen werden. Item / aller Figueren-syden in den Circkel beschreven / beginnende van den 3, 4, 5, 15 hoeck / in Irrationale ghetallen te brenghen / al hadde de Figuer veel hondert-duysent hoecken. Item / des 7, 11, 13, 17, 19, 23 hoecx-syden / ende wat syde ofte Coorden men begheert / welcker Boghe groot zijn / Graden / Minuten / Secunden / etc. Naer elcks behaghen. Noch de tafelen Sinvvm, Tangentivm, ende Secantivm, met het ghebruyck van dien, hooghnoodigh voor de Land-meters : Met veel andere konstighe stucken, dierghelijcke noyt in druck uyt-ghegeven. Ten laetsten / van Interest / met alderhande Tafelen daer toe dienende / met het ghebruyck / door veel constige Exempelen geleert / ende door 'tgheheele werck bewesen / ende gheproeft. Tweede Editie. Van nieus oversien / ende van alle de voorgaende fauten verbetert / ende eyndelick vermeerdert met dry Tractaetgens / waer in door den Autheur wederlegt werden / beyde inventien vande quadrature des Circkels / uyt-gegeven door Symon van der Eycke. Met noch de beantwoordingen eeniger angheslaghene Geometrische questien. Alles door Lvdolf van Cevlen, geboren in Hildesheym, beschreven, ende in druck ghebracht. (Figure géométrique.) *Ghedruckt tot Leyden / By Joris Abrahamsz. van der Marsse.Voor Ioost van Colster Boeck-vercooper / Anno 1615.* — Petit in-fol. (Université de Louvain, Scienc., 477). D'autres exemplaires ont comme adresse d'imprimeur : *Ghedrukt tot Leyden By Ioris Abrahamsz. vander Marsse. Voor Jacob Marcus Boeck-vercooper. Anno 1615* (Bibliothèque Royale de Belgique, II, 95 830). Je cite en abrégé cette édition : *Circkel 1615.*

(1) *Circkel*, Voorrede.

(2) *Lvdolphi à Cevlen De Circvlo & Adscriptis Liber. In quo plurimorum polygonorum latera per irrationalium numerorum griphos, quorum libet autem per numeros absolutos secundum Algebricarum aequationum leges explicantur. Quae insuper accesserunt pagina versa indicabit Omnia é vernaculo Latina fecit, & annotationibus illustravit Willebrordus Snellius R. F.* (Portrait de van Ceulen donné dans le *Circkel* de Delft 1596, mais le problème

Ceci m'amène à dire comment, après tant d'autres, j'ai été conduit à reprendre à mon tour l'examen du *Traité du cercle.*

Le problème des sections angulaires consiste à calculer la corde de la n^{ieme} partie de l'arc d'une corde donnée. Après une brillante analyse des travaux de Viète sur ce problème, le regretté von Braunmühl étudie avec assez de détails, dans ses *Vorlesungen ueber Geschichte der Trigonometrie* (1), les écrits laissés par Burgi (2) sur le même sujet. Quant à van Ceulen, il le passe sous silence (3).

Or, au gré des contemporains (j'entends, bien entendu, les contemporains capables de porter un jugement qui compte) quel était l'émule de Viète ? Burgi peut-être, mais en tous cas bien au-dessus de lui Ludolphe van Ceulen. Les géomètres du XVIe siècle ne me laissaient aucun doute à cet égard.

Écoutons, par exemple, l'avis d'un maître autorisé, Adrien Romain (4) :

« Dans le problème des sections angulaires, dit-il, Viète et

---

d'arithmétique qui était au bas du cuivre a été enlevé ; on voit cependant encore le haut des lettres de la première ligne). *Lvgd. Batav. Apud Iodocum à Colster.* Anno 1619. — Petit in-fol. Je possède un exemplaire de cette édition et j'en connais un autre à la Bibliothèque communale à Anvers (N° 4867). L'impression en est des plus négligée. Je la citerai en abrégé : *De Circulo.*

(1) Leipzig, Teubner, t. I. 1900. L'analyse des travaux de Viète sur les sections angulaires se trouve pp. 163-171.

(2) T. I, pp. 205-207. — Les travaux de Burgi sont restés manuscrits et se trouvent, à l'Observatoire de Pulkowa, parmi les papiers de Képler. De quand datent-ils ? Impossible de le dire avec certitude, mais ils sont, en partie du moins, postérieurs à 1596, puisque l'*Opus palatinum* de Rheticus y est cité. C'est, on le sait, Rudolf Wolf qui les a fait connaître dans ses *Astronomische Mittheilungen*, N. XXXI, pp. 6-8 (tiré à part d'un article paru dans le VIERTELJAHRSCHRIFT DER NATURFORSCHENDEN GESELLSCHAFT, Zürich, Zürcher und Furrer, 1872-1876).

(3) Voir : *Vorlesungen*, t. I, pp. 173-175, 226 et 246 ; t. II, p. 56. Van Ceulen y est étudié à peu près au seul point de vue de ses travaux sur le calcul de π.

(4) *Problema Apolloniacvm Qvo Datis Tribvs Circvlis, Qvaeritvr Qvartvs Eos Contingens, Antea Ab Illvstri Viro D. Francisco Vieta Consiliario Regis Galliarum, ac Libellorum supplicum in Regia Magistro, omnibus Mathematicis sed potissimum Belgii ad construendum propositum, jam vero per belgam Adrianvm Romanvm constructum. Wircebvrgi Typis Georgii Fleischmanni. Anno M.D.XCVI* (Bibliothèque ducale de Wolfenbüttel). Résumé de la préface ; j'y reviendrai tantôt avec plus de détails.

van Ceulen méritent tous deux des éloges, mais à des points de vue différents. Viète a trouvé les solutions multiples du problème ; van Ceulen n'en a découvert qu'une, la principale, mais il l'obtient avec bien plus d'exactitude que Viète. »

Pour moi j'avais ma conviction faite. Van Ceulen était tombé dans un oubli injustifié. Je lisais, en effet, dans la deuxième édition flamande du *Traité du cercle* de Leyde 1615, des propositions sur les sections angulaires, dont tout l'honneur avait jusqu'ici rejailli sur Viète.

Mais ces propositions se trouvaient-elles aussi dans l'édition originale de Delft 1596 ?

Je n'en doutais pas, tout en étant dans l'impossibilité de le vérifier par moi-même, l'édition de Delft n'existant pas dans les dépôts publics belges.

Avec son obligeance habituelle, M. Le Paige, administrateur-inspecteur de l'Université de Liége, averti de mon embarras, m'informa qu'il avait la première édition du *Traité du cercle.* Une fois de plus j'eus recours à sa riche bibliothèque. Qu'il veuille bien agréer ici mes plus vifs remerciements. Je dois les mêmes remerciements à M. Wils qui m'a prêté les ouvrages de van Ceulen possédés par l'Université de Louvain.

I

Ludolphe van Ceulen naquit à Hildesheim, en Hanovre, le 28 janvier 1540, et mourut à Leyde le 31 décembre 1610. Ses cendres y reposent à l'église Saint-Pierre.

Les *Délices de Leyde* (¹) nous ont conservé l'épitaphe de van Ceulen assez étrange par le souvenir que le défunt avait désiré y voir rappeler. C'était le résumé du travail de sa vie entière. Sur le marbre du tombeau on lisait, en effet, le rapport de la circonférence au diamètre, par excès et par défaut, avec trente-cinq décimales exactes.

Cette pierre funèbre existe-t-elle encore ?

Il semble que non, mais je ne puis l'affirmer avec certitude.

(¹) *Les délices de Leide, une des villes célèbres de l'Europe...* A Leide, chez Pierre Van der Aa, MDCCXII. Avec Privilège ; p. 67.

En tous cas elle n'avait pas encore été détruite au commencement du XIX^e siècle. Une lettre datée de Paris, le 17 novembre 1840, et publiée dans le BULLETTINO du prince Boncompagni (¹) en fait foi. Lakanal, conventionnel fameux et l'un des fondateurs de l'Institut de France, y écrit à Eugène Catalan qu'il se souvenait avoir vu ce curieux monument.

De petite origine, van Ceulen ne put faire ses classes et reçut seulement une instruction primaire. Il ne savait donc ni latin, ni grec, et souffrait de cette lacune dans ses connaissances. Déjà célèbre par ses deux réfutations des fausses quadratures du cercle de Simon van der Eycke (²), il ignorait encore Archimède, ou pour mieux dire, ne parvenait pas à le comprendre. Son ami Jean Cornets de Groot (³), bourgmestre de Delft (l'histoire le nomme Grotius) vint alors à son secours et lui traduisit l'opuscule

---

(¹) BULLETTINO DI BIBLIOGRAFIA E DI STORIA DELLE SCIENZE MATEMATICHE E FISICHE. T. VII, Roma, 1874 ; p. 141. — Le prince donne en annexe à cette lettre (p. 144) le résultat des recherches infructueuses qui furent faites, en 1868, pour retrouver le tombeau de van Ceulen.

(²) *Kort Claar bewijs Dat die nieuwe ghevonden proportie eens Circkels iegens zijn diameter te groot is ende overzulcx de Quadratura Circuli des zeluen vinders onrecht zij. Door Ludolph van Ceulen gheboren in Hildesheym woonachtich tot Delfft.* (Figure géométrique.) *Gheprent tot Aemstelredam / by mijn Harmen Janszoon Muller / Figuersnijder / woonende inde Warmoestraet inden verguldden Passer.* L'ouvrage n'est pas daté, mais a été écrit en 1585.

J'ai eu en mains l'exemplaire de l'Université de Leyde, d'après *De Amsterdamsche boekdrukkers en uitgevers in de zestiende eeuw* door C. E. W. Moes. Amsterdam, C. L. van Langenhuysen, 1900. T. I, p. 301. L'Université d'Amsterdam en possède un autre.

Proefsteen Ende Claerder wederlegginghe van het claerder bewijs (so dat ghenaempt is) op de gheroemde ervindingh vande Quadrature des Circkels een onrecht te kennen gheuen / ende gheen waerachtich bewijs is. Hier by gheroeght Een corte verclaringh aengaende het onverstant ende misbruyck inde reductie op simpel interest. Den ghemeenen volcke tot nut. Tsamen door Ludolf van Colen woonachtigh tot Delft. Gheprent tot Aemstelredam / by my Harmen Janszoon Muller / Figuersnijder / Woonende inde Waermoestraet inden verguldden Passer. 1586. D'après Moes, p. 301, les bibliothèques des universités d'Amsterdam et de Leyde en possèdent un exemplaire. J'ai eu en mains celui de Leyde.

Ces deux opuscules ont été réédités à la suite l'un de l'autre dans *Circkel 1615* ; ff° 103 r°—108 v°.

(³) *Circkel*, Voorrede.

d'Archimède en allemand. Ce fut, chez van Ceulen, un transport d'enthousiasme.

Van Ceulen connaissait à fond Euclide. Il l'avait étudié, nous dit-il lui-même, dans la traduction de Xylander (1). Mais les sciences exactes s'écrivaient alors à peu près exclusivement en latin ; fort rares étaient les auteurs qui pouvaient, comme Euclide, se lire dans une traduction allemande. Pour combler tant bien que mal les lacunes de son érudition, van Ceulen avait étudié tous les livres de mathématiques publiés, soit en haut, soit en bas allemand. On trouve dans son *Traité du cercle* le nom de plusieurs géomètres dont on n'a pas gardé d'autre souvenir. Seule cette mention les a sauvés, eux et leurs ouvrages, d'un complet oubli.

La formation intellectuelle si insolite de l'auteur imprime à son *Traité du cercle* un caractère particulier, parfois même étrange. C'est l'œuvre d'un homme de génie, mais on y remarque l'autodidacte. A côté d'admirables découvertes, se rencontrent des théorèmes classiques étayés sur les preuves les plus entortillées, tandis que leurs démonstrations anciennes fort simples se lisaient partout. J'en donnerai tantôt un exemple. Il s'agit d'un théorème de l'*Almageste* de Ptolémée, dont van Ceulen ignorait évidemment la démonstration habituelle.

Par profession, van Ceulen enseignait à l'occasion les mathématiques ; mais il était principalement maître d'escrime et de boxe. En cette dernière qualité, il vint s'établir en Hollande, où il exerça son métier successivement à Bréda, Amsterdam, Delft, Arnhem et Leyde (2). Or ce maître d'escrime était en même temps l'un des plus prodigieux calculateurs que le monde ait vus !

---

(1) *Circkel*, f^o 2 r^o. Il s'agit de l'ouvrage intitulé : *Die Sechs Erste Bucher Euclidis.... aus Griechischen sprach in der Teutsch gebracht... durch Wilhelm Holtzman (genant Xylander) von Augspurch. Gedruckt zu Basel 1562.* — A la dernière page : *Vollendet durc Jacob Kundig / zu Basel / in Joannis Sporini kosten / im jar 1562. auff den dreyssigsten tag des Winmonats* (Bibliothèque Royale de Belgique, V. 4992^B).

(2) *Bouwstoffen voor de geschiedenis der wis- en natuurkundige wetenschappen in de Nederlanden.* door D. Bierens de Haan. VIII. *Ludolph van Ceulen.* VERSLAGEN EN MEDEDEELINGEN DER KONINKLIJKE AKADEMIE VAN WETENSCHAPPEN. Afdeeling natuurkunde, 2^e sér., t. 9. Amsterdam, C. G. van der Post, 1876, p. 324.

La salle d'armes de van Ceulen était fort fréquentée par les fils des riches marchands hollandais et par ces marchands eux-mêmes. Entre deux assauts le maître aimait à causer. Pendant ces courts intervalles de repos, il faisait, en se jouant, pour les parents de ses élèves, les calculs de leurs opérations de banque et de bourse. Tout ceci, van Ceulen nous l'apprend en bonne partie lui-même, car maintes fois, à propos de ses problèmes d'intérêt, il rappelle les circonstances où ils lui ont été proposés. Sa réputation de calculateur lui valut bientôt une grande notoriété. Aussi quand la nécessité d'avoir de bons ingénieurs décida Maurice de Nassau à fonder en 1600 l'École du génie de l'Université de Leyde, n'hésita-t-il pas un instant à confier une chaire de mathématiques à van Ceulen. Bien plus il l'autorisait contre tous les usages à ne point enseigner en latin, mais en flamand (1).

Mon but n'est pas de retracer ici la biographie complète de Ludolphe van Ceulen. Ce travail a été fait avec beaucoup d'érudition par Bierens de Haan dans ses *Bouwstoffen* (2). Je n'y reviens pas. Si j'ai rappelé quelques traits caractéristiques de la vie du géomètre d'Hildesheim, c'est pour expliquer l'allure parfois bizarre de son *Traité du cercle*.

Avant d'en commencer l'analyse, objet de cette étude, il est indispensable de faire connaître d'abord la liste des ouvrages de van Ceulen. Je passe outre sur leur description purement bibliographique. Au point de vue de l'amateur de beaux livres anciens, toutes les éditions, sauf les *Fundamenta Arithmetica et Geometrica d'Amsterdam 1617* (3), ont été minutieusement examinées par

---

(1) *Bouwstoffen*, VIII, pp. 325-328.

(2) Les articles consacrés à van Ceulen, dans les *Bouwstoffen* de Bierens de Haan sont au nombre de trois, numérotés respectivement VIII, IX et XVII :

a) VIII. *Ludolph van Ceulen* (c'est l'article déjà nommé ci-dessus). Verslagen en Mededeelingen... 2e sér., t. IX, Amsterdam, 1876, pp. 322-369.

b) IX. *W. Snellius, Ph. Lansbergen. Christ. Huygens over Ludolph van Ceulen*. Verslagen en Mededeelingen... 2e sér., t. X, Amsterdam, 1876, pp. 161-178.

c) XVII. *Twee brieven van Ludolph van Ceulen*. Verslagen en Mededeelingen... 2e sér., t. XII, Amsterdam, 1878, pp. 118-126.

(3) *Fvndamenta Arithmetica Et Geometrica Cvm Eorvndem Vsr In Varii* (sic) *Problematis. Geometricis, Partim Solo Linearvm Dvctv, Partim per numeros irrationales, & tabulas sinuum & Algebram solutis. Arthore*

Bierens de Haan (1). Quant à l'étude du fond, elle a été traitée par le savant hollandais beaucoup plus superficiellement. Mais, je le répète, pour voir clair dans le *Traité du cercle*, il nous faut jeter d'abord un regard sur l'ensemble de l'œuvre de l'auteur.

De son vivant van Ceulen publia quatre volumes seulement, tous écrits en flamand, trois petits pamphlets fort courts (2) et le *Traité du cercle.* A sa mort il laissa de nombreux manuscrits. On y trouva les *Arithmetische en geometrische Fondamenten* (3) publiés cinq ans plus tard par sa veuve Adrienne Simoens, puis un grand *Traité d'algèbre,* malheureusement aujourd'hui perdu,

---

Lvdolpho A Cevlen Hildesheimensi. E vernaculo in Latinum translata. A Wil. Sn. R. F. Amstelodami, Apud Henricum Laurentium. Anno M.DC.XVII. (Univ. de Louvain, Scienc., 100). — L'abréviation A W. Sn. R. F. doit se lire : A Willebrordo Snellio Rudolphi Filio. Cet ouvrage n'est pas une vraie réédition. Un examen même superficiel fait voir que l'édition d'Amsterdam 1617 est formée au moyen d'exemplaires de l'édition de 1615 rajeunis par un nouveau titre. Au surplus, voici le titre complet de la première édition :

Fvndamenta Arithmetica & Geometrica cum eorundem usu In variis problematis, Geometricis, partim solo linearum ductu, partim per numeros irrationales, & tabulas sinuum, & Algebram solutis. Authore Ludolpho à Cevlen Hildesheimensi. E vernaculo in Latinum translata A Wil. Sn. R. F. Lvgdvni Batavorvm, Apud Iustum à Colster, & Iacobvm Marci. Bibliopolas Anno. CIϽ.IϽ.CXV. (Univ. de Louvain, Scienc., 99). Je cite cet ouvrage en abrégé : ***Fundamenta.***

(1) ***Bouwstoffen,*** VIII.

(2) *Solutie ende Werckinghe Op twee Geometrische vraghen by Willem Goudaen In de Jaeren 1580. ende 83. binnen Haerlem aenden Kerckdeure ghestelt. Midtsgaders Propositie Van twee andere Geometrische vraghen tsamen door Ludolph van Colen gheboren in Hildesheim. Ghedruckt t'Amstelredam by Cornelis Claesz opt water, by die oude Brugghe. Anno 1584.* D'après *De Amsterdamsche Boekdrukkers...* door E. W. Moes... voortgezet door D^r C. P. Burger J^r, t. 2. Amsterdam, C. L. van Langenhuysen, 1907, pp. 32 et 33 : Les bibliothèques des universités d'Amsterdam et de Leyde en possèdent un exemplaire. J'ai eu en mains celui de Leyde. Cet opuscule a été réédité dans *Circkel* ***1615,*** ff^o 109 r^o—114 v^o.

(3) *De Aritmetische en Geometrische fondamenten van M^r Lvdolf Van Cevlen, Met het ghebruyck van dien In veele verscheydene constighe questien, soo Geometrice door linien, als Arithmetice door irrationale ghetallen, oock door den regel Coss, ende de tafelen Sinuum ghesolveert.* (Portrait représentant Van Ceulen à l'âge de 71 ans.) *Tot Leyden, By Ioost van Colster, ende Iacob Marcvs. Ann. CIϽ.IϽ.CXV* (Bibliothèque Royale de Belgique, V. 4889 ; Bibliothèque de l'Observatoire Royal d'Uccle). Je cite en abrégé : *Fondamenten.*

mais auquel l'auteur fait souvent allusion. En outre, nous possédons encore quelques lettres de van Ceulen et l'un ou l'autre morceau détaché, sans grande importance, publiés dans d'autres ouvrages. Le lecteur en trouverait au besoin le détail dans les *Bouwstoffen* déjà cités de Bierens de Haan (1).

L'héritier des papiers de van Ceulen fut, je l'ai déjà dit, Willebrord Snellius.

Adrienne Simoens se chargea, pour sa part, de rééditer toutes les œuvres mises au jour par son mari lui-même. Le volume *Van den Circkel* de Leyde 1615, contient donc non seulement le *Traité du cercle,* mais aussi les trois pamphlets. Adrienne y eut cependant une idée malheureuse. Elle supprime la préface si pleine d'aveux et de confidences intéressantes, mise par van Ceulen en tête de sa première édition !

Quant à Snellius, il semble avoir obéi à des impressions diverses.

Plein d'admiration pour l'œuvre de van Ceulen, il voulut faire connaître le maître et entreprit de le traduire en latin. Bientôt il s'en fatigua. Ludolphe se complaît aux calculs formidables. Il jongle parfois avec les opérations numériques énormes, sans chercher à les abréger, par simple amour de l'art. Snellius ne tarda pas à le remarquer et s'impatienta. Ce mouvement d'humeur nous valut un chef-d'œuvre, son *Cyclometricus* (2). « Les nombres obtenus par van Ceulen pour le rapport de la circonférence au diamètre, dit-il, sont loin d'exiger toutes les bissections d'arcs dont il se sert (3). » Aussi, si Snellius traduisit à peu près en entier les *Arithmetische en geometrische Fondamenten,* c'est à peine s'il se résigna à faire la version de quelques chapitres du *Traité du cercle*. Le volume publié par lui sous le titre de *Ludolphi à Ceulen de circulo et adscriptis liber* est pour plus des quatre cinquièmes une réédition, voire même par moments un simple nouveau tirage, de cinq des six livres qui composent les *Fundamenta Arithmetica et Geometrica*. Je dis cinq sur six, car le livre II est omis en entier. La fin du *Liber de circulo et adscriptis*, publiée avec un numérotage spécial des pages est, il est vrai, tirée du *Traité du cercle ;* mais cet extrait ne nous donne pas la dixième partie des éditions flamandes et les fait, somme toute, mal connaître. En revanche, Snellius ajoute souvent au texte des remarques judicieuses. J'en ferai grand usage.

---

(1) *Bouwstoffen*, XVII ; voir aussi VIII.

(2) *Willebrordi Snellii R. F. Cyclometricvs, De circuli dimensione secundum Logistarum abacos, & ad Mechanicem accuratissima ; atque omnium parabilissima. Eiusdemque usus in quarumlibet adscriptarum inventione longe elegantissimus, & quidem ex ratione diametri ad suam peripheriam data. Lvgdvni Batavorvm, Ex Officina Elzeviriana, Anno CIↃ.IↃ.CXXI* (Bibliothèque Royale de Belgique, V. H. 29522).

(3) *Cyclometricus*, p. 54.

Un dernier mot pour entrer en matière.

D'après quelle édition faire mes citations du *Traité du cercle ?*

Malgré sa rareté, d'après la première, le *Circkel* de Delft 1596 ; c'est évident. Pour ne pas surcharger le texte de notes et de références, à moins de raisons particulières, je me contenterai même de celle-là, sans nommer les autres.

II

Et tout d'abord une critique. Van Ceulen n'est pas écrivain et son *Traité du cercle* manque d'unité. Pour y mettre un peu d'ordre, distinguons quatre parties : le calcul du rapport de la circonférence au diamètre ; l'inscription au cercle des polygones réguliers d'un nombre de côtés arbitrairement donné ; les tables des lignes trigonométriques naturelles et la manière de s'en servir ; les tables d'intérêt.

Au fond, ces parties sont annoncées toutes les quatre dans un titre interminable. On peut s'en assurer par la traduction que voici (1) :

Du Cercle. On y apprend à trouver le rapport approché du diamètre du cercle à sa circonférence, ce qui rend possible la mesure exacte de tous les cercles et par suite celle des figures et des terrains limités par des lignes courbes.

Item à exprimer les côtés de tous les polygones inscrits dans le cercle, en partant des polygones de 3, 4, 5 ou 15 sommets, quand bien même les sommets du polygone seraient au nombre de plusieurs centaines de mille.

Item à calculer les côtés des polygones de 7, 11, 13, 17, 19,

---

(1) J'ai donné, ci-dessus, le titre flamand.

23 sommets et plus généralement un côté ou une corde quelconque dont l'arc est exprimé, arbitrairement, en degrés, minutes, secondes, etc.

On y trouve en outre les tables des sinus, tangentes et sécantes avec la manière de s'en servir, chose fort nécessaire aux arpenteurs. On y a joint beaucoup d'autres bons exercices qui n'ont jamais été publiés.

Enfin, des Règles d'Intérêt. On donne à cette fin de nombreuses tables ; on en explique l'usage par beaucoup de bons exemples toujours résolus en long et vérifiés par leurs preuves.

Le tout rédigé par Ludolphe van Ceulen, natif d'Hildesheim.

A Delft, chez Jean Andriesz, demeurant au Marct-Velt, à l'ABC d'or. Anno 1596.

Qu'à la rigueur les trois premières parties de l'ouvrage aient entre elles quelque liaison ; soit, admettons-le.

Mais la dernière ? Mais les Tables d'intérêt ? Comment les rattacher à ce qui précède ?

Malgré l'inhabileté de sa plume, van Ceulen lui-même semble s'être rendu compte de ce défaut d'unité, car ses Règles d'intérêt sont précédées d'un titre, d'un avis au lecteur et d'une préface spéciales (1). Seuls, le numérotage des pages, leurs signatures, l'annonce des Tables d'intérêt faite au titre de départ — liens bien factices et bien faibles — montrent que nous n'avons pas affaire à un ouvrage tout à fait distinct du premier.

Le calcul de π fait l'objet des douze premiers chapitres.

« C'est en septembre 1586 (2), dit van Ceulen, que j'ai fait ma grande découverte ! Sans le moindre labeur, elle me permet d'exprimer, en nombres irrationnels, le côté d'un polygone qui aurait des centaines et des centaines de mille de sommets. »

Voici en quoi consiste la trouvaille !

Considérons un demi-cercle de rayon égal à l'unité. Soit A un arc quelconque dont on connaît la corde ; par exemple l'arc sous-tendu par le côté du triangle équilatéral, par celui du carré, du pentagone ou du pentédécagone régulier :

---

(1) Titre, avis au lecteur et dédicace sont omis dans le *Circkel 1615*.

(2) *Circkel*, f° 11 r°.

La proposition du carré de l'hypoténuse nous donne

$$crd(\pi - \mathrm{A}) = \sqrt{4 - crd^2\mathrm{A}}\,;$$

le radical y est affecté d'un seul signe, les quantités négatives, on le sait, étant au XVI$^{\mathrm{e}}$ siècle dénuées de toute signification.

Or deux formules connues (je les démontrerai tantôt d'après l'auteur)

$$crd^2\frac{1}{2}\,\mathrm{A} = 2 - crd(\pi - \mathrm{A}) \tag{1}$$

$$crd^2\left(\pi - \frac{\mathrm{A}}{2}\right) = 2 + crd(\pi - \mathrm{A}) \tag{2}$$

nous permettent d'écrire immédiatement pour la valeur de $crd\,\frac{\mathrm{A}}{2^n}$,

$$crd\,\frac{\mathrm{A}}{2^n}\ \surd.2 - \surd.2 + \surd.2 + \surd.2 + \cdots + \surd.2 + crd(\pi - \mathrm{A})\,; \tag{3}$$

formule, où je me sers, au lieu de radicaux superposés, de la notation très commode de $\surd.$ employée par van Ceulen. Le point placé après le signe $\surd$ indique que le radical affecte tout ce qui suit (¹).

(¹) D'après cela, le côté du pentédécagone régulier

$$\sqrt{1\frac{3}{4} - \sqrt{\frac{5}{16} - \sqrt{1\frac{7}{8} - \sqrt{\frac{45}{64}}}}}$$

s'écrit

$$\surd.\,1\frac{3}{4} - \surd\,\frac{5}{16} - \surd.\,1\frac{7}{8} - \surd\,\frac{45}{64}$$

le point est naturellement omis après le second et le quatrième radical. Mais

$$\sqrt{\frac{5}{8} - \sqrt{\frac{5}{64}}} - \sqrt{1\frac{1}{8} - \sqrt{\frac{45}{64}}}$$

s'écrirait en plaçant un point après le nombre du second radical

$$\surd.\,\frac{5}{8} - \surd\,\frac{5}{64}. - \surd.\,1\frac{1}{8} - \surd\,\frac{45}{64}.$$

Ce dernier genre d'expressions est rare dans le *Circkel*. L'exemple donné ci-dessus se trouve à la dernière ligne du f° 2 v° ; il y en a un autre à la première ligne du f° 3 r°.

Dans (3), $\surd.2$ est répété n fois, toujours avec le signe $+$, excepté le second radical qui est précédé du signe $-$.

Une corde $\frac{A}{2^n}$ étant donnée, menons la tangente parallèle. Soit $sg\,\frac{A}{2^n}$ la longueur du segment déterminé sur cette tangente par les deux rayons menés aux extrémités de la corde. $sg\,\frac{A}{2^n}$ s'exprime, lui aussi, immédiatement et sans calcul par

$$sg\,\frac{A}{2^n}=\frac{\surd.2-\surd.2+\surd.2+\surd.2+\cdots+\surd.2+crd(\pi-A)}{\surd.2+\surd.2+\surd.2+\surd.2+\cdots+\surd.2+crd(\pi-A)} \qquad (4)$$

$\surd.2$ est répété n fois, tant au numérateur qu'au dénominateur, toujours avec le signe $+$, excepté devant le second radical du numérateur, où il est précédé du signe $-$.

Remarquons-le en passant, sous un algorithme différent, toutes ces formules sont encore aujourd'hui en usage. Posons, en effet,

$$A=2a,$$

il vient alors

$$crd A = 2\sin a, \qquad crd(\pi - A) = 2\sin\left(\frac{\pi}{2}-a\right)=2\cos a$$

et les formules (1) et (2) ne sont autre chose que

$$\sin\frac{1}{2}a=\sqrt{\frac{1}{2}(1-\cos a)}$$

$$\cos\frac{1}{2}a=\sqrt{\frac{1}{2}(1+\cos a)}.$$

De même (4) équivaut évidemment à

$$tg\,\frac{a}{2^n}=\frac{\sin\frac{a}{2^n}}{\cos\frac{a}{2^n}}.$$

Van Ceulen, ai-je dit, est un autodidacte, au style souvent embrouillé, long, pénible. Montrons-le par un exemple : la démonstration de la formule

$$crd^2 \frac{1}{2} A = 2 - crd(\pi - A)$$

empruntée à l'*Almageste* de Ptolémée.

Comme point de comparaison, voici d'abord l'élégante démonstration courante au XVI^e siècle, telle à peu près que les géomètres d'alors pouvaient la lire dans la *Grande composition* de l'astronome grec (¹). Avec une différence cependant : Ptolémée fait le diamètre égal à 120 ; je le poserai égal à 2.

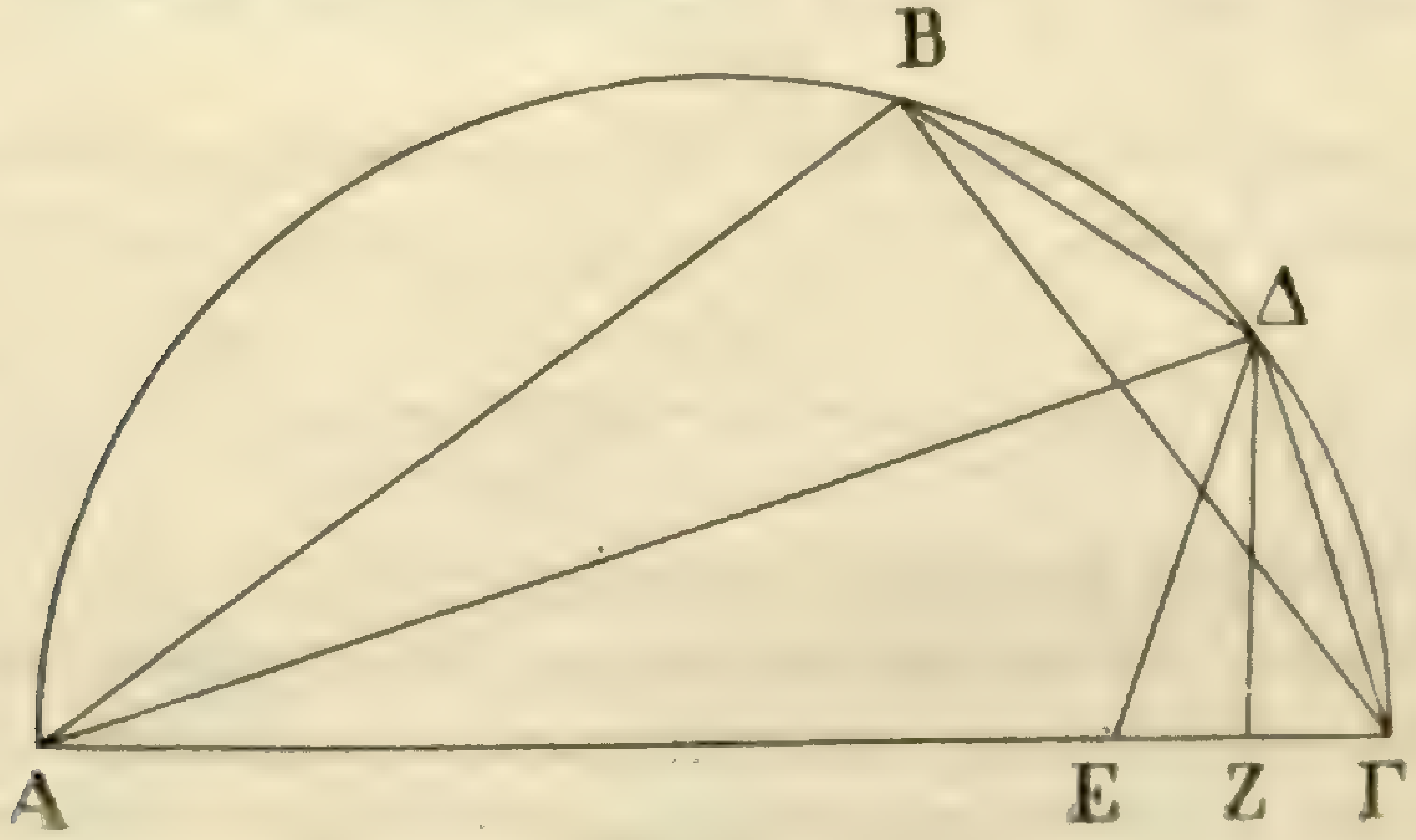


Fig. 1.

Considérons (fig. 1) le demi-cercle décrit sur le diamètre $A\Gamma$ et soient

$$\text{arc } B\Gamma = A, \qquad \text{arc } B\Delta = \text{arc } \Delta\Gamma = \frac{1}{2} A$$

par suite

$$\text{arc } AB = \pi - A.$$

Menons les cordes AB, $B\Delta$, $\Delta\Gamma$, puis prenons sur le diamètre $A\Gamma$

$$AE = AB$$

et joignons ΔE. Les deux triangles ΔAB, ΔAE ont un angle égal

---

(¹) *Claudii Ptolemaei Opera quae exstant omnia. Volumen I. Syntaxis Mathematica*, edidit J. L. Heiberg, professor Hauniensis. Lipsiae, in aedibus B. G. Teubner, 1898 ; pp. 39 et 40.

compris entre deux côtés égaux chacun à chacun. Ils sont donc égaux. Donc les troisièmes côtés

$$\mathsf{\Delta E} = \mathsf{\Delta B}$$

et le triangle $\mathsf{E\Delta\Gamma}$ est isocèle.

Menons la hauteur $\mathsf{\Delta Z}$ de ce triangle. Il s'ensuit que

$$\mathsf{Z\Gamma} = \mathsf{ZE} = \frac{1}{2}\,\mathsf{E\Gamma} = \frac{1}{2}\,(\mathsf{A\Gamma} - \mathsf{AE}) = \frac{1}{2}\,(2 - \mathsf{AB}).$$

Or

$$\overline{\mathsf{\Delta\Gamma}}^2 = \mathsf{A\Gamma}\,.\,\mathsf{Z\Gamma} = 2 \times \frac{1}{2}\,(2 - \mathsf{AB}) = 2 - \mathsf{AB}$$

ce qui démontre le théorème; car cette dernière formule peut évidemment s'écrire

$$crd^2\,\frac{1}{2}\,\mathrm{A} = 2 - crd(\pi - \mathrm{A}).$$

Après Ptolémée, écoutons van Ceulen (¹).

Tout d'abord, suivant un procédé qui lui est propre, au liêu de décrire les constructions géométriques à la manière d'Euclide (comme nous le faisons encore aujourd'hui) notre auteur se contente, pour employer ses expressions, de « préparer une figure » ; puis il suppose que les constructions qui y sont effectuées se comprennent d'elles-mêmes.

Dans le cas actuel, cette figure « préparée » est la figure dessinée ci-contre (fig. 2).

Ceci fait, van Ceulen énonce le théorème en le généralisant de manière à le rendre applicable à un rayon de cercle arbitraire. On pourrait l'exprimer comme suit :

$$crd^2\,\frac{\mathrm{A}}{2} = \mathrm{R}[2\mathrm{R} - crd\,(\pi - \mathrm{A})],$$

puis vient la démonstration ; je la traduis en notations modernes :

Soit CB un diamètre et

(¹) *Circkel*, ch. 2, f° 1 r°.

$$AB = crd A, \qquad \text{donc} \qquad AC = crd(\pi - A).$$

On a

$$XB = CB - AC.$$

Soit ensuite D le centre du cercle et prenons

$$DL = XB.$$

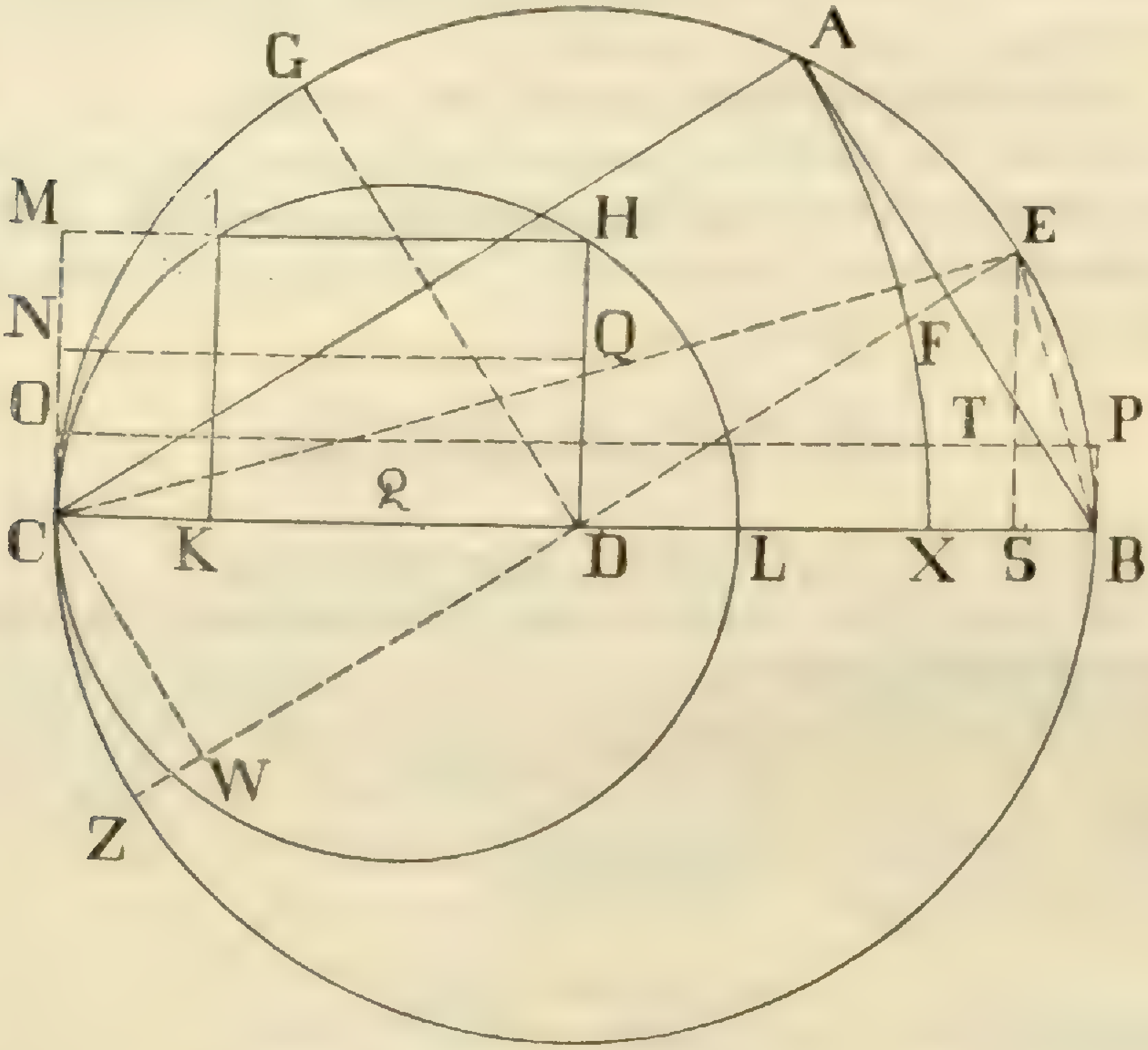


Fig. 2.

Soit encore 2 (¹) le milieu de CL. Décrivons le cercle CIHL et élevons en D la perpendiculaire DH au diamètre (contrairement à son habitude, ces constructions sont indiquées par l'auteur). On a (²)

$$DH^2 = CD \,.\, XB.$$

Soit enfin

$$EB = crd \frac{A}{2},$$

(¹) Je conserve la notation de van Ceulen.

(²) Puisque DL = XB,

$$DH^2 = CD \,.\, DL = CD \,.\, XB.$$

le théorème sera démontré si nous prouvons que (¹)

$$DH^2 = EB^2.$$

« La figure étant préparée comme ci-dessus, les arcs CA et AB y sont divisés en deux parties égales. »

Ici, sous peine de devenir inintelligible, je dois bien interrompre un instant ma traduction pour dire en quoi consiste cette « préparation ».

Que la manière dont sont formés les rectangles CAFW, MCDH se comprenne à la simple inspection de la figure, soit, je l'accorde. Mais en est-il encore de même des rectangles OTSC et NCDQ ? A une première lecture, on pourrait, je le crains, être embarrassé.

On prend donc

$$OC = \frac{1}{2}DL \quad \text{et} \quad NC = DL,$$

il eût fallu prendre la peine de le faire remarquer.

Ceci dit, van Ceulen continue son raisonnement, comme suit :

Les perpendiculaires (²)

$$AF = ES = CW,$$

de plus

$$CA = WF,$$

d'où

$$FE = ZW = SB.$$

En outre (³)

$$SB = XS,$$

d'où

$$SB = \frac{1}{2}XB = \frac{1}{2}(CB - CA).$$

(¹) On a, en effet,

$$crd^2\frac{A}{2} = EB^2 = DH^2 = CD\,.\,XB = CD(CB - CA) = R[2R - crd(\pi - A)]$$

(²) On a $\quad$ arc AB = 2EB $\quad$ d'où $\quad$ AF = ES.

(³) Puisque EF = SB, on a

$$DF = DS \quad \text{et} \quad CS = ZF$$

donc

$$XS = CS - CX = CS - CA = CS - WF = ZF - WF = WE - WF = FE = SB.$$

Maintenant

$$EB^2 = ES^2 + SB^2,$$

or

$$ES^2 = CS \,.\, BS,$$

donc (¹)

$$ES^2 = \text{rectangle OCTS}.$$

Ajoutons de part et d'autre SB^2

$$ES^2 + SB^2 = \text{rect. OCTS} + SB^2$$

ou

$$EB^2 = \text{rect. OCPB}.$$

Mais (²)

$$\text{rect. OCPB} = \text{rect. NCQD},$$

or (³)

$$\text{rect. NCQD} = CD \,.\, DL = DH^2,$$

donc enfin

$$DH^2 = EB^2.$$

Cela se démontre, dit en terminant van Ceulen, par les propositions 4, 35, 43 et 47 du 1ᵉʳ livre des *Éléments* d'Euclide ; 30 et 31 du 3ᵉ ; 8, 13 et 17 du 6ᵉ.

« Voilà une démonstration bien épineuse ! observe, avec beaucoup de raison, Willebrord Snellius (⁴), la multiplicité des lignes l'embrouille singulièrement ! »

Après avoir mené l'arc AX, ajoute-t-il, il suffisait (fig. 3) de joindre AE, XE. Les triangles CAE, CXE, égaux comme ayant un angle égal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun donnaient

---

(¹) En effet, par construction

$$OC = \frac{1}{2} DL = \frac{1}{2} XB = SB.$$

(²) Car

$$CB = 2CD \qquad \text{et} \qquad NC = DL = 2CO.$$

(³) Comme $CN = DL$, on a

$$\text{rect. NCQD} = CD \,.\, NC = CD \,.\, DL.$$

(⁴) *De Circulo*, 2ᵉ part., p. 3. « Auctoris demonstratio spinosa est et variis linearum ductibus intricata. »

$$AE = XE = BE.$$

De plus les triangles isocèles XEB, DEB ayant l'angle en B commun sont semblables, d'où

$$\frac{EB}{XB} = \frac{DB}{EB}$$

ou

$$EB^2 = DB \cdot XB,$$

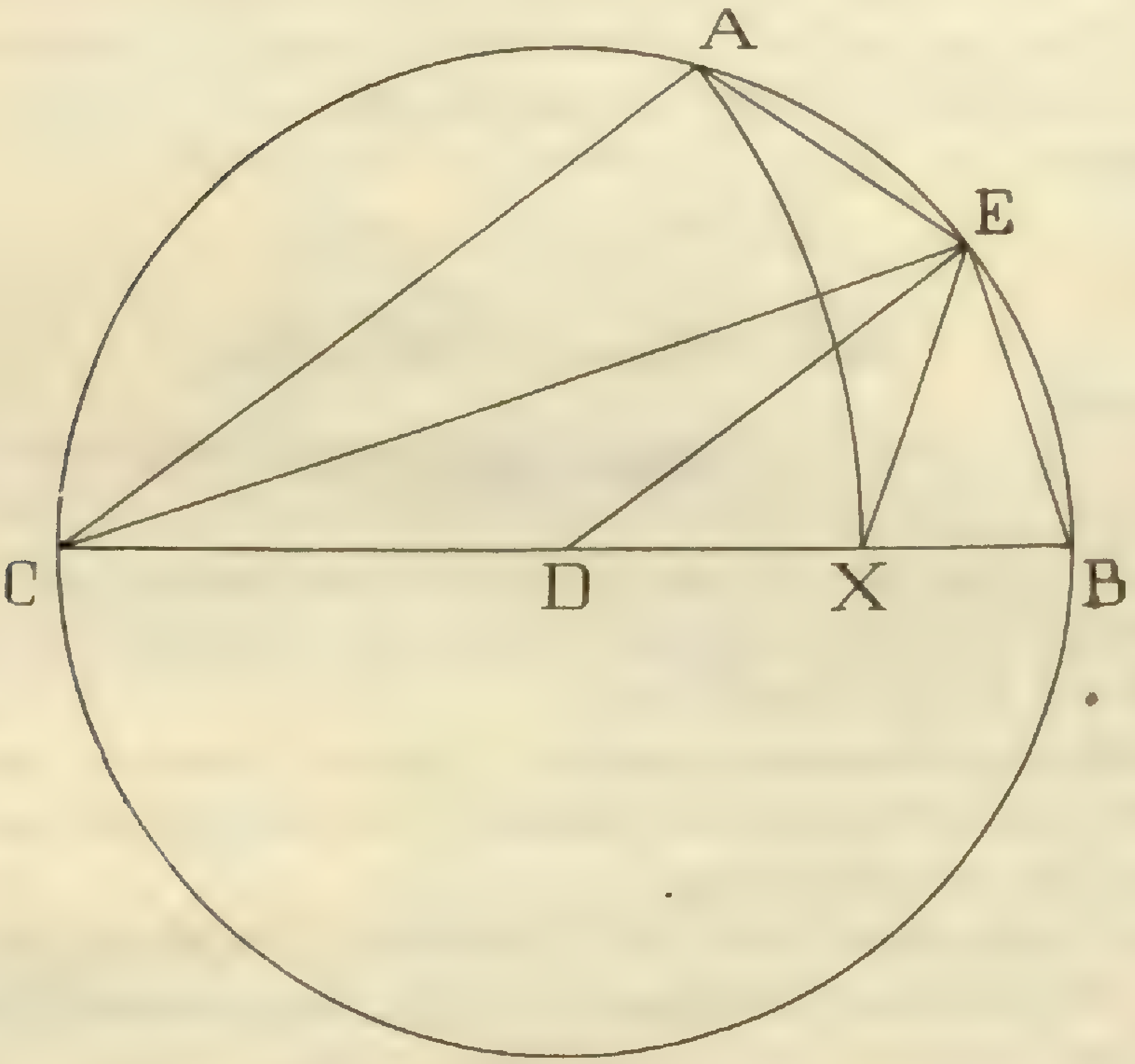


Fig. 3.

ce qui peut évidemment s'écrire

$$crd^2 \frac{A}{2} = R[2 \cdot R - crd(\pi - A)].$$

Quant à la formule

$$crd^2\left(\pi - \frac{A}{2}\right) = 2 + crd(\pi - A)$$

elle se déduit immédiatement de celle que nous venons de démontrer. Reprenons la fig. 2. On a

$$crd\left(\pi - \frac{A}{2}\right) = EC.$$

Or

$$EC^2 = CB^2 - EB^2,$$

donc en se rappelant que $R = 1$

$$crd^2\left(\pi - \frac{A}{2}\right) = 4 - [2 - crd(\pi - A)] = 2 + crd(\pi - A).$$

III

Nous en arrivons à la manière dont van Ceulen conduit le calcul numérique de π (1). C'est la partie la plus connue du *Traité du cercle*. Il me suffira donc d'en parcourir rapidement les grandes lignes, sans m'attarder beaucoup aux détails.

Il part d'abord du pentagone régulier et, après des bissections successives, s'arrête au polygone de 10 485 760 côtés, qui lui donne :

$$3{,}141\,592\,653\,589 < \pi < 3{,}141\,592\,653\,590.$$

Pour commencer il extrait $\sqrt{\frac{5}{4}}$ à $\frac{1}{10^{26}}$ (2). En se contentant de ce nombre de décimales, dit-il (3), la double inégalité précédente est la valeur la plus rapprochée qu'il lui a été possible d'atteindre.

Dans cette première suite de mises en nombres, il fait connaître, pour chacune des bissections successives, à partir du polygone de 80 côtés, les limites entre lesquelles π est compris. Le polygone de 20 480 côtés qui fait partie de la série est cependant omis. Par le polygone de 80 côtés il ne réussit à déterminer que deux décimales (4) :

$$3{,}14 < \pi < 3{,}15.$$

Il reprend ensuite le calcul de trois autres manières, avec beaucoup moins d'intermédiaires, et sans écrire les valeurs de π pour chacune des bissections.

---

(1) **Circkel**, cap. XI, ff° 11 r°—14 r°.

(2) **Circkel**, f° 11 v°.

(3) **Circkel**, f° 12 r°.

(4) **Circkel**, f° 12 r°.

En prenant pour départ le carré il poursuit les bissections jusqu'au polygone de 1 073 741 824 côtés, et en tire

$$3{,}141\ 592\ \mathit{053}\ 589\ 793\ 2 < \pi < 3{,}141\ 592\ \mathit{053}\ 589\ 793\ 3.$$

Ces nombres renferment une singulière faute d'impression ou de plume. L'errata ne la signale pas et elle se répète dans l'édition de 1615. Le 7^e chiffre décimal doit être 6 et non pas 0 (¹).

Pour obtenir ces inégalités, van Ceulen extrait $\sqrt{2}$ à $\frac{1}{10^{33}}$.

Il obtient ensuite par le polygone de 6 442 450 944 côtés provenant des bissections des côtés du triangle équilatéral, et de l'hexagone régulier (²)

$$3{,}141\ 592\ 653\ 589\ 793\ 238 < \pi < 3{,}141\ 592\ 653\ 589\ 793\ 239.$$

Enfin, le polygone de 32 512 254 720 côtés, dérivé du pentédécagone régulier, lui fournit la valeur la plus approchée de π du *Traité du cercle*. « Qu'un autre de bonne volonté pousse le calcul plus loin, dit-il ; pour moi, j'en remercie le Dieu tout-puissant, grâce à mon travail l'on sait désormais que (³)

$$3{,}141\ 592\ 653\ 589\ 793\ 238\ 46 < \pi < 3{,}141\ 592\ 653\ 589\ 793\ 238\ 47 \text{ ».}$$

On le voit, π est exprimé avec vingt décimales exactes.

Plus tard, Adrienne Simoens, veuve de van Ceulen, publia dans les *Arithmetische en geometrische Fondamenten* de son mari, la valeur de π avec trente-trois décimales (⁴). Mais ce résultat ne

---

(¹) *Circkel*, f° 13 r° ; *Circkel 1615*, f° 22 v°.

(²) *Circkel*, f° 13 r°.

(³) *Circkel*, f° 14 r°. Les deux inégalités résument la fin de la phrase. Les mêmes nombres sont donnés dans la Préface.

(⁴) *Fondamenten*, p. 163 ; *Fundamenta*, p. 144.

La valeur de π exprimée avec trente-trois décimales se trouve aussi à la p. 92 *De circulo ;* mais ici il importe de ne pas se laisser induire en erreur. Cette page appartient à la partie de l'ouvrage extraite des *Fundamenta* et non pas à celle qui est une traduction du *Circkel*. Au surplus, en cet endroit-là même *De circulo*, van Ceulen dit, en termes exprès, que, dans son *Circkel*, il n'a pas donné la valeur de π avec plus de vingt décimales. « In libro quem de circulo & adscriptis publicavi solide & accurate docui diametri rationem ad ejusdem parut qu'en 1615, tandis qu'en 1596 van Ceulen s'en tint à vingt décimales. Quant aux trente-cinq décimales, nous l'avons déjà dit, elles furent gravées sur la tombe de l'immortel calculateur (1).

Ces expressions approchées de π nécessitent des extractions de racines carrées énormes. Comment étaient-elles effectuées ?

Le problème se pose naturellement ; on semble cependant ne s'en être guère occupé.

Et tout d'abord Ludolphe faisait-il les opérations au long, ou ne se servait-il pas plutôt de méthodes abrégées ?

Il en est bien ainsi, lui-même il nous l'apprend à diverses reprises. Maintes fois il nous promet de nous donner la théorie de ces méthodes dans son grand *Traité d'algèbre*. Mais il me faut, hélas ! toujours le répéter : ce *Traité* est perdu.

Quant au *Traité du cercle*, il permet mal de se rendre compte des simplifications apportées par l'auteur aux longues opérations de l'arithmétique élémentaire ; sauf en une occasion cependant, et l'exemple qui y est alors développé est trop curieux pour ne pas mériter toute l'attention. C'est une division faite par une méthode abrégée dont tous les calculs intermédiaires sont indiqués.

Le *Traité du cercle* est le plus ancien ouvrage *imprimé* (2) contenant une opération de ce genre.

Il y a quelques années, j'ai cru pouvoir revendiquer ce titre de gloire pour la *Chordarum Resolutio* (3) d'Adrien Romain ; mais on le voit, van Ceulen lui ravit la palme !

---

circuli circumferentiam esse majorem etc. » Phrase étrange, quand on songe qu'on la lit dans le *Liber de circulo* lui-même ! Mais il faut se rappeler la grande négligence avec laquelle cet ouvrage fut composé et la négligence plus grande encore avec laquelle il fut imprimé.

(1) Elles furent publiées pour la première fois par Snellius, dans son *Cyclometricus* (p. 54). Snellius y dit qu'on les lisait sur la tombe de van Ceulen. On les trouve aussi, à la page citée ci-dessus des *Délices de Leyde*.

(2) Je dis à dessein *imprimé*, car il est malaisé, on le sait, de déterminer la date des manuscrits de Burgi qui en contiennent également. Voir : *Die abgekürtze Multiplication von Maximilian Curtze in Thorn.* HISTORISCH-LITERARISCHE ABTHEILUNG DER ZEITSCHRIFT FÜR MATHEMATIK UND PHYSIK. 40 Jahrgang. — Leipzig, Teubner, 1895, pp. 7-11.

(3) ANNALES DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE, t. XXIX, Bruxelles, 1905, 1re partie, p. 77.

Chordarvm Arcvbvs Circvli Primariis. Qvibvs Videlicet Is In Triginta Dirimitvr Partes, Svbtensarvm Resolvtio Vti Exactissima Ita Qvoque Et

La *Chordarum Resolutio* conserve néanmoins tout son intérêt, car chez van Ceulen on ne trouve que la division abrégée ; Romain, au contraire, n'a que l'extraction des racines.

Voici maintenant la division de van Ceulen. Il se propose de déterminer à $\frac{1}{10^{19}}$ un quotient qui donne la valeur de $\frac{2}{\pi}$ (1)

$$\frac{2}{\pi} = \frac{999\ 999\ 999\ 999\ 999\ 999\ 881\ 103\ 927\ 408\ 5}{3\ 221\ 225\ 472 \times 4\ 876\ 393\ 597\ 557\ 198\ 936\ 703}.$$

Il sait que

$$3\ 221\ 225\ 472 = 3 \times 2^{30}$$

nombre qu'il décompose en

$$3\ 221\ 225\ 472 = 6\ .\ 8^9\ .\ 4.$$

Appliquant ensuite, mais sans l'énoncer, le théorème : *Pour diviser un nombre entier par un produit de plusieurs facteurs entiers, il suffit de le diviser successivement par les facteurs du produit, en négligeant les restes* (2) ; il divise le numérateur d'abord par 6, puis neuf fois consécutives par 8, après cela par 4, enfin par

$$4\ 876\ 393\ 597\ 557\ 198\ 936\ 783.$$

Tous calculs effectués, à un moment donné il se trouve amené ainsi à devoir déterminer à $\frac{1}{10^{19}}$ le quotient

$$\frac{3\ 104\ 408\ 582\ 051\ 595\ 051\ 714}{4\ 876\ 393\ 597\ 557\ 198\ 936\ 703}.$$

Laboriossima Arthore A. Romano... Wircebvrgi Excudebat Georgius Fleischmann Anno 1602 (Université de Munich). J'ai donné l'analyse de cet ouvrage au tome XXIX des ANNALES DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE, 1re partie, pp. 74-77.

(1) *Circkel*, cap. XII, f° 15 r° et v°. Van Ceulen trouve comme résultat

$$0{,}636\ 619\ 772\ 367\ 581\ 343\ 0 < \frac{2}{\pi} < 0{,}636\ 619\ 772\ 367\ 581\ 343\ 1.$$

(2) L'emploi de ce théorème par un auteur du XVIe siècle mérite d'être remarqué. Je ne saurais dire cependant quand on le rencontre pour la première fois.

C'est ici qu'intervient, à proprement parler, sa méthode abrégée. « Les gens entendus, dit-il (1), s'apercevront bien qu'elle est correcte. » Pourquoi n'en avoir pas donné la théorie ? Pourquoi n'avoir pas du moins énoncé la règle ? Quoi qu'il en soit, il est d'un haut intérêt de comparer la division abrégée de van Ceulen avec la méthode actuelle. Toutes deux ont leurs avantages et leurs inconvénients. La méthode de van Ceulen permet de se servir du produit du diviseur par les neuf premiers nombres naturels, fait au commencement une fois pour toutes ; en revanche, elle nécessite l'emploi de plus de chiffres.

C'est le moment de la mettre sous les yeux du lecteur ; il la trouvera à la page suivante. J'imprime en regard la même division faite par la méthode abrégée moderne.

Une nouvelle question se pose ici.

Comment van Ceulen découvrit-il sa méthode de division abrégée ? Fut-il guidé par des considérations théoriques ? Est-elle le simple fruit de l'expérience et le résumé de remarques purement empiriques ?

Je ne saurais le dire. Peut-être même la question est-elle insoluble dans l'état actuel de la science. Mais je voudrais cependant hasarder une réflexion.

Tous les grands manieurs de chiffres de la fin du XVI^e siècle, Burgi, Romain, van Ceulen, découvrent, chacun de son côté, des méthodes abrégées. La pratique du calcul ne suffisait-elle pas pour leur apprendre l'inutilité de pousser les opérations au delà d'une certaine limite ?

Quelle que soit d'ailleurs la manière dont van Ceulen ait trouvé sa division abrégée, il se rendait parfaitement compte de l'importance de son invention et prend soin de nous le dire :

« Sans sa méthode, assure-t-il (2), la longueur des divisions eût rendu les calculs précédents (les calculs de π) impossibles : grâce à elle, au contraire, ils deviennent très faciles et on y prend plaisir.

» Ceux qui parviendront à exécuter ces calculs sans connaître ma règle, ajoute-t-il avec une pointe d'ironie, seront, je crois, peu nombreux ! »

---

(1) *Circkel*, fº 15 vº.

(2) *Circkel*, cap. XII, fº 15 rº.

DIVISION

PROCÉDÉ DE VAN CEULEN

310 440 858 205 159 505 171 400 000 000	6
292 583 615 853 431 936 202 18	
17 857 242 351 727 568 969 220	3
14 629 180 792 671 596 810 109	
3 228 061 559 055 972 159 111 0	6
2 925 836 158 534 319 362 021 8	
302 225 400 521 652 797 089 20	6
292 583 615 853 431 936 202 18	
9 641 784 668 220 860 887 020	1
4 876 393 597 557 198 936 703	
4 765 391 070 663 661 950 317 0	9
4 388 754 237 801 479 043 032 7	
376 636 832 862 182 907 284 3	7
341 347 551 829 003 925 569 2	
35 289 281 033 178 981 715 1	7
34 134 755 182 900 392 556 9	
1 154 525 850 278 589 158 2	2
975 278 719 511 439 787 3	
179 247 130 767 149 370 9	3
146 291 807 926 715 968	
32 955 322 840 433 402	6
29 258 361 585 343 193	
3 696 961 255 090 209	7
3 413 475 518 290 039	
283 485 736 800 170	5
243 819 679 877 859	
39 666 056 922 311	8
39 011 148 780 457	
654 908 141 854	1
487 639 359	
167 268 782	3
146 291 807	
20 976 975	4
19 505 574	
1 471 401	3
1 462 9	
8 5	0

1] 4 876 393 597 557 198 936 703

2] 9 752 787 195 114 397 873 406

3] 14 629 180 792 671 596 810 109

4] 19 505 574 390 228 795 746 812

5] 24 381 967 987 785 994 683 515

6] 29 258 361 585 343 193 620 218

7] 34 134 755 182 900 392 556 921

8] 39 011 148 780 457 591 493 624

9] 43 887 542 378 014 790 430 327

ABRÉGÉE

MÉTHODE ACTUELLE

```
310 440 858 205 159 505 171 4 | 487 639 359 755 719 893 670 3
292 583 615 853 431 936 202 0 |------------------------------
----------------------------- |   6 366 197 723 675 813 430
 17 857 242 351 727 568 969 4 |
 14 629 180 792 671 596 810 1 |
 ---------------------------- |
  3 228 061 559 055 972 159 3 |
  2 925 836 158 534 319 361 6 |
  --------------------------- |
    302 225 400 521 652 797 7 |
    292 583 615 853 431 935 8 |
    ------------------------- |
      9 641 784 668 220 861 9 |
      4 876 393 597 557 198 9 |
      ----------------------- |
      4 765 391 070 663 663 0 |
      4 388 754 237 801 478 2 |
      -----------------------
        376 636 832 862 184 8
        341 347 551 829 003 3
        ---------------------
         35 289 281 033 181 5
         34 134 755 182 899 7
         --------------------
          1 154 525 850 281 8
            975 278 719 511 4
            -----------------
            179 247 130 770 4
            146 291 807 926 5
            -----------------
             32 955 322 843 9
             29 258 361 585 0
             ----------------
              3 696 961 258 9
              3 413 475 517 9
              ---------------
                283 485 741 0
                243 819 679 5
                -------------
                 39 666 061 5
                 39 011 148 0
                 ------------
                    654 913 5
                    487 639 3
                    ---------
                    167 274 2
                    146 291 7
                    ---------
                     20 982 5
                     19 505 2
                     --------
                      1 477 3
                      1 462 8
                      -------
                         14 5
```

IV

Les propositions sur l'inscription au cercle des polygones réguliers forment l'objet des chapitres XIV et XV (1). Avant de les parcourir, je ferai quelques conventions.

Je représente la longueur du côté du polygone régulier inscrit de n sommets par C_n.

Les côtés de ces polygones sont souvent calculés par des équations. Van Ceulen s'y sert des signes cossiques de Stifel ; je les remplace par x avec l'exposant convenable. Dans ces équations il fait usage des signes $+$ et $-$, mais écrit toujours au long « ghelijck, égal » ; il m'a paru sans inconvénient de lui substituer le signe $=$. Je n'ai pas hésité non plus, dans les inégalités, à employer les signes $>$ et $<$. Enfin quand je traduis l'auteur, je multiplie les alinéas suivant les habitudes modernes. Le lecteur voudra bien ne pas perdre de vue ces conventions.

A l'occasion du calcul des polygones réguliers, on voit se profiler sur le *Traité du cercle* la silhouette d'un homme qui fut à maintes reprises le bon génie de van Ceulen ; j'ai nommé Adrien Romain. Professeur distingué des universités de Louvain et de Wurzbourg, chevalier de l'Empire, géomètre éminent, érudit de premier ordre, Romain était de la part de van Ceulen l'objet d'une admiration respectueuse. A son tour, le savant belge ne demeura jamais, pour son ami, en reste d'affection et d'estime. Écoutons, par exemple, en quels termes il s'exprime sur lui dans le *Problema Apolloniacum* (2).

« Il y a quelques années, dit-il, je soumis diverses questions d'algèbre au très docte et très subtil mathématicien Ludolphe van Ceulen qui me les résolut fort ingénieusement (3). J'admirai sa science et lui proposai une question très difficile (il s'agit de la célèbre équation du 45^e degré d'Adrien Romain) (¹). C'était à l'occasion d'un extrait de mes recherches *(Ideae Mathematicae)* (²). Je ne lui posai pas la question à lui seul, mais je provoquai tous les mathématiciens à une joute honnête en les invitant à étudier le problème et à s'en occuper. Ludolphe me satisfit. En outre, un homme éminent, vrai mathématicien, insensible à l'aiguillon de la gloire cause universelle de folie, un Français nommé Viète, conseiller royal et maître des requêtes se mit en évidence. Ne voulant pas se voir ravir l'honneur par un Romain (³) ni par un Belge (à n'en pas douter, van Ceulen) (⁴) il publia un livre excellent, très savant, qui lui aussi me satisfit pleinement (*Réponse de Viète au problème d'Adrien Romain*) (⁵). Ludolphe ne me donna qu'une seule solution. Viète la nomme la principale. Mais à cette solution principale Viète ajoute toutes les solutions secondaires ; à ce point de vue il l'emporte sur Ludolphe. Que si nous considérons l'exactitude de la solution principale, Ludolphe est bien supérieur à Viète... Chacun des deux savants a donc des titres de gloire (⁶) ! »

---

(1) *Circkel*, ff^{o} 16 v^{o}—21 v^{o}.

(2) Préface, pp. 3 et 4.

(3) Quelles sont ces questions ? A mon avis, celles qui ont été résolues dans le *Circkel* (ff^{os} 63 v^{o}—65 v^{o}) sous le titre suivant : « Hier volghen nu eenighe konstighe stucken den Circkel aengaende gheproponeert ende ghevonden door een hoog-gheleert Man. »

Cet « hoog-gheleert man » me paraît, à n'en pas douter, être Adrien Romain.

(¹) Elle donnait la corde de l'arc de 32′ en fonction du côté du pentédécagone régulier. J'ai raconté ailleurs la controverse qu'elle suscita entre Viète et Romain. *Biographie nationale publiée par l'Académie royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique*, t. XIX, Bruxelles, Bruylant, 1907, v° Romain A., col. 862-866.

(²) *Ideae mathematicae pars prima, sive methodvs polygonorvm... avthore Adriano Romano Lovaniense... Lovanii, Apud Ioannem Masium, Typog. Iur. Anno CIƆ. IƆ.XCIII* (Bibl. Roy. de Belgique., V. 4973).

D'autres exemplaires ont comme adresse d'imprimeur : *Antverpiae, apud Ioannem Keerbergium. Anno CIƆ. IƆ.XCIII* (Univ. de Louvain, Scienc., 672).

(³) Il y a là un mauvais jeu de mot sur le nom de Romain.

(⁴) Je dirai plus loin, § VII, comment van Ceulen influença la détermination de Viète.

(⁵) *Ad Problema Quod omnibus Mathematicis totius orbis construendum proposuit Adrianvs Romanvs Francisci Vietae Responsum. Parisiis Apud Iametivm Mettayer Typographum Regium. 1595* (Bibl. Roy. de Belgique, V. 5007).

(⁶) D'après la Préface du *Problema Apolloniacum* (p. 7), Viète donna comme solution

$$x = 0{,}009\ 308\ 09.$$

Pour la trouver il s'était probablement contenté d'ouvrir une table de sinus naturels. Van Ceulen envoya au contraire à Romain la solution

$$0{,}009\ 308\ 389\ 071\ 322\ 324\ 827\ 845 < x < 0{,}009\ 308\ 389\ 071\ 322\ 324\ 827\ 846$$

qui dépasse notablement tout ce que les tables pouvaient lui fournir.

On comprend l'autorité d'un pareil éloge dans la bouche de Romain.

Écoutons maintenant la réplique de van Ceulen (¹). Malgré la difficulté de la phrase, j'essaye de traduire en serrant le texte d'assez près ; mais c'est difficile. Quelle plume maladroite et fruste !

« Le très savant Adrien Romain, dit-il, aujourd'hui docteur et professeur à l'Université de Wurzbourg en Franconie, fut l'occasion de ma découverte. Il me proposa diverses équations algébriques regardées jusque-là comme insolubles ; en même temps il me demanda aussi de lui calculer les côtés des polygones de 9 et de 45 sommets. Je trouvai la solution des équations algébriques ; quant à calculer la longueur demandée des côtés, cela me parut impossible. »

Comme je le dirai tantôt, ce qui embarrasse ici van Ceulen, c'est la mise en équation du problème, et non pas la résolution de ces équations.

« L'amicale insistance d'un tel personnage m'obligea néanmoins à m'occuper du problème et à faire des recherches. Je trouvai enfin un procédé étranger à l'algèbre qui me montra une voie aboutissant à l'objet de mon inquisition. Dieu seul en ait la gloire ! »

Au rayon 10^{16}, les valeurs de C_9 et de C_{45} calculées par van Ceulen étaient

$$6\,840\,402\,866\,513\,374 < C_9 < 6\,840\,402\,866\,513\,375$$

et

$$1\,395\,129\,474\,822\,506 < C_{45} < 1\,395\,129\,474\,822\,507$$

« J'envoyai ces valeurs à Adrien Romain, ajoute-t-il. Une de ses lettres m'apprit alors qu'il connaissait le moyen d'obtenir ces côtés et d'autres encore par des équations. Car soit x le côté de ennéagone ; l'équation est alors

$$3x - x^3 = \sqrt{3}.$$

En la résolvant par rapport à x, on trouve pour la valeur du côté de l'ennéagone le nombre ci-dessus. »

(¹) *Circkel*, cap. XIV, fº 16 vº.

Il n'y a pas à le nier, le récit de van Ceulen est embrouillé. Pour y répandre un peu de lumière, je distinguerai trois temps.

Tout d'abord Romain demande simplement à van Ceulen la solution de deux équations regardées jusque-là comme insolubles. C'étaient, à n'en pas douter, les équations cubiques qui déterminaient C_9 et C_{45} respectivement en fonction du côté du triangle équilatéral et de celui du pentédécagone régulier, c'est-à-dire

$$3x - x^3 = \sqrt{3}$$

et

$$3x - x^3 = \sqrt{\ }.\,1\frac{3}{4} - \sqrt{\frac{5}{16}} - \sqrt{\ }.\,1\frac{7}{8} - \sqrt{\frac{45}{64}}$$

Il en fait un exercice d'algèbre pure, sans laisser soupçonner l'origine ni le but des équations elles-mêmes. Si elles donnent en réalité des côtés de polygones réguliers, Romain a soin de ne pas souffler un mot qui puisse le faire soupçonner. Il était dans ses habitudes de s'entourer ainsi de mystère. En ne dévoilant pas du premier coup toute sa pensée, il croyait prendre une attitude d'homme profond. On se le rappelle, c'est dans des circonstances analogues, avec les mêmes restrictions mentales, qu'il présenta « aux savants du monde entier » son équation du 45e degré.

Au reçu de ces équations van Ceulen les résout, sans s'enquérir de leur provenance. C'est le premier temps.

Deuxième temps : Romain demande à van Ceulen de lui calculer C_9 et C_{45} par l'algèbre. Van Ceulen n'y réussit pas par la méthode indiquée, mais il y arrive par l'emploi de l'un ou l'autre des procédés en usage chez les constructeurs de tables de lignes trigonométriques naturelles.

Troisième temps : Romain découvre enfin à van Ceulen le *but visé* par les équations dont il lui demandait la solution.

Mais, remarquons-le bien, je dis le *but visé* et rien de plus ; car, nous le verrons tantôt, il lui cèle encore par quelles considérations géométriques il obtenait les équations elles-mêmes.

Continuons notre lecture :

« Dans une autre circonstance, dit Ludolphe (1), Romain me demanda de résoudre les équations suivantes :

---

(1) *Circkel*, cap. XIV, f° 16v° et 17 r°.

$$9x - 30x^3 + 27x^5 - 9x^7 + x^9 = \sqrt{3}$$

et

$$7x - 14x^3 + 7x^5 - x^7 = 2.$$

» J'arrivai à grand' peine à déterminer x, car j'ignorais la destination de ces équations. »

Ces équations donnent respectivement C_{27} et C_{14}. Mais au point de vue de la solution, quel intérêt van Ceulen avait-il à le savoir ?

C'est ce que je vais tâcher de faire comprendre.

Nous ne connaissons pas, il est vrai, avec certitude la manière dont van Ceulen résolvait les équations numériques d'un degré supérieur au second. Chaque fois qu'il en parle, il renvoie à son grand *Traité d'algèbre*. N'importe, on peut deviner les grandes lignes de la méthode. Elle reposait évidemment sur ce principe fondamental de la résolution des équations numériques : quand deux valeurs substituées à l'inconnue font prendre au premier membre de l'équation égalé à zéro des signes contraires, elles comprennent au moins une racine de la proposée. C'était une méthode par tâtonnements.

Ceci admis, l'art du calculateur consistait à conduire rapidement les essais successifs. Or quand van Ceulen savait qu'une équation avait pour but la détermination d'une section angulaire, il connaissait d'avance une valeur approchée de l'inconnue. L'ouverture d'une table de sinus naturels suffisait pour la lui apprendre. Au fond, c'est tout ce que Viète se contenta de faire pour résoudre l'équation du 45^e degré de Romain. Cette valeur connue, van Ceulen essayait si elle vérifiait l'équation ; c'était souvent le cas ; que s'il y avait une correction à faire, elle portait tout au plus sur les derniers chiffres.

Mais si l'approximation des tables était insuffisante ?

Eh bien ! encore y avait-il avantage à connaître le but de l'équation.

Sans doute, van Ceulen ne le dit pas en termes exprès, mais la chose ressort de ses réflexions, le calcul d'une corde est, d'après lui, bien plus facile par l'application des théorèmes de Ptolémée et quelques autres du même genre, que par la résolution des équations.

Une équation de section angulaire étant donnée, la méthode naturelle pour en déterminer l'inconnue était donc la suivante :

On calculait au préalable, avec l'exactitude exigée, la valeur de la corde ; après quoi, on essayait si elle vérifiait l'équation. Au surplus cette équation jouait ainsi la plupart du temps son véritable rôle, celui de servir de simple preuve des opérations.

Terminons ce sujet :

Van Ceulen obtient pour solution de nos deux équations (¹),

$$0{,}232\,185\,828\,250\,46 < C_{27} < 0{,}232\,185\,828\,250\,47$$

et

$$0{,}445\,041\,867\,912\,62 < C_{14} < 0{,}445\,041\,867\,912\,63.$$

V

Viennent maintenant des exercices d'un genre un peu différent.

« Plus tard, dit Ludolphe (²), je reçus (d'Adrien Romain) ce problème très difficile. Résoudre

$$\begin{gathered}225x^2 - 4200x^4 + 30940x^6 - 119340x^8 + 277134x^{10} - \\ - 419900x^{12} + 436050x^{14} - 319770x^{16} + 168245x^{18} - 63756x^{20} + \\ + 17250x^{22} - 3250x^{24} + 405x^{26} - 30x^{28} + x^{30} = \\ = 1\frac{3}{4} - \sqrt{\frac{5}{15}} + \sqrt{\cdot\, 1\frac{7}{8} - \sqrt{\frac{45}{64}}}.\end{gathered}$$

» J'extrayai la racine carrée des deux membres et je trouvai

$$\begin{gathered}15x - 140x^3 + 378x^5 - 450x^7 + 275x^9 - 90x^{11} + 15x^{13} - x^{15} = \\ = 0{,}445\,823\,381\,635\,518\,674\,203\,484\,568\,810\,250\,33\end{gathered}$$

» d'où

$$0{,}027\,924\,360\,678\,290 < x < 0{,}027\,924\,360\,678\,291. »$$

(¹) *Circkel*, cap. XIV, fº 16 vº. Mais fº 19 vº, il a pour C_{27} par défaut

$$C_{27} = 232\,185\,828\,504\,60$$

Les deux autres éditions ont la même discordance.

(²) *Circkel*, cap. XIV, fº 16 vº.

En 1596, réussir à résoudre une pareille équation devait sembler tenir du prodige !

Ne le perdons pas de vue, le *Traité de la résolution des équations numériques* (¹) par Viète vit le jour en 1600 seulement. Comprend-on dès lors l'admiration d'Adrien Romain pour son ami van Ceulen ?

Quant à la question proposée elle-même, Romain la pose mal. Son équation donne C_{225}. Elle mérite donc tous les reproches adressés par Viète à la tapageuse équation du 45ᵉ degré. Pourquoi, par exemple, une équation du 30ᵉ degré, quand une équation du 15ᵉ degré suffisait évidemment ? Pourquoi même cette équation du 15ᵉ degré ? N'arrivait-on pas bien plus rapidement au résultat par une équation cubique et une équation du 5ᵉ degré ?

Mais je n'insiste pas ; c'est van Ceulen que j'étudie.

Cette équation du 30ᵉ degré est suivie d'un exercice non moins remarquable. Van Ceulen l'appelle lui-même « une question bien belle » (²). La voici en notations modernes :

Déterminer, à $\frac{1}{10^{24}}$ près, les neuf nombres A, B, C, D, E, F, G, H, I par les équations suivantes :

A par $x = \sqrt{3}$
B » $3x - x^3 = A$
C » $5x - 5x^3 + x^5 = A$
D » $3x - x^3 = B$
E » $3x - x^3 = C$
F » $5x - 5x^3 + x^5 = C$
G » $3x - x^3 = E$ ou par $5x - 5x^3 + x^5 = D$
H » $3x - x^3 = F$ ou par $5x - 5x^3 + x^5 = E$
I » $3x - x^3 = H$ ou par $5x - 5x^3 + x^5 = F$

Pour interpréter la signification géométrique de ce système d'équations, il suffit de le retranscrire avec d'autres notations. Il vient

---

(¹) *De Nvmerosa Potestatvm Ad Exegesim Resolvtione. Ex Opere restitutae Mathematicae Analyseos, seu Algebra nouâ Francisci Vietae. Parisiis, Excudebat David Le Clerc. Anno 1600* (Bibliothèque Royale de Belgique, V. 4908).

(²) *Circkel*, cap. XIV, ffº 16 vº et 17 rº.

$$\begin{gathered}
C_3 = \sqrt{3} \\
3C_9 - {C^3}_9 = C_3 \\
5C_{15} - 5{C^3}_{15} + {C^5}_{15} = C_3 \\
3C_{27} - {C^3}_{27} = C_9 \\
3C_{45} - {C^3}_{45} = C_{15} \\
5C_{75} - 5{C^3}_{75} + {C^5}_{75} = C_{15} \\
3C_{135} - {C^3}_{135} = C_{45} \quad \text{ou} \quad 5C_{135} - 5{C^3}_{135} + {C^5}_{135} = C_{27} \\
3C_{225} - {C^3}_{225} = C_{75} \quad \text{ou} \quad 5C_{225} - 5{C^3}_{225} + {C^5}_{225} = C_{45} \\
3C_{675} - {C^3}_{675} = C_{225} \quad \text{ou} \quad 5C_{675} - {5^3}_{675} + {C^5}_{675} = C_{135}.
\end{gathered}$$

« Étant donnée l'approximation exigée, continue Ludolphe (¹), répondre à cette question me parut en vérité par trop difficile. J'écrivis donc (à Romain) et je lui promis de lui envoyer le plus tôt possible les solutions, c'est-à-dire les côtés des figures, calculés à une unité près au diamètre $2 \,.\, 10^{24}$; ce qui fut fait.

» Mais il me vint alors une si grande envie de connaître les valeurs des inconnues avec l'approximation demandée, c'est-à-dire à une unité près au diamètre $2 \,.\, 10^{24}$, et j'y pris un tel plaisir, que, sans reculer devant l'immensité du labeur, remettant à plus tard tous les travaux dont j'étais chargé, je ne m'accordai aucun repos avant d'avoir atteint, avec l'aide de Dieu, ce qu'on désirait de moi.

» J'envoyai le résultat au susdit Adrien. Vous le trouverez ci-dessous. »

J'en fais grâce au lecteur.

VI

La nouveauté des démonstrations de van Ceulen le rend ici de plus en plus intéressant.

« Toutes ces belles questions, dit-il (²), (il s'agit de celles des §§ IV et V, ci-dessus) m'invitèrent à chercher comment on les trouvait. Je « préparai » à cet effet la figure ci-contre (fig. 4).

» Soit DC le côté du triangle (équilatéral) et EF celui de l'ennéa-

---

(¹) *Circkel*, cap. XIV, f° 17 r°.
(²) *Circkel*, cap. XIV, f° 17 r° et v°.

gone (régulier) inscrits dans le cercle dont le diamètre vaut 2. Par conséquent

$$DC = \sqrt{3}.$$

» Posons

$$EF = FC = GH = x.$$

» Donc

$$HC = \sqrt{\frac{3}{4}} - \frac{1}{2}x \quad \text{et} \quad HD = \sqrt{\frac{3}{4}} + \frac{1}{2}x.$$

» D'après la 47^e^ proposition du 1^er^ livre d'Euclide

$$HC^2 + HF^2 = FC^2.$$

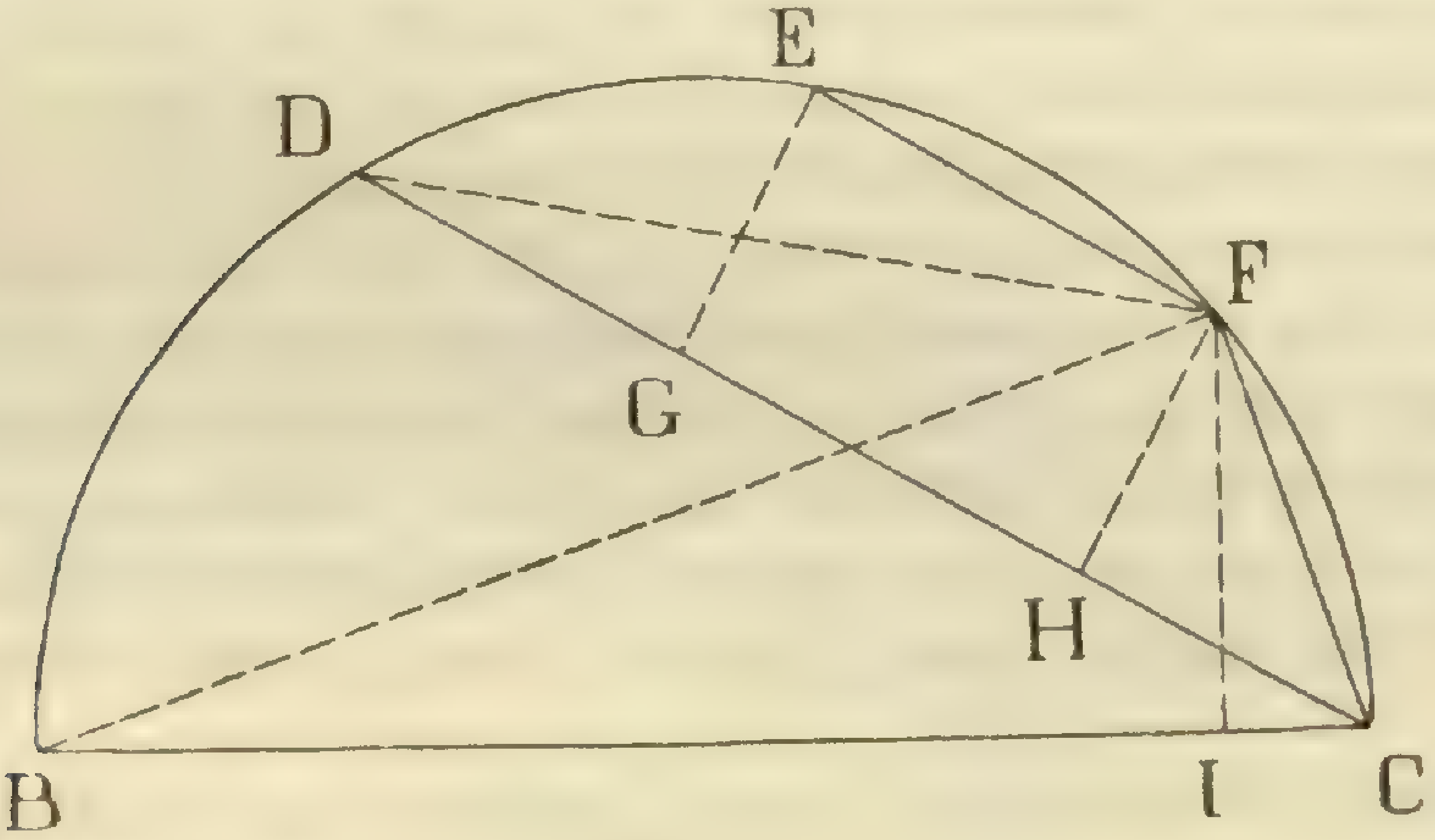


Fig. 4.

» Donc si nous retranchons

$$HC^2 = \frac{3}{4} - \sqrt{\frac{3}{4}x^2} + \frac{1}{4}x^2$$

de

$$FC^2 = x^2,$$

il restera

$$HF^2 = \frac{3}{4}x^2 + \sqrt{\frac{3}{4}x^2} - \frac{3}{4}.$$

» Or

$$HD^2 = \sqrt{\frac{3}{4}x^2} + \frac{3}{4} + \frac{1}{4}x^2.$$

» Additionnant ces deux carrés on obtient (d'après le théorème cité) la valeur de DF^2. Additionnant donc et extrayant la racine carrée de la somme, il vient :

$$DF = \sqrt{x^2 + \sqrt{3x^2}}.$$

» De plus la perpendiculaire

$$FI = \frac{1}{2} DF,$$

car

$$\text{arc DEF} = 2 \text{ arc FC}.$$

» Or

$$BF = \sqrt{CB^2 - FC^2} = \sqrt{4 - x^2}.$$

» Mais d'après la 8ᵉ proposition du 6ᵉ livre d'Euclide

$$\frac{\text{CB ou } 2}{\text{BF ou } \sqrt{4 - x^2}} = \frac{\text{FC ou } x}{\text{FI}}$$

d'où

$$FI = \frac{\sqrt{4x^2 - x^4}}{2}.$$

» En multipliant ce résultat par 2 on trouve

$$DF = \sqrt{4x^2 - x^4}.$$

» Mais on a obtenu ci-dessus

$$DF = \sqrt{4x^2 + \sqrt{3x^2}}.$$

» Élevant de part et d'autre au carré

$$4x^2 - x^4 = x^2 + \sqrt{3x^2},$$

» c'est-à-dire

$$3x^2 - x^4 = \sqrt{3x^2}.$$

» Divisant les deux membres par x, il vient

$$3x - x^3 = \sqrt{3}.$$

» D'où x est plus grand que

0,684 040 286 651 337 466 088 199 229 364 518 et si on remplaçait le dernier chiffre 8 par 9, le nombre serait plus grand que le côté de l'ennéagone. »

Faut-il insister sur la singulière importance de cette démonstration dans l'histoire de la Trigonométrie ?

Sans doute Viète a trouvé les formules déterminant la largeur des cordes des sections angulaires (¹). Mais von Braunmühl le remarque excellemment (²), si le géomètre français nous donne l'expression de ces formules, il ne nous dit pas comment il les obtient. Dans sa *Réponse au problème d'Adrien Romain*, il est muet sur le sujet. Quant aux démonstrations qu'on lit dans ses *Théorèmes sur les sections angulaires* (³), elles ne sont pas de lui, mais de son éditeur Anderson. Ensuite elles furent publiées en 1615 seulement. Or, encore une fois, le *Traité du cercle* est de 1596 ; donc de 19 ans antérieur.

Il ne faut pas voir, notons-le bien, dans le théorème de van Ceulen une proposition applicable au seul cas particulier du côté de l'ennéagone régulier déduit de celui du triangle équilatéral. L'auteur prend soin de nous avertir que sa formule est générale :

«Soit à chercher, dit-il (⁴), la corde du tiers d'un arc sous-tendu par une corde connue. Si je représente le plus petit côté par x, il vient toujours

$$3x - x^3 = \text{la corde connue.}$$

« Item, ajoute-t-il (⁵), si je représente par x une corde, et si la corde de l'arc quintuple m'est connue, il vient toujours

---

(¹) Il les a données pour la première fois dans sa *Réponse au problème d'A. Romain, passim.*

(²) *Vorlesungen ueber Geschichte der Trigonometrie*, t. I, p. 167.

(³) Je n'ai pas eu en mains l'édition originale. D'après Frédéric Ritter (*François Viète inventeur de l'algèbre moderne 1540-1603. Essai sur sa vie et ses œuvres.* LA REVUE OCCIDENTALE, PHILOSOPHIQUE, SOCIALE ET POLITIQUE, 2ᵉ sér., t. X, Paris, 1895, p. 406) elle est intitulée : *Ad angularium sectionum analyticen theoremata a Fr. Vieta excogitata et demonstrata, confirmata ab M. Andersonio. Paris, 1615.* — Elle est rééditée dans : *Francisci Vietae Opera Mathematica... Lvgdvni Batavorum, Ex Officinâ Bonaventurae & Abrahami Elzeviriorum. CIↃ.IↃCXLVI*, pp. 286-304.

(⁴) *Circkel*, cap. XIV, f° 17 v°. « Item so ick voor den cleynste syde sette x, comt altijdt $3x - x^3$ ghelijck de bekende syde. »

(⁵) *Circkel*, cap. XIV, f° 17 v°. « Item als ick sette x voor eenen syde, ende my bekent een syde : eenen boghe vijfmael soo groot, sal altijt comen $5x - 5x^3 + x^5$ gelijck aen de bekende. »

$$5x - 5x^3 + x^5 = \text{la corde connue.}$$

» On trouvera d'une manière analogue les cordes de 1/6, 1/7, 1/8, 1/9, 1/11, 1/13, 1/14, 1/17, etc. de l'arc sous-tendu par une corde connue. Mais les équations deviennent étonnamment grandes ; vous le verrez ci-dessous. Suivent d'autres méthodes, pour déterminer par l'algèbre les cordes précédentes et d'autres encore. »

VII

Quelles sont ces nouvelles méthodes ? Avant de les faire connaître, il nous faut dire comment van Ceulen fut conduit à les imaginer.

Il était au plus fort de sa correspondance avec Adrien Romain. Le professeur de Wurzbourg s'absorbait alors dans la construction de grandes tables de lignes trigonométriques naturelles calculées au rayon 10^9 (¹). Malheureusement, il se laissa prévenir par l'*Opus palatinum* (²) de Rhéticus et semble dès lors avoir renoncé à achever ses tables ou du moins à les publier.

Mais l'*Opus palatinum* est de 1596, l'année même du *Traité du cercle*. Au moment qui nous occupe, il n'a donc pas encore paru. Adrien Romain est en plein travail et van Ceulen saisit toutes les circonstances pour obliger son ami.

(¹) *Circkel*, cap. VII, f° 6 r°.

(²) *Opus palatinum de Triangulis A Georgio Ioachimo Rhetico coeptum : L. Valentinus Otho Principis Palatini Fredirici IV. electoris mathematicvs consummavit. An. Sal. hum. CIƆ.IƆ.XCVI.* — A la dernière page : *Neostadii in Palatinatv. Excudebat Mathaeus Harnisius. Anno Salutis CIƆ.IƆ.XCVI* (Université de Louvain. Scienc., 215).

(³) Pour trouver C_{45}, Romain demandait même de résoudre

$$3x - x^3 = \surd.\ 1\frac{3}{4} - \sqrt{\frac{5}{16}} - \surd.\ 1\frac{7}{8} - \sqrt{\frac{45}{64}}$$

en déterminant x à $\frac{1}{10^{36}}$. Van Ceulen obtient :

$$x = 0{,}139\,512\,947\,488\,250\,601\,551\,917\,670\,388\,286\,657.$$

par défaut. « En remplaçant le dernier chiffre 7 par 8, dit-il, la valeur de x serait obtenue par excès » *(Circkel*, cap. XIV, f° 18 v°).

Pour plusieurs autres équations, l'approximation du calcul de x est poussée aussi bien au delà de $\frac{1}{10^{14}}$.

Dans un but de vérification et de contrôle, Romain avait prié Ludolphe de lui calculer, à une unité près au rayon 10^{14}, les côtés de tous les polygones réguliers inscrits au cercle depuis le triangle jusqu'au polygone de 80 sommets. Il lui imposait, en outre, la méthode ; ce travail devait se faire par l'algèbre.

Van Ceulen s'exécuta, mais au prix de quel labeur ! « Immani labore » s'écrie Willebrord Snellius (¹). L'expression est intraduisible.

Avant de passer outre, il importe de mettre sous les yeux le tableau des équations de van Ceulen (²).

Je le donne au complet. La grande nouveauté des résultats, la forme extrêmement curieuse et souvent tout à fait inattendue des équations m'y décident.

Le lecteur, je l'espère, m'en saura gré.

Pour l'intelligence du tableau, quelques observations sont nécessaires.

L'inconnue de chacune des équations fournit immédiatement C_n pour une valeur numérique de n. Mais C_n étant ainsi calculé pour une première valeur de n, van Ceulen en déduit souvent C_n pour plusieurs autres valeurs de l'indice.

Étant donnée une équation, j'écris en tête quel est le côté C_n représenté immédiatement par x ; en queue, j'indique quels sont les autres côtés C_n calculés au moyen du premier.

Exemple : soit

$$C_{38}\left\{\begin{array}{c} 5x - 5x^3 + x^5 = \sqrt{.2 - \sqrt{.2 - x}} \\ 9x - 30x^3 + 27x^5 - 9x^7 + x^9 = \\ = \sqrt{.2 - x} \end{array}\right\} \text{d'où } C_{19},\ C_{57},\ C_{76}.$$

L'inconnue de chacune des équations vaut C_{38}, côté du polygone de 38 sommets. Par C_{38} on obtient C_{19}, C_{57}, C_{76}.

Ce dernier genre de calcul (disons-le, puisque l'occasion s'en présente) n'avait aucune difficulté. Pour C_{19} van Ceulen appliquait

$$crd\,\frac{1}{2}\,A = \sqrt{2 - crd(\pi - A)}\ ;$$

(¹) ***Cyclometricus***, p. 82.

(²) *Circkel*, cap. XIV et XV, ff° 17 v°—21 r°. Toutes les équations y sont données explicitement.

quant à C_{76} et C_{57} il les obtenait par

$$crd 2A = 2 crd A crd(\pi - A)$$

et

$$crd(A + B) = crd A crd(\pi - B) + crd B crd (\pi - A).$$

Ces formules étaient classiques depuis Ptolémée (¹).

Van Ceulen ne se proposait pas de calculer C_n au delà de $n = 80$; nous remarquerons cependant dans le tableau des valeurs de n bien plus élevées. Cela provient du moyen détourné par lequel se calcule C_n quand $n = 2k + 1$. Ludolphe commence toujours par déterminer d'abord C_{4k+2}. Il y est obligé, nous le verrons, à cause de la construction géométrique, par laquelle il trouve ses équations. Elle exige essentiellement, en effet, que le nombre des sommets du polygone soit pair.

Ceci dit, voici le tableau ; les équations se suivent dans l'ordre où elles se lisent dans le *Traité du cercle*.

$$C_{18}\left\{\begin{array}{c} 3x - x^3 = 1 \\ x = \surd.2 - \surd.2 + \surd.2 + x \end{array}\right\} \text{d'où } C_9.$$

$$C_{14}\left\{\begin{array}{c} x = \surd.2 - \surd.2 + \surd.2 - x \\ 3x - x^3 = \surd.2 - x \end{array}\right\} \text{d'où } C_7.$$

$$C_{22}\left\{\begin{array}{c} 3x - x^3 = \surd.2 - \surd.2 - x \\ 5x - 5x^3 + x^5 = \surd.2 - x \end{array}\right\} \text{d'où } C_{11}.$$

$$C_{26} \qquad 3x - x^3 = \surd.2 - \surd.2 + x, \quad \text{d'où } C_{13}, C_{78}, C_{39}, C_{52}.$$

« J'ai réussi, dit l'auteur (²), à trouver (directement) les équations (des côtés) des polygones de 11 et 13 sommets ; mais c'est là chose difficile. Je la réserve pour le moment où j'imprimerai ma

---

(¹) *Claudii Ptolemaei... Syntaxis...* éd. Heiberg, t. I. La formule $crd(A + B)$ est démontrée explicitement pp. 41 et 42. La formule $crd 2A$ s'en déduit immédiatement. Posons

$$A = 2a \qquad \text{et} \qquad B = 2b$$

nous retrouverons les formules classiques

$$\sin 2a = 2 \sin a \cos a$$

et

$$\sin (a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a.$$

(²) *Circkel*, cap. XIV, f° 18 r°.

Géométrie. Alors je ferai connaître aussi l'inscription du polygone de 7 sommets et d'autres encore. Quant aux formules ci-dessus elles sont bien plus faciles à établir. »

Je dirai tantôt, comment van Ceulen s'y prend.

C_{34} $\quad x = \surd.2 - \surd.2 + \surd.2 + \surd.2 + x \quad$ d'où C_{17}, C_{51}, C_{68}.

$$C_{38} \left\{ \begin{array}{c} 5x - 5x^3 + x^5 = \surd.2 - \surd.2 - x \\ 9x - 30x^3 + 27x^5 - 9x^7 + x^9 = \surd.2 - x \end{array} \right\} \text{d'où } C_{19},\ C_{57},\ C_{76}.$$

C_{46} $\quad 3x - x^3 = \surd.2 - \surd.2 + \surd.2 - x \quad$ d'où C_{92}(1),C_{69},C_{23}.

$$C_{25} \qquad 5x - 5x^3 + x^5 = \sqrt{\ 2\frac{1}{2} - \sqrt{1\frac{1}{5}}}\ .$$

C_{27} $\quad 3x - x^3 = C_9$.

C_{58} $\quad 7x - 14x^3 + 7x^5 - x^7 = \surd.2 - \surd.2 + x \quad$ d'où C_{29}.

C_{62} $\quad x = \surd.2 - \surd.2 + \surd.2 + \surd.2 + \surd.2 - x \quad$ d'où C_{31}.

C_{35}. — Il faut partir de C_5 ou de C_7, dit van Ceulen ; mais il ne donne pas explicitement les équations. Elles sont aisées à deviner par le reste du tableau.

$$C_{74} \left\{ \begin{array}{c} 9x - 30x^3 + 27x^5 - 9x^7 + x^9 = \\ = \surd.2 - \surd.2 + x \end{array} \right\} \text{d'où } C_{37}.$$

C_{82} $\quad 5x - 5x^3 + x^5 = \surd.2 - \surd.2 + \surd.2 + x \quad$ d'où C_{41}.

$$C_{86} \left\{ \begin{array}{c} 11x - 55x^3 + 77x^5 - 44x^7 + 11x^9 - \\ - x^{11} = \surd.2 - \surd.2 - x \end{array} \right\} \text{d'où } C_{43}.$$

$$C_{45} \qquad 3x - x^3 = \sqrt{\cdot\ 1\frac{3}{4} = \sqrt{\frac{5}{16}} - \sqrt{\cdot\ 1\frac{7}{8} - \sqrt{\frac{45}{64}}}}\ .$$

C_{94} $\quad 3x - x^3 = \surd.2 - \surd.2 + \surd.2 - x \quad$ d'où C_{47}.

C_{49} $\quad 7x - 14x^3 + 7x^5 - x^7 = C_7$.

$$C_{106} \left\{ \begin{array}{c} 13x - 91x^3 + 182x^5 - 156x^7 + 65x^9 - \\ - 13x^{11} + x^{13} = \surd.2 - \surd.2 + x \end{array} \right\} \text{d'où } C_{53}.$$

C_{55}. — Il faut partir de C_5 ou de C_{11} ; les équations ne sont pas données.

---

(1) Je signale C_{92}, puisqu'il est calculé ici (*Circkel*, cap. XIV, f° 18 v°), mais c'est un hors-d'œuvre, puisque Romain ne demandait C_n que jusqu'à $n = 80$.

C_{57}. — Il faut partir de C_{19} ; l'équation n'est pas donnée.

$$C_{118}\quad \left\{\begin{matrix} 15x-140x^3+378x^5-450x^7+275x^9- \\ -90x^{11}+15x^{13}-x^{15}=\surd .2-\surd .2-x \end{matrix}\right\}\quad \text{d'où } C_{59}.$$

$$C_{122}\quad \left\{\begin{matrix} 15x-140x^3+378x^5-450x^7+275x^9- \\ -90x^{11}+15x^{13}-x^{15}=\surd .2-\surd .2+x \end{matrix}\right\}\quad \text{d'où } C_{61}.$$

C_{63}. — Il faut partir de C_7 ou de C_9 ; les équations ne sont pas données.

$$C_{134}\quad \left\{\begin{matrix} 17x-204x^3+714x^5-1122x^7+935x^9- \\ -422x^{11}+119x^{13}-17x^{15}+x^{17}=\surd .2-\surd .2-x \end{matrix}\right\}\quad \text{d'où } C_{67}.$$

Van Ceulen a résolu cette équation, dit-il [1], « met lust en arbeydt, avec plaisir et grand travail ». Avec plaisir ! Soit, croyons-en l'auteur puisqu'il nous l'affirme ! Mais il était superflu de nous avertir de l'énormité du travail !

$$C_{142}\quad \left\{\begin{matrix} 9x-30x^3+27x^5-9x^7+x^9= \\ =\surd .2-\surd .2+\surd .2-x \end{matrix}\right\}\quad \text{d'où } C_{71}.$$

$$C_{146}\quad \left\{\begin{matrix} 9x-30x^3+27x^5-9x^7+x^9= \\ =\surd .2-\surd .2+\surd .2+x \end{matrix}\right\}\quad \text{d'où } C_{73}.$$

$$C_{75}\quad \left\{\begin{matrix} 5x-5x^3+x^5=\surd\cdot 1\frac{3}{4}-\sqrt{\frac{5}{16}}-\surd\cdot 1\frac{7}{8}-\sqrt{\frac{45}{64}} \\ 3x-x^3=C_{25}. \end{matrix}\right.$$

$$C_{135}\qquad 3x-x^3=C_{45}.$$

Cette équation est un hors-d'œuvre, n étant supérieur à 80, sans devoir servir à déterminer C_n pour $n<80$.

$$C_{135}\quad 5x-5x^3+x^5=\surd .2-\surd .2+\surd .2+\surd .2-x\quad \text{d'où } C_{79}.$$

Les équations précédentes appartiennent toutes au chapitre XIV ; celles qui suivent sont empruntées au chapitre XV ; il est utile de le noter, ce chapitre ayant pour but de montrer les avantages du théorème de Ptolémée sur les équations de degré élevé, dans la détermination de C_n.

---

[1] *Circkel*, cap. XIV, f° 19 r°.

$$C_{77} \quad \left\{ \begin{array}{c} 7x - 14x^3 + 7x^5 - x^7 = C_{11}. \\ 11x - 55x^3 + 77x^5 - 44x^7 + 11x^9 - x^{11} = C_7. \end{array} \right.$$

$$C_{158} \quad 5x - 5x^3 + x^5 = \surd.2 - \surd.2 + \surd.2 + \surd.2 - x \qquad \text{d'où } C_{79}.$$

$$C_{42} \quad \left\{ \begin{array}{c} 5x - 5x^3 + x^5 = \surd.2 - \surd.2 + x \\ 3x - x^3 = C_{14} \end{array} \right\} \quad \text{d'où } C_{21}.$$

$$C_{130} \quad x = \surd.2 - \surd.2 + \surd.2 + \surd.2 + \surd.2 + \surd.2 + x \qquad \text{d'où } C_{65}.$$

C_{65}, ajoute van Ceulen, pourrait encore se calculer de plusieurs autres manières qu'il indique. Mais comme les équations auxquelles ces méthodes conduisent ne sont pas exprimées d'une manière explicite, je n'en parle pas (¹).

Dois-je appeler l'attention sur la singulière originalité des équations précédentes ? Et cependant elles n'ont jamais été publiées même partiellement. A ma connaissance, aucune biographie de van Ceulen ne les signale. Quant aux historiens des mathématiques, nul d'eux ne semble en avoir soupçonné l'existence.

Elles appellent des observations.

En parcourant le tableau, l'œil est d'abord arrêté par une série de seconds membres composés de radicaux de la forme

$$\surd.2 - \surd.2 + \surd.2 + \surd.2 + \ldots$$

et terminés les uns par $\surd.2 - x$, les autres par $\surd.2 + x$.

Voici comment ils sont obtenus. Je résume en langage moderne le raisonnement toujours le même de l'auteur (fig. 5).

Soit un polygone régulier quelconque de $4k + 2$ côtés et AB un diamètre du cercle circonscrit mené par l'un des sommets du polygone, A par exemple. Il y aura $2k + 1$ côtés inscrits dans le demi-cercle ADCB ; de plus, l'un des côtés du polygone, par exemple DC, sera parallèle à AB, et nous pourrons poser :

(¹) Le tableau récapitulant les solutions se trouve *Circkel*, cap. XIV, f° 19 v°.

$$\alpha = \text{arc CB} = k \text{ arc DC}$$
$$\beta = \text{arc AC} = (k+1) \text{ arc DC},$$

les arcs α et β étant évidemment supplémentaires.

Abaissons CF et DE perpendiculairement au diamètre AB. Soit

$$\text{DC} = x,$$

d'où, en supposant le rayon égal à l'unité,

$$\text{BF} = 1 - \frac{1}{2}x\,; \qquad \text{AF} = 1 + \frac{1}{2}x.$$

Or

$$\text{CF}^2 = \text{BF}\,.\,\text{AF} = \left(1 - \frac{1}{2}x\right)\left(1 + \frac{1}{2}x\right) = 1 - \frac{1}{4}x^2$$

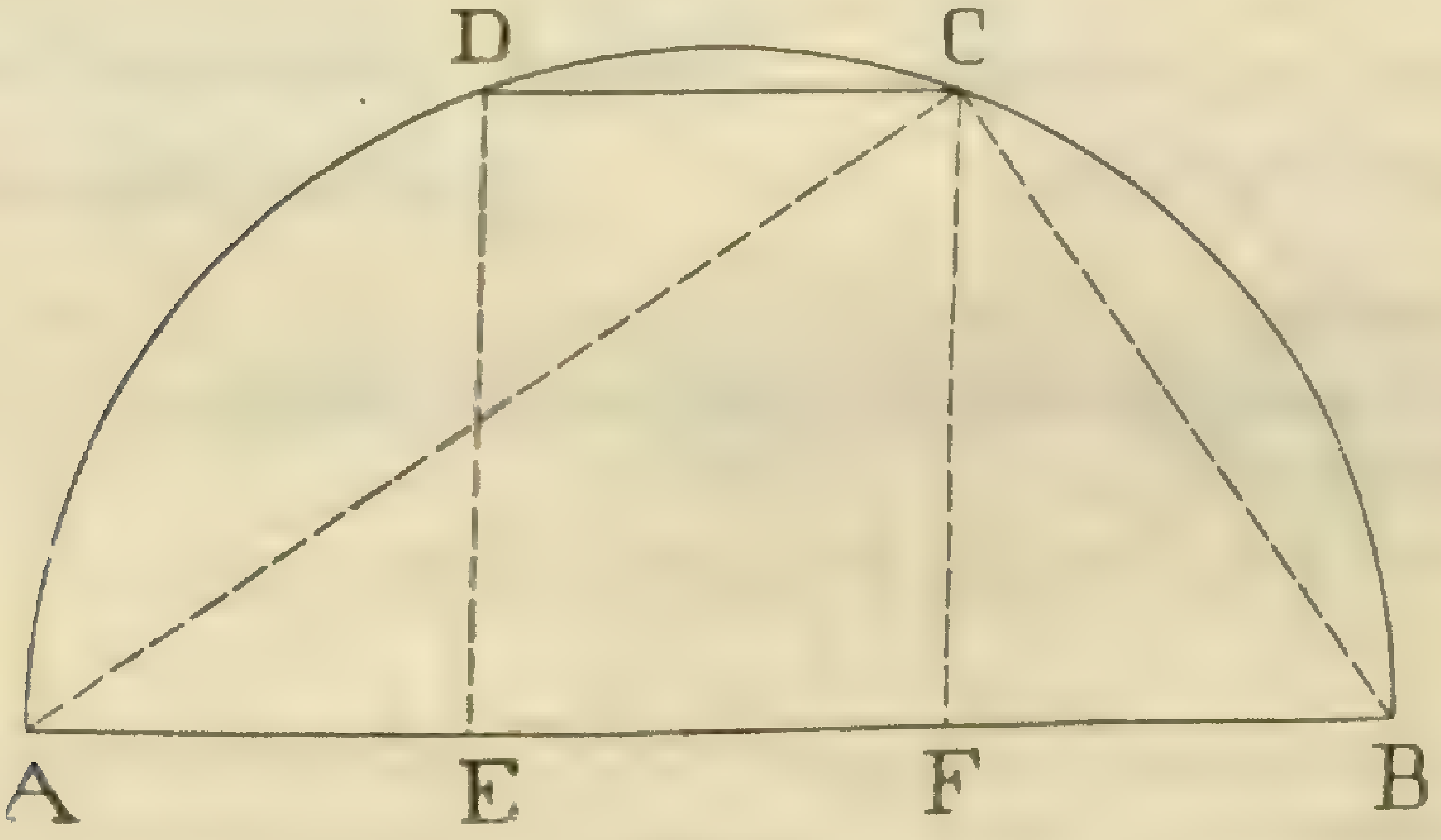


Fig. 5.

Mais

$$crd\,\alpha = \sqrt{\text{BF}^2 + \text{CF}^2} = \sqrt{\left(1 - \frac{1}{2}x\right)^2 + \left(1 - \frac{1}{4}x^2\right)} = \sqrt{2 - x}$$

$$crd\,\beta = \sqrt{\text{AF}^2 + \text{CF}^2} = \sqrt{\left(1 + \frac{1}{2}x\right)^2 + \left(1 - \frac{1}{4}x^2\right)} = \sqrt{2 + x}$$

Appliquons maintenant consécutivement plusieurs fois la formule fondamentale

$$crd\,\frac{1}{2}\text{A} = \sqrt{2 - crd\,(\pi - \text{A})}.$$

En nous rappelant que, par hypothèse, les arcs α et β étant supplémentaires, on a

$$\alpha = \pi - \beta, \qquad \beta = \pi - \alpha$$

nous formerons immédiatement les deux séries :

$$crd\alpha = \surd.2 - x \qquad\qquad crd\beta = \surd.2 + x$$

$$crd\frac{1}{2}\alpha = \surd.2 - \surd.2 + x \qquad\qquad crd\frac{1}{2}\beta = \surd.2 - \surd.2 - x$$

$$crd\frac{1}{4}\alpha = \surd.2 - \surd.2 + \surd.2 + x \qquad\qquad crd\frac{1}{4}\beta = \surd.2 - \surd.2 + \surd.2 - x$$

$$crd\frac{1}{8}\alpha = \surd.2 - \surd.2 + \surd.2 \qquad\qquad crd\frac{1}{8}\beta = \surd.2 - \surd.2 + \surd.2$$
$$+ \surd.2 + x \qquad\qquad + \surd.2 - x$$

$$crd\frac{1}{16}\alpha = \surd.2 - \surd.2 + \surd.2 \qquad\qquad crd\frac{1}{16}\beta = \surd.2 - \surd.2 + \surd.2$$
$$+ \surd.2 + \surd.2 + x \qquad\qquad + \surd.2 + \surd.2 - x$$

et ainsi de suite.

Déduisons-en les premières équations du tableau.

Soit à chercher C_{18}.

Pour $n = 4k + 2 = 18$, on a $k = 4$. Donc

$$\text{arc DC} = \frac{1}{4}\,\text{arc BC} = \frac{1}{4}\alpha\,;$$

par conséquent

$$x = crd\text{DC} = crd\frac{1}{4}\alpha = \surd.2 - \surd.2 + \surd.2 + x.$$

Mais il est plus simple d'appliquer la formule de la trisection au côté de l'hexagone régulier ; d'où

$$3x - x^3 = 1.$$

On obtient bien ainsi les deux équations du tableau (¹).

Soit encore à chercher C_{14}.

Pour $n = 4k + 2 = 14$, on a $k = 3$ et $k + 1 = 4$. D'où

(¹) *Circkel*, cap. XIV, ffᵒ 17 rᵒ et 18 vᵒ.

$$\text{arc DC} = \frac{1}{4}\,\text{arc AC} = \frac{1}{4}\beta\,;$$

en égalant x à *crd* $\frac{1}{4}\beta$, il vient

$$x = \surd.2 - \surd.2 + \surd.2 - x.$$

On aurait pu remarquer aussi que

$$\text{arc DC} = \frac{1}{3}\,\text{arc BC} = \frac{1}{3}\alpha\,;$$

la formule de la trisection donnait alors

$$3x - x^3 = \surd.2 - x.$$

Ce sont de nouveau les deux équations du tableau (¹).

Il n'est évidemment pas toujours possible d'égaler immédiatement à x, *crd* $\frac{\alpha}{2^n}$ ou *crd* $\frac{\beta}{2^n}$.

Nous nous en rendrons compte en considérant C_{22}, par exemple. De $4k + 2 = 22$, on tire $k = 5$ et $k + 1 = 6$. Donc

$$\text{arc DC} = \frac{1}{5}\alpha \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{3}\,\text{arc DC} = \frac{1}{2}\beta.$$

Pour obtenir les équations du tableau (²), nous devrons cette fois appliquer les formules générales de la quintisection et de la trisection ; d'où

$$5x - 5x^3 + x^5 = \surd.2 - x, \qquad 3x - x^3 = \surd.2 - \surd.2 - x.$$

Soit maintenant a une corde donnée. Mettons sous les yeux du lecteur les équations générales donnant les longueurs des cordes de toutes les fractions impaires de l'arc depuis $\frac{1}{3}$ jusqu'à $\frac{1}{17}$; le tableau entier se comprendra sans explications ultérieures. Ces équations sont respectivement

---

(¹) *Circkel*, cap. XIV, f° 17 r° et v°.

(²) *Circkel*, cap. XIV, f° 18 r°.

Pour $\frac{1}{3}$ de l'arc $3x - x^3 = a$

$\frac{1}{5}$ $5x - 5x^3 + x^5 = a$

$\frac{1}{7}$ $7x - 14x^3 + 7x^5 - x^7 = a$

$\frac{1}{9}$ $9x - 30x^3 + 27x^5 - 9x^7 + x^9 = a$

$\frac{1}{11}$ $11x - 55x^3 + 77x^5 - 44x^7 + 11x^9 - x^{11} = a$

$\frac{1}{13}$ $13x - 91x^3 + 182x^5 - 156x^7 + 65x^9 - 13x^{11} + x^{13} = a$

$\frac{1}{15}$ $15x - 140x^3 + 378x^5 - 450x^7 + 275x^9 - 90x^{11} + 15x^{13} - x^{15} = a$

$\frac{1}{17}$ $17x - 204x^3 + 714x^5 - 1122x^7 + 935x^9 - 442x^{11} + 119x^{13} - 17x^{15} + x^{17} = a$

Il est assez intéressant de l'observer en passant, toutes ces formules sont restées classiques, mais sous une forme différente.

Soit, en effet, 2A l'arc sous-tendu par la corde A. On peut poser

$$a = 2 \sin A$$

et

$$x = 2 \sin \frac{A}{2k+1}$$

avec $k = 1, 2, 3, \ldots 8$, d'après le numéro d'ordre des équations précédentes. Substituant, il vient

$$3 \sin \frac{1}{3} A - 4 \sin^3 \frac{1}{3} A = \sin A$$

$$5 \sin \frac{1}{5} A - 20 \sin^3 \frac{1}{5} A + 16 \sin^5 \frac{1}{5} A = \sin A$$

$$7 \sin \frac{1}{7} A - 56 \sin^3 \frac{1}{7} A + 112 \sin^5 \frac{1}{7} A - 64 \sin^7 \frac{1}{7} A = \sin A$$

et autres expressions analogues que l'on trouve encore dans nos traités de trigonométrie.

Snellius, malgré son admiration pour van Ceulen, ne peut retenir ici quelques critiques.

Viète, dans sa *Réponse à Adrien Romain*, dit-il (¹), a donné des formules plus simples que les précédentes, savoir :

(¹) *De Circulo*, 2ᵉ partie, p. 49.

$$2 - x^2 = crd(\pi - A)$$
$$3x - x^3 = crd A$$
$$2 - 4x^2 + x^4 = crd(\pi - A)$$
$$5x - 5x^3 + x^5 = crd A$$
$$2 - 9x^2 + 6x^4 - x^6 = crd(\pi - A)$$
$$7x - 14x^3 + 7x^5 - x^7 = crd A$$
$$2 - 16x^2 + 20x^4 - 8x^6 + x^8 = crd(\pi - A)$$
$$9x - 30x^3 + 27x^5 - 9x^7 + x^9 = crd A$$
$$2 - 25x^2 + 50x^4 - 35x^6 + 10x^8 - x^{10} = crd(\pi - A)$$
$$11x - 55x^3 + 77x^5 - 44x^7 + 11x^9 - x^{11} = crd A$$

La remarque est juste, mais n'en exagérons pas l'importance et surtout n'allons pas y soupçonner une accusation de plagiat.

Quand van Ceulen publia son *Traité du cercle*, la *Réponse de Viète à Adrien Romain* venait à peine de paraître (¹). Ludolphe ne la connaissait certainement pas. Ce sont, au contraire, des indiscrétions commises sur les découvertes de ce dernier, qui décidèrent Viète à prendre les devants et à imprimer sa *Réponse*.

Viète et van Ceulen n'étaient pas en relations directes, mais ils avaient un chaud ami commun, Adrien Romain. Le géomètre français apprit par son intermédiaire que van Ceulen avait résolu l'équation du 45ᵉ degré et préparait un travail sur les sections angulaires. Cédant alors aux pressantes instances de Pierre Aléaume, avocat au Parlement de Paris (²), qui lui reproche de laisser ravir par des Belges (entendez par van Ceulen) une gloire qui revenait de droit à la France, il se décide enfin à mettre au jour sa *Réponse*. Aucun doute n'est donc possible : les deux savants ont fait leurs immortelles découvertes indépendamment l'un de l'autre !

VIII

Je puis désormais être bref. Les deux dernières parties du *Traité du cercle*, j'entends les Tables de lignes trigonométriques

---

(¹) Elle est de 1595. Voir le titre complet, ci-dessus.

(²) L'importante lettre de Pierre Aléaume à Viète est donnée en appendice dans l'édition originale de la *Réponse à Adrien Romain*. Elle n'a pas été repronaturelles (¹) et les Tables d'intérêt sont d'importance relativement secondaire. Leurs introductions et les nombreux exercices proposés en exemples contiennent, il est vrai, beaucoup de solutions ingénieuses, mais on y chercherait vainement les brillantes découvertes qui jettent tant de lustre sur les premières parties.

Les Tables de lignes trigonométriques sont calculées au rayon 10^7. On a déjà, dit van Ceulen (²), des tables analogues dues à Régiomontan, Rheinhold, Rhéticus, Clavius et van Lansberge (³). Pourquoi en éditer de nouvelles ?

C'est, répond-il, que toutes ces tables ont le même inconvénient : leur procédé de construction, leur mode d'emploi et leurs applications sont écrits en latin. Or, le latin, les maîtres arpenteurs hollandais ne le comprennent pas. C'est à leur intention qu'il publie en flamand ces nouvelles tables.

Les exercices donnés en exemple sont très nombreux et les réponses, à de rares exceptions près, toujours développées au long. Elles se distinguent de celles des recueils analogues par le petit nombre de formules employées par l'auteur ; la loi du sinus et quelques autres très simples, c'est tout.

A propos de ses Tables d'intérêt, Ludolphe soulève une réclamation de priorité assez surprenante.

C'était, dit-il (⁴), pendant une de ses leçons d'escrime. Son élève lui posa un problème d'escompte fort difficile. Copie lui en ayant été laissée, il n'eut pas de cesse avant de l'avoir résolu. Cela lui parut d'abord impossible, mais il y réussit enfin en construisant des tables d'intérêt. « En vérité je puis le dire, ajoute-t-il, (Dieu seul en ait la gloire !) personne avant moi n'avait fait connaître

---

duite dans les *Francisci Vietae Opera*, publiés à Leyde, en 1646, par les Elzevier.

(¹) *Circkel*, cap. XVII-XXII, fº 25 rº—72 rº.

(²) *Circkel*, cap. XVI, fol 25 rº.

(³) J'ai donné des renseignements sur ses tables dans mon édition du *Traité des sinus de Michiel Coignet* (Ann. de la Soc. scient., t. XXV, Bruxelles 1901 ; pp. 67-69). Les tables de Rhéticus auxquelles van Ceulen fait ici allusion ne sont pas celles de l'*Opus palatinum*, mais celles du *Canon doctrinae triangulorum. Nunc primum a Georgio Ioachimo Rhaetico in lucem editus. Lipsiae, Wolfgang Gunter, 1551.*

(⁴) *Circkel*, Van Interest, fº 97 vº.

les tables d'intérêt quand je les imaginai pour résoudre cette question. »

Au premier moment cette prétention étonne. Les plus anciennes tables d'intérêt parurent dans l'*Arithmétique* de Jean Trenchant, dont l'édition *princeps* est de Lyon 1558 (1). Mais n'insistons pas ; van Ceulen n'est pas un érudit, il a pu ignorer Jean Trenchant. Pouvait-il ignorer de même les *Tables* de Stevin, publiées séparément en flamand, en 1582 (2) ; rééditées, en français, dans son *Arithmétique* en 1585 (3) ?

Van Ceulen et Stevin, non seulement se connaissaient, mais étaient en relations suivies, pour ne pas dire intimes : A preuve d'abord ce passage servant de postface à l'*Arithmétique* du géomètre brugeois (4) :

« Attendez aussi avec moi et cela de bref les œuvres mathématiques que divulguera nostre tres familier M^{tre} Ludolf van Collen ; personnage certes (si je puis juger par les expériences de nos continuelles communications, en l'algèbre, incommensurables grandeurs, centre de gravité et autre semblable estouffe) tant exercé en ceste discipline, et principalement en l'algèbre, que ses escripts ne prouffiteront pas seulement aux apprentifs, mais donneront aussi contentement aux doctes. »

A preuve encore cette « Note » finale de l'*Appendice algebraique* de 1594 (5) :

---

(1) *L'Arithmetique, departie en troys livres ; ensemble vn petit discours des changes, avec l'art de calculer aux getons. Lyon. 1558.* — J'ai donné une note sur l'*Arithmétique* de Jean Trenchant dans les ANNALES DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE, t. XXXIII, 1909, 1re part., pp. 184-192.

(2) *Tafelen van Interest, Midtsgaders De Constructie der Seluer, ghecalculeert Door Simon Steuin Brugghelinck. t'Antwerpen. By Christoffel Plantyn in den gulden Passer. M.D.LXXXII.* (Je connais, dans les bibliothèques belges trois exemplaires de ce rarissime opuscule : Bibl. Roy. de Belgique, 5e class., I, f. 1. a, Stev. ; Univ. de Gand. Acc. 10967 ; Bibl. Plantin à Anvers, A. 823).

(3) *L'Arithmetique de Simon Stevin de Brvges... A Leyde. De l'Imprimerie de Christophle Plantin. CIC. IↃ.LXXXV* ; *La Pratique d'Arithmétique*, pp. 47-121 (Bibl. Royale de Belgique, II, 13721).

(4) *L'Arithmétique*, p. 201. Le passage n'est pas reproduit dans les *Œuvres de Stevin*, publiées à Leyde, chez les Elzevier en 1634.

(5) *Appendice Algebraiqve de Simon Stevin de Bruges, contenant règle générale de toutes Équations, 1594* (Univ. de Louvain, Scienc., 587).

« Mon especial et familier ami, maistre Ludolf van Collen, m'a dict d'avoir aussi inventé une manière générale des équations ; voire il l'a prouvé en effet par certaines questions solvées ; laquelle solution il a promis de divulguer. »

Et cependant van Ceulen est trop modeste, trop sincère pour ne pas le croire sur parole ; aussi bien n'y a-t-il pas de raison vraiment sérieuse pour la révoquer en doute.

Quand, en 1596, Ludolphe publia son *Traité du cercle*, il n'avait pas moins de 56 ans. Beaucoup des problèmes du *Traité* dataient de la jeunesse de l'auteur ; ils étaient donc relativement assez anciens. Cela aura été notamment le cas pour les Tables d'intérêt. L'idée en était fort simple ; elle peut très bien être venue à Ludolphe par ses propres réflexions. J'ai même un argument positif pour le croire. Le problème N° 130 de ses Tables d'intérêt lui avait été proposé, dit-il (1), 21 ans auparavant (donc en 1575, avant la publication des *Tables* de Stevin). Or il résolut à l'aide de tables d'intérêt calculées au denier 16. Au surplus, van Ceulen, nous l'avons vu, a eu des intuitions bien autrement originales. Quant à construire les tables, une fois leur idée éclose, c'était pour lui simple jeu.

IX

Résumons cette étude.

Le calcul de π a de prime abord donné au *Traité du cercle* la plus grande célébrité. En Allemagne, il valut même à la valeur approchée de π exprimée en fraction décimale le nom de « Ludolphische Zahl », nombre de Ludolphe. Il y a là un légitime hommage rendu à la mémoire d'un compatriote.

Mais le *Traité du cercle* mérite encore notre admiration à des titres bien différents :

Nous y trouvons d'abord une curieuse méthode de division abrégée. C'est le plus ancien exemple imprimé connu de ce genre d'opérations. Chose étrange, il n'avait guère été remarqué.

Ensuite, dans la théorie des sections angulaires, on peut hardiment mettre van Ceulen en parallèle avec Viète, à condition de considérer, à l'exemple d'Adrien Romain, les deux savants sous des aspects différents. Or sous l'un d'eux au moins le géomètre d'Hildesheim a un avantage marqué sur celui de Fontenay-le-Comte. Il démontre les équations des sections angulaires ; Viète, au contraire, se contente de les écrire en affirmant leur exactitude.

---

(1) *Circkel*, f° 104 v°.

Que dire enfin de l'habileté du calculateur ? Dans la résolution des équations numériques d'un degré supérieur au second, Ludolphe déploie une virtuosité déconcertante, un talent de chiffreur invraisemblable au XVI^e siècle.

Tels sont quelques-uns des mérites du *Traité du cercle*. Chacun d'eux suffirait à en faire un ouvrage marquant dans l'histoire de la science.

Quant à Ludolphe van Ceulen lui-même, ce petit maître d'armes si sympathique, cet autodidacte prestigieux, il faut le reconnaître : ce fut, malgré son manque d'érudition, un vrai génie, dont la ténacité au travail fit un savant de premier ordre !

J'espère l'avoir montré.

CONTRIBUTION A LA FAUNE DES DIPTÈRES

DU

COPAL RÉCENT DE ZANZIBAR, DE MADAGASCAR ET D'ACCRA

par Fernand MEUNIER
Conservateur du Musée d'histoire naturelle
de la Société Royale de Zoologie d'Anvers

L'étude des diptères africains a fait de rapides progrès depuis la publication des minutieuses recherches de M. le Prof. M. Bezzi de Padoue (1).

Parmi divers envois d'insectes du copal de la collection de M. Evers junior de Altona-Bahrenfeld (Hambourg), j'ai trouvé une petite faunule de diptères appartenant aux genres Helomyza, Leria, Sciara, Asteia et Herina. J'ai aussi retrouvé le genre Styringomyia Loew et le curieux genre Trentepohlia Bigot.

On peut résumer comme suit le bilan des connaissances actuelles

Tableau des Diptères inclus dans le Copal

Copal récent	*Zanzibar :*	Leptogaster erecta, Meun.
		Exechia erupta, Meun.
		Empheria maculata, Meun.
		Platyura exigua, Meun.
		Pyrellia viridissima, Meun.
		Ceroxys aethiopica, Meun.
		Leriella crassifemorata, Meun.
	Madagascar :	Lestodiplosis Kiefferi, Meun.
		Myobia multiciliata, Meun.
		Phora sp. ?
		Toxorrhina madagascariensis, Meun.

---

(1) *Ditteri Eritrei Dolichopodidae*, p. 295-304. Bull. Soc. Ent. italiana, Anno XXXVII, Trimestre II ; III-IV. Firenze, 1905.

sur les diptères du copal de diverses provenances (Zanzibar et Madagascar) (¹).

Copal sub-fossile	*Zanzibar :*	Phlebotomus pungens, Loew (Meun). Sciara variabilis, Meun. Phora copalina, Meun. (Aphiochaeta eod Brues). Phora ethiopica, Meun. (Aphiochaeta eod Brues). Thryptocera media, Meun. Micropeza prompta, Meun.

DESCRIPTION DES ESPÈCES

I. DOLICHOPODIDAE

Genre Nematoproctus, Loew

Nematoproctus alsiosus, nov. sp.

♀. Tête aplatie, l'occiput garni d'une couronne de petits cils, vertex orné de quelques cils longs et robustes. Premier article des antennes court, cylindrique, le deuxième bien distinct, plus large et orné de quelques longs cils, le troisième article en forme de dôme, plus large que le deuxième et très courtement cilié ; chète dorsal, long, épaissi à la base et très distinctement cilié de chaque côté (124 d.). Partie buccale très robuste (²), palpes paraissant avoir un seul article, en forme de moignon et orné de quelques cils. Thorax garni de quelques longs cils, écusson orné au bout de deux longs cils. Abdomen comme tapissé de petits cils, le bord de chaque segment orné de quelques cils plus distincts que ceux qui garnissent les segments. Hanches antérieures et

---

(¹) Pour la bibliographie des diptères inclus dans cette résine voyez : F. Meunier, *Sur quelques diptères (Muscinae, Ortalinae, Helomyzinae) du copal récent de Zanzibar.* Ann. Soc. scient. de Bruxelles, t. XXXII, 2^e partie (1908), page 7 du tiré à part.

(²) Cette partie de la face était vraisemblablement moins avancée. Chez le type inclus ce caractère exagéré est dû à l'insecte ayant fait de vains efforts pour se libérer de la néfaste résine.

médianes bien ciliées, assez longues ; fémurs un peu amincis à l'extrémité, ciliés ; tibias assez densément ciliés et ornés de quelques cils assez longs ; articles tarsaux longs, ciliés ; métatarse plus long que les trois articles suivants réunis, le deuxième un peu plus long que troisième, le quatrième à peine plus long que le cinquième ; ongles des tarses simples, robustes (214 d.), pulvilles bien distinctes, ciliées. Les rares longs cils des tibias médians sont plus développés que ceux des pattes antérieures. Tibias postérieurs ornés d'une série de longs cils, métatarse postérieur environ aussi long que le deuxième article, le troisième beaucoup plus long que le quatrième, ce dernier visiblement plus long que lé cinquième. Ailes beaucoup plus longues que le corps. Bord costal alaire courtement cilié jusqu'à la troisième nervure longitudinale et épaissi jusqu'à la quatrième (124 d.) qui offre un coude, peu appréciable vers le milieu de sa longueur. Nervure transversale postérieure, très éloignée du bord postérieur de l'aile.

Coll. Evers. Copal récent (Zanzibar), n° 26.

Longueur du corps 3 1/2 mm., longueur alaire 3 mm.

♂. Inconnu.

Genre Teucophorus, Loew

Teucophorus sobrius, nov. sp.

♂. Antennes très courtes, les deux premiers articles courts, le troisième petit, cordiforme, finement cilié ; le chète épaissi à la base, assez long et bien distinctement cilié. Front orné de rares cils. Dessus du thorax pourvu aussi de quelques cils. Fémurs antérieurs bien distinctement plus courts que les tibias, ces derniers garnis en dessous de quelques cils assez longs ; articles tarsaux longs, courtement ciliés, métatarse un peu plus long que le deuxième article et aussi garni en dessous de quelques cils épars assez longs, le troisième article environ de la moitié de la longueur du deuxième, le quatrième un peu plus long que le cinquième ; crochets tarsaux un peu robustes, simples (214 d.). Tibias médians, garnis de chaque côté, de rares cils, articles tarsaux très longs ; le métatarse beaucoup plus long que le deuxième article, le troisième distinctement plus long que le quatrième qui est visiblement plus long que le cinquième. Tibias postérieurs courtement ciliés et ornés vers le milieu de la longueur de quelques rares cils ; métatarse postérieur court, dilaté et assez pointu à l'extrémité ; le deuxième article moins épais que le précédent mais s'y emboîtant, le troisième très long, le quatrième du double de la longueur du cinquième ; ongles des tarses assez robustes, unidentés. Bord costal alaire distinctement épaissi à la base. Troisième nervure longitudinale des ailes un peu convexe après la transversale.

Longueur du corps 2 1/4 mm., longueur alaire 1 3/4 mm.

Collection Evers. Copal récent (Zanzibar), n° 293.

II. MUSCIDAE ACALYPTERAE

Genre Helomyza, Fallen

Helomyza humilis, nov. sp.

♀. Front assez incliné et cilié de chaque côté jusqu'à la base des antennes, occiput peu bombé. Antennes atteignant le milieu de la longueur de la face, le premier article très court, le deuxième bien distinct et orné au-dessus de rares cils, le troisième ovale et un peu plus long que le deuxième article ; le chète assez long, bien distinctement épaissi à la base et faiblement cilié. Partie buccale très distinctement ciliée ; pipette charnue, plus courte que la tête ; palpes assez longues le bout renflé en massue, ciliées. Thorax orné de quelques longs cils. Ecusson garni de quatre cils. Fémurs antérieurs bien ciliés en dessous et ornés au-dessus, vers l'extrémité, de quelques assez longs cils, tibias garnis d'un long cil un peu au delà du milieu et de trois autres à l'extrémité ; (chez le seul spécimen observé) ; articles tarsaux antérieurs courtement ciliés, métatarse aussi long que les deux articles suivants réunis, le deuxième un peu plus long que le troisième, le quatrième plus court que le cinquième. Crochets tarsaux et pulvilles robustes. Pattes postérieures plus longues que les antérieures et les médianes, les tibias aussi garnis des cils caractéristiques et les articles tarsaux de même structure morphologique qu'aux pattes antérieures. Abdomen à segments distinctement ciliés. A 124 d., le champ alaire est orné de très courts cils, le bord antérieur est courtement cilié et orné de petits cils raides, un peu espacés, si caractéristiques des espèces du genre Helomyza.

Longueur du corps 2 3/4 mm., longueur alaire 2 mm.

Collection Evers. Copal récent (Zanzibar), n° 111 (¹).

♂. Inconnu.

Genre Leria, R. Desvoidy

Leria insaturabilis, nov. sp.

♀. Tête plus large que le thorax. Front bien cilié de chaque côté. Les deux premiers articles des antennes très courts, le troisième orbiculaire ; chète assez long et cilié (124 d.) de chaque côté. Bouche ornée, de chaque côté, d'un macrochète et de quelques cils à la périphérie. Pipette charnue, bien plus courte que la tête ; palpes assez renflées et ornées de quelques petits cils. Thorax garni, à la partie postérieure, de quelques longs cils ; écusson orné à la base et à l'extrémité de deux longs cils. Segments de l'abdomen un peu ciliés (²). Lamelles apicales des organes génitaux allongées et ornées de quelques cils assez longs. Fémurs antérieurs un peu épaissis et pourvus, en dessous, de quelques cils assez courts mais très distincts ; tibias plus courts que les fémurs ; articles tarsaux courts, métatarse plus long que les deux articles suivants réunis, le deuxième à peine plus long que le troisième, le quatrième un peu plus court que le cinquième ; ongles des tarses un peu robustes, unidentés. Métatarse postérieur un peu plus long que le deuxième article, le troisième environ aussi long que le quatrième, le cinquième à peine plus long que le quatrième. Tout le champ alaire (124 d.) orné de très petits cils, le bord antérieur garni des cils caractéristiques des espèces du genre Leria (ces cils dépassent à peine la deuxième nervure longitudinale).

Longueur du corps 1 1/4 mm., longueur alaire 1 mm.

Collection Evers. Copal récent (Madagascar), n° 273.

(¹) Dans le succin de la Baltique, j'ai observé les espèces suivantes de Helomyzinae : Helomyza media, H. minuta ; Leria alacris, Leria sapromyzoïdes ; Heteromyza dubia ; Palaeoheteromyza crassicornis.

(²) La disposition des cils sur les segments pourra seulement être complétée après l'examen de plusieurs spécimens.

Leria insatiabilis, nov. sp.

♂. A première vue, cette espèce semble très voisine de la précédente. Elle en diffère par une plus forte tête, le chète des antennes plus long et la partie buccale plus ciliée. Les articles tarsaux sont visiblement plus allongés et le métatarse postérieur plus long.

Longueur du corps 2 mm., longueur alaire 1 1/2 mm.

Collection Evers. Copal récent (Accra), nº 197.

♀. Inconnue.

DROSOPHILINAE

Genre Asteia, Meigen

Asteia magnifica, nov. sp.

Très petite mais robuste espèce à tête plus large que le thorax. Front orné, à partir du milieu et jusqu'au haut de la tête, de quelques cils. Les deux premiers articles des antennes très courts, le troisième ovale, le chète inséré tout à fait à la base et orné, de chaque côté, de cils épars (j'en compte trois chez les types observés). De chaque côté de la partie buccale, il y a un petit macrochète ; palpes assez petites, un peu renflées en massue à l'extrémité et garnies de quelques cils. Thorax orné de quelques cils assez longs et écusson pourvu de deux cils. Ailes ovoïdes, beaucoup plus longues que le corps et ciliées microscopiquement. Bord antérieur finement cilié jusqu'à la troisième nervure longitudinale. Première nervure longitudinale et quatrième longitudinale convergentes à l'extrémité, cinquième n'atteignant pas le bord postérieur de l'aile. Nervure transversale antérieure ramenée tout à fait à la base de l'aile, la postérieure fait défaut. Bouton des balanciers saillants. Pattes courtes mais robustes, métatarse antérieur un peu plus court que les articles 2-5 réunis, le deuxième article plus long que le troisième, le quatrième un peu plus court que le cinquième ; ongles des pattes très grêles, unidentés. Articles tarsaux postérieurs plus courts que les antérieurs, métatarse moins long que les articles 2-5 pris ensemble, le deuxième article moins long que le troisième et le quatrième, le cinquième un peu plus court que les deux précédents.

Longueur du corps 3/4 mm., longueur alaire 1/2 mm.

Collection Evers. Copal récent (Accra), n^os^ 196, 198 (¹).

ORTALINAE

Genre Herina, Robineau-Desvoidy

Herina splendida, nov. sp.

♀. Tête (²) plus large que le thorax. Antennes à premier article court, cylindrique, le deuxième élargi au sommet et orné de quelques petits cils, le troisième article long, avec le chète très courtement et très finement cilié et s'insérant à la base. Dessus du thorax orné, de chaque côté, de quelques cils. Abdomen assez long. Articles tarsaux postérieurs (³) courtement ciliés. Métatarses un peu plus longs que les articles 2-5 réunis, le deuxième distinctement plus long que le troisième, le quatrième un peu plus court que le cinquième ; ongles des tarses robustes, unidentés. Ailes larges et plus longues que le corps. Première nervure longitudinale double. Nervure transversale antérieure un peu inclinée vers l'apex de l'aile et à égale distance entre la transversale postérieure et l'extrémité de la cellule basale antérieure. Nervure transversale postérieure très rapprochée du bord postérieur de l'aile. Cellule anale courtement pointue à l'extrémité (zipfelig ausgezogen). Les ailes sont hyalines, à l'exception d'une tache à l'extrémité de la première nervure longitudinale, d'une autre au bout de ces organes, s'étendant un peu au delà de la deuxième et de la troisième nervure longitudinale, et d'une troisième tache occupant toute la nervure transversale postérieure.

Longueur du corps 5 1/2 mm., longueur alaire 4 mm.

Collection Evers. Copal récent (Madagascar), n^o^ 128.

(¹) Ce morceau de copal renferme aussi un petit spécimen altéré de Proctrotrypidae Mymarinae.

(²) Chez le seul spécimen observé, on ne peut décrire les caractères du front, de la pipette et des palpes, cette partie du corps étant altérée.

(³) Ceux des pattes antérieures et médianes sont trop enchevêtrées pour les décrire.

SCIARIDAE

Genre Sciara, Meigen

Sciara radians, nov. sp.

♂. Antennes distinctement plus longues que le corps, à articles courtement mais assez densément ciliés. Premier article court, cylindrique, le deuxième court, godiforme, les autres articles très longs; ceux de l'extrémité un peu plus courts que ceux de la base. Palpes de trois articles (¹) : les deux premiers environ d'égale longueur, le troisième à peine plus long et plus grêle que les deux précédents réunis. Thorax un peu cilié postérieurement, écusson courtement cilié. Tous les segments abdominaux ornés d'une ciliation bien appréciable. Organes copulateurs très robustes, un peu ciliés, la partie basale des forceps très large, l'apicale large et comme pourvue d'une sorte de moignon à l'extrémité, les sagitta courts, ovales, le pénis semble être large (214 d.). Articles tarsaux antérieurs longs, métatarses environ aussi longs que les articles 2-5 réunis, le deuxième article visiblement plus long que le troisième, le quatrième à peine plus long que le cinquième. Ongles des tarses assez grêles (pour une espèce de cette taille) ; unidentés. Bord costal alaire très longuement prolongé après le cubitus. Première nervure longitudinale réunie au bord costal en deçà du dessous du point où commence la fourche qui est longue et large. Pétiole de la fourche peu indiqué ; pétiole et fourche ornés de petits cils moins bien distincts (124 d.). Les deux premières nervures longitudinales aussi un peu ciliées.

Longueur du corps 4 à 4 1/2 mm., longueur alaire 3 1/2 mm. Collection Evers. Copal récent (Zanzibar), n° 14.

TIPULIDAE

Genre Trentepohlia, Bigot

(Mongoma)

En triant des diptères inclus dans des morceaux de copal récent de Zanzibar, j'ai rencontré un superbe exemplaire de ce genre

---

(¹) Ils en ont vraisemblablement encore un rudimentaire à la base.

(T. exornata Bergroth) dont les taches alaires sont aussi caractéristiques que celles indiquées sur la figure de cet auteur (1).

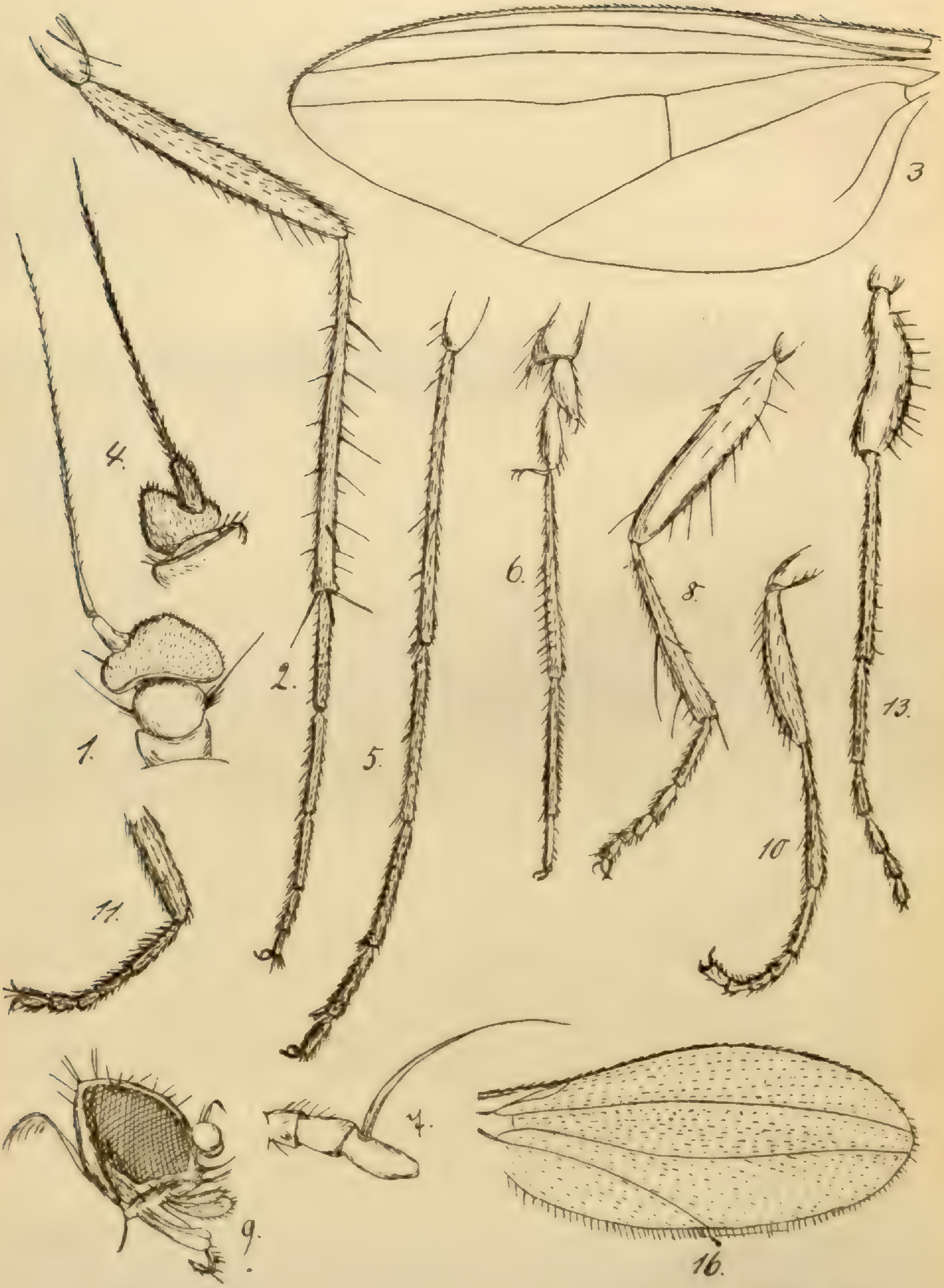
Collection Evers, n° 293.

EXPLICATION DES FIGURES

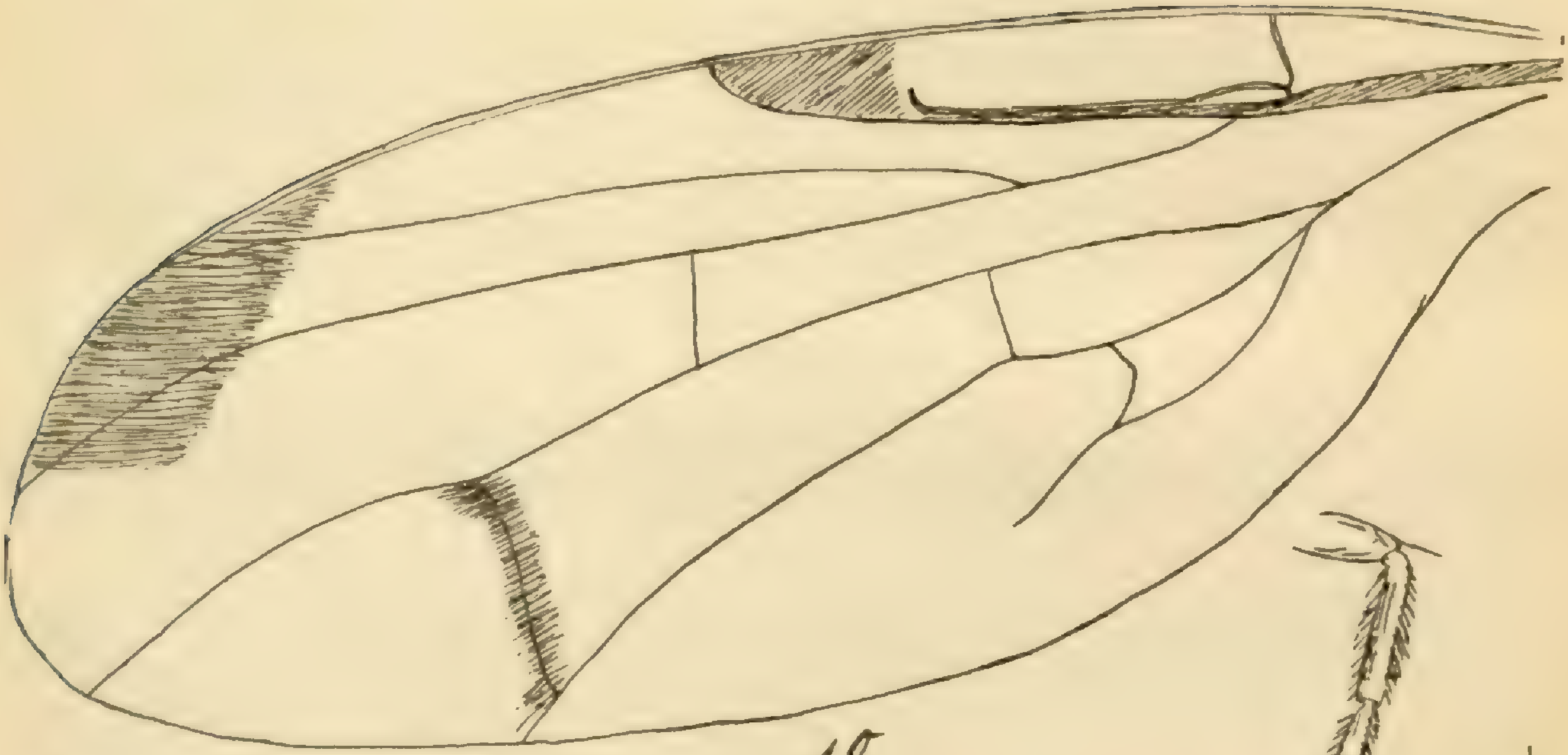
Fig. 1. Antenne de Nematoproctus alsiosus, nov. sp., n° 26 (124 d.).
Fig. 2. Patte postérieure de ce diptère (124 d.).
Fig. 3. Aile du même (66 d.).
Fig. 4. Antenne de Teucophorus sobrius, nov. sp., n° 293 (214 d.).
Fig. 5. Articles tarsaux médians (124 d.).
Fig. 6. Articles tarsaux postérieurs (124 d.).
Fig. 7. Antenne de Helomyza humilis, nov. sp., n° 111 (124 d.).
Fig. 8. Patte postérieure du même (124 d.).
Fig. 9. Tête de Leria insaturabilis, nov. sp., n° 273 (124 d.).
Fig. 10. Patte antérieure du même (124 d.).
Fig. 11. Patte postérieure du même (124 d.).
Fig. 12. Tète de Leria insatiabilis, nov. sp., n° 197, vue de profil (66 d.).
Fig. 13. Patte antérieure du même (124 d.).
Fig. 14. Patte antérieure de Asteia magnifica, nov. sp., nos 196-198 (124 d.).
Fig. 15. Articles tarsaux postérieurs de ce Drosophilinae (124 d.).
Fig. 16. Aile du même (124 d.).
Fig. 17. Articles tarsaux de Herina splendida, nov. sp., n° 128 (66 d.).
Fig. 18. Aile de cet Ortalinae (66 d.).
Fig. 19. Antenne de Sciara radians, nov. sp. ♂, n° 14 (66 d.).
Fig. 20. Articles tarsaux antérieurs de ce Sciaridae (66 d.).
Fig. 21. Aile du même (66 d.).
Fig. 22. Organe copulateur de ce diptère (66 d.).

---

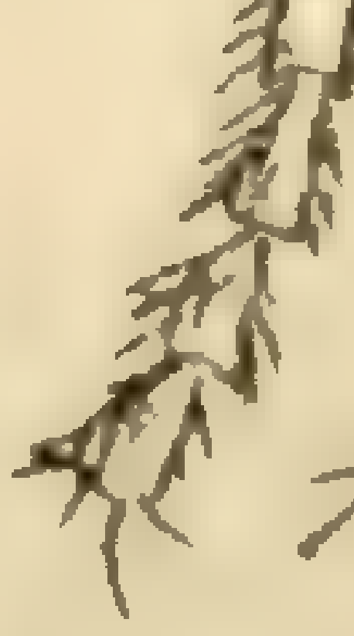
(1) *On some south African Tipulidae*, ENT. TIDSCHRIFT, arg. 9, Häft 3-4, pp. 135-137 ; fig. 4. Stockholm, 1888.


3
4.
1.
2.
5.
6.
8.
10
13.
11.
7.
9.
16.

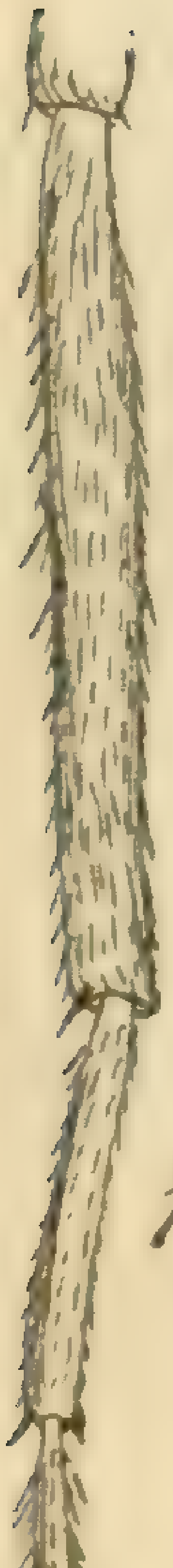
LOUISE MEUNIER DEL



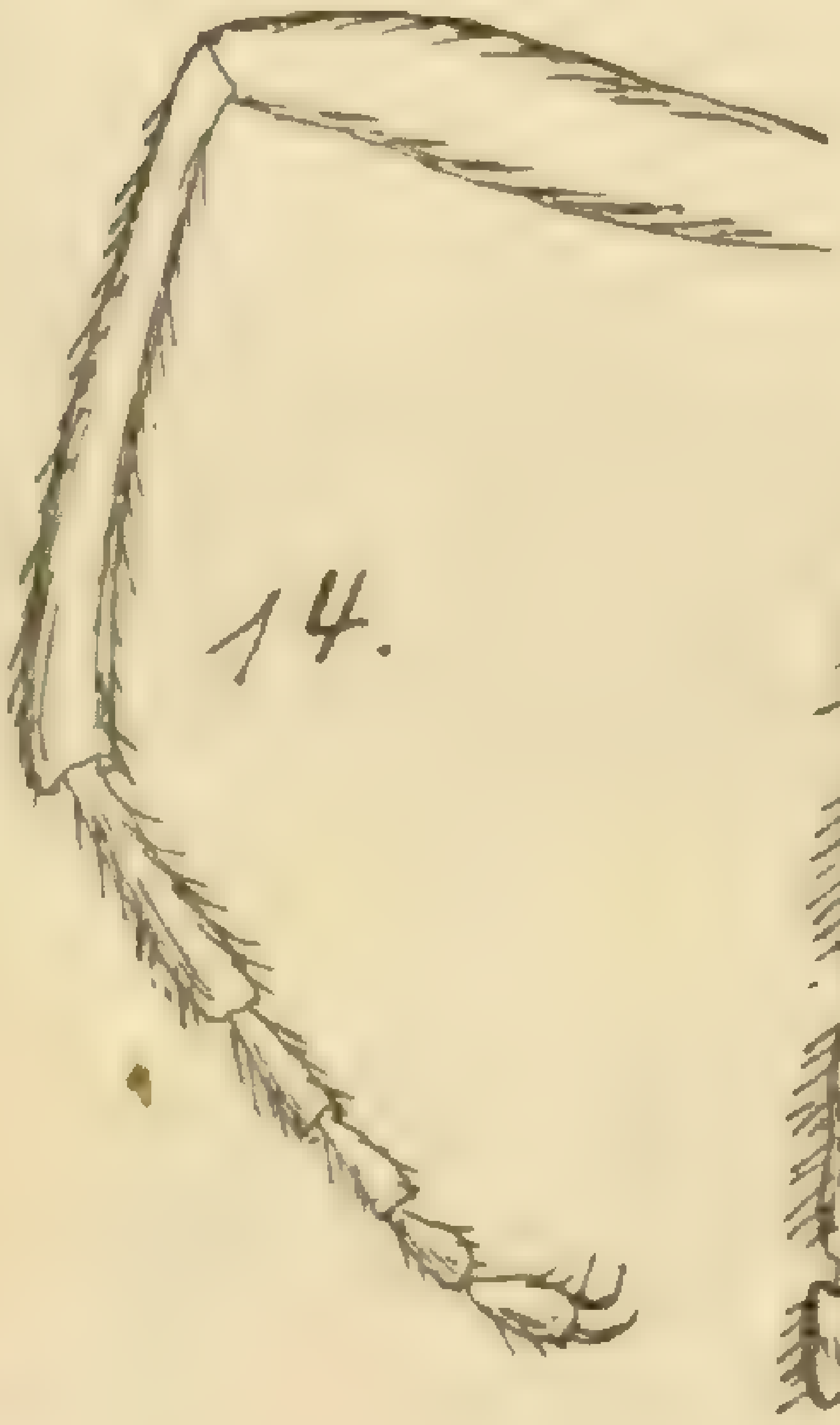
18.



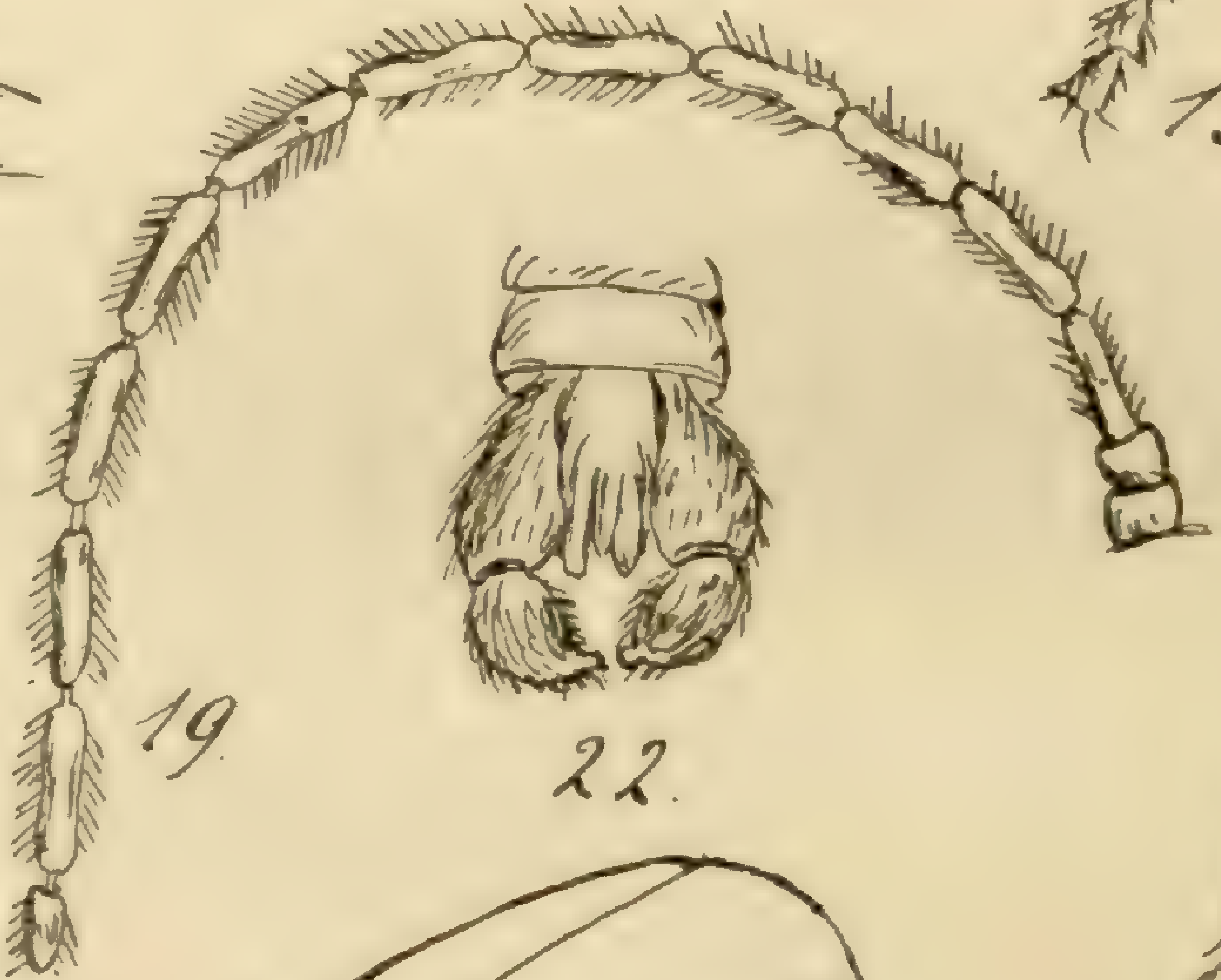
15.



17.

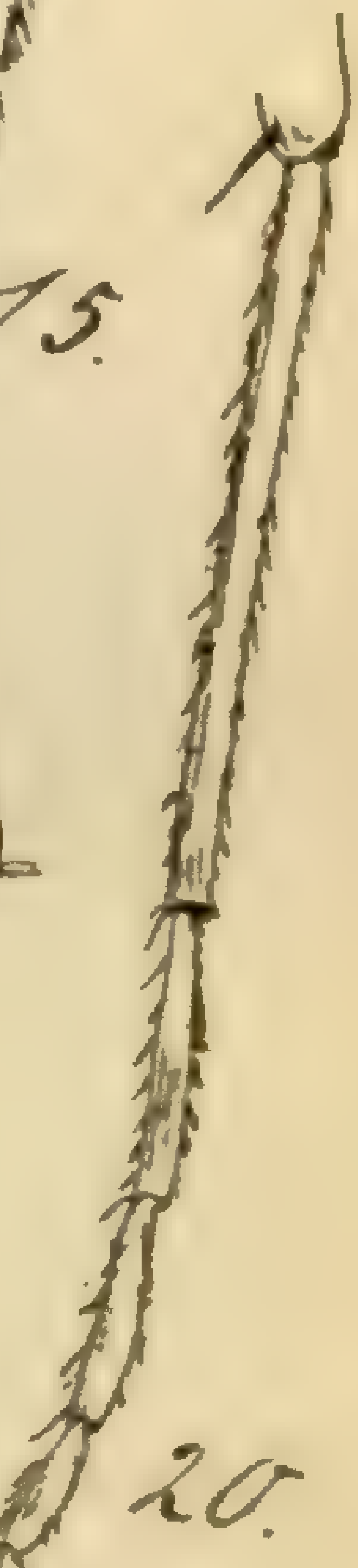


14.

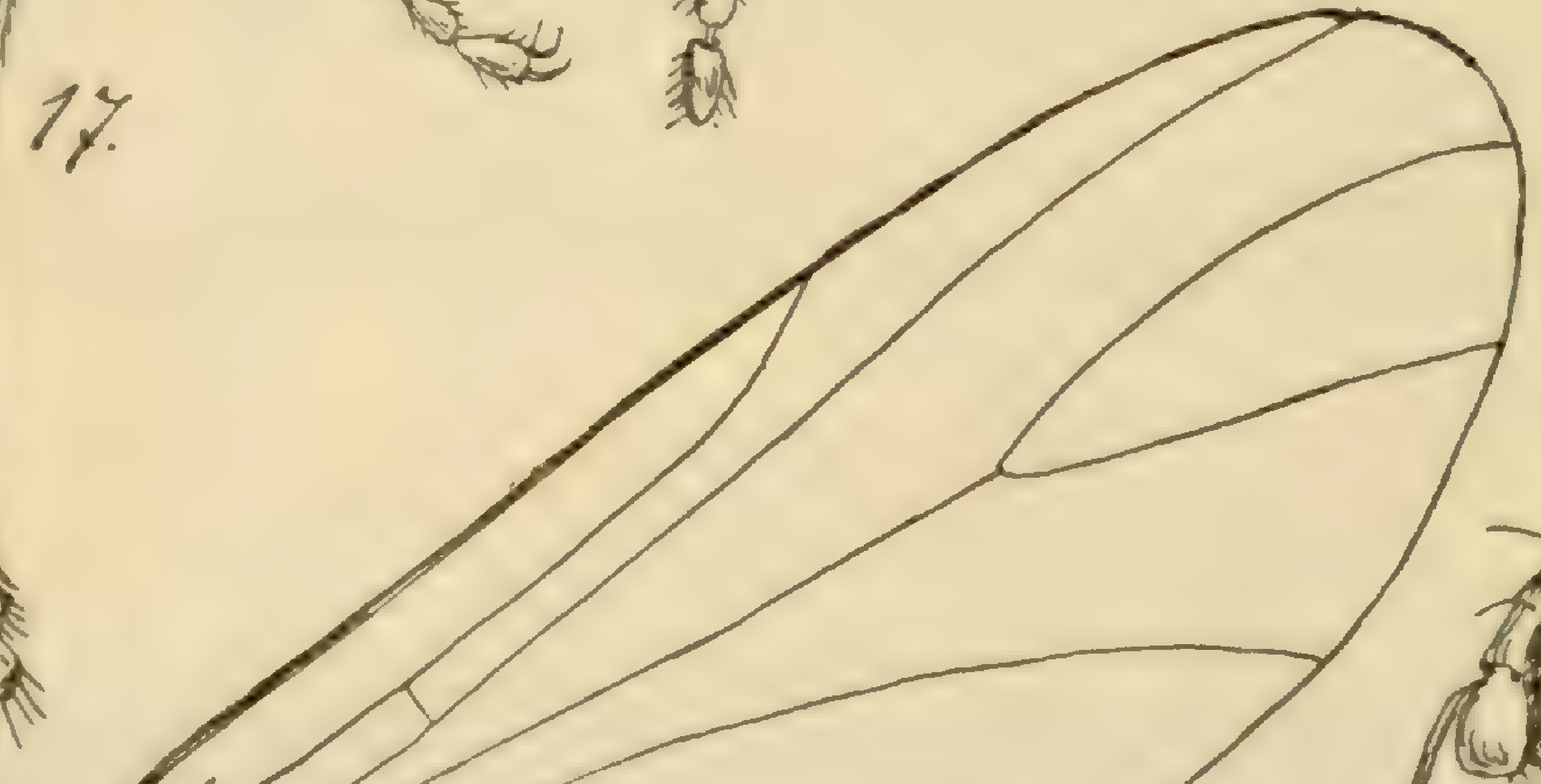


19.

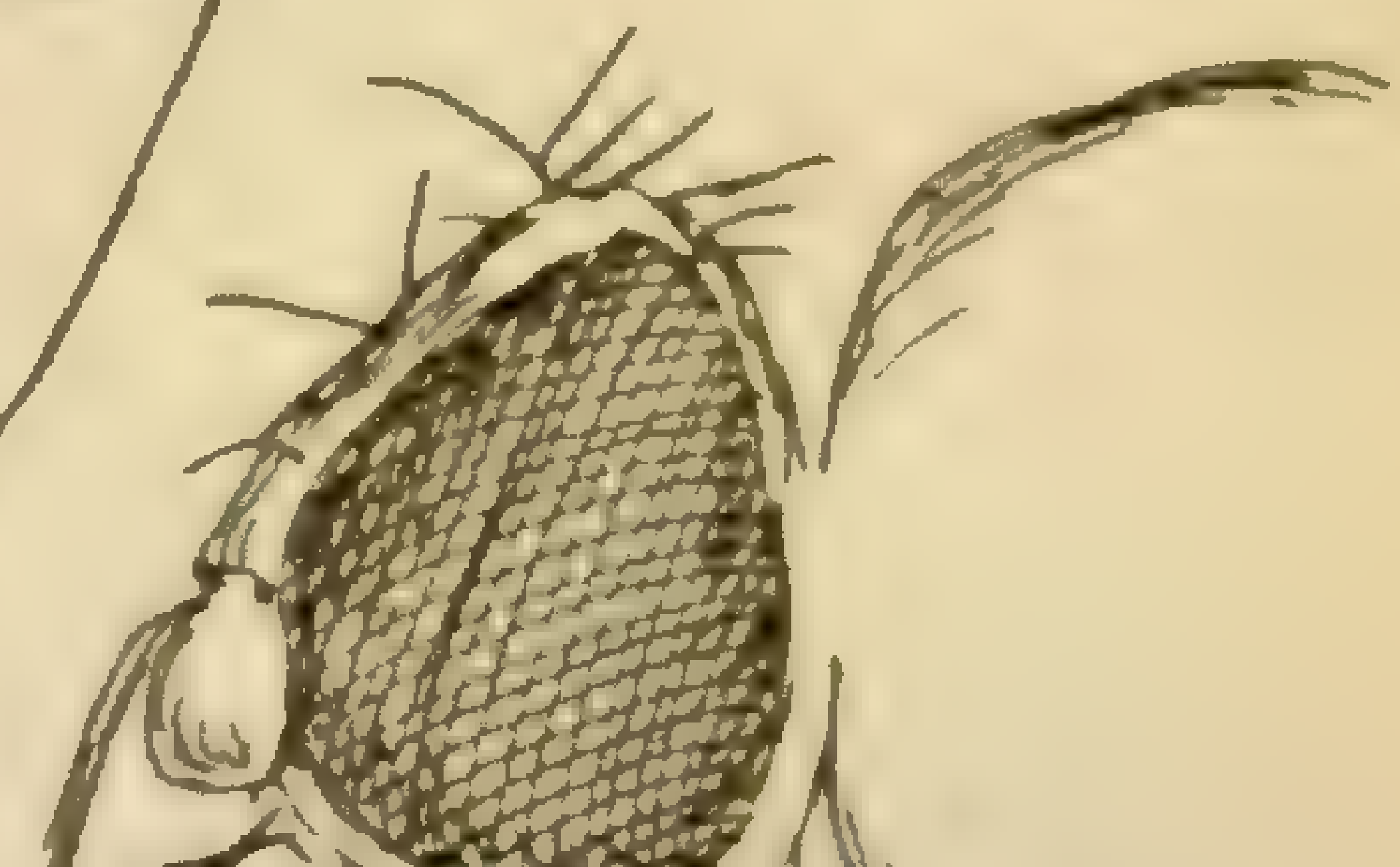
22.



20.



21.



12

Louise Meunier del.

PUBLICATIONS DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE

ANNALES DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE DE BRUXELLES, t. I à t. XXXII, 1875 à 1908. Chaque vol. in-8° de 400 à 600 pages. fr. **20 00**

TABLE ANALYTIQUE des vingt-cinq premiers volumes des ANNALES DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE (1875-1901). Un vol. in-8° de 250 pages (1904), en vente au prix de . . . . fr. **3 00**

REVUE DES QUESTIONS SCIENTIFIQUES. Première série, 1877 à 1891. Trente volumes. Seconde série, 1892 à 1901. Vingt volumes. Troisième série, commencée en 1902. Les deux volumes annuels, de 700 pages in-8° chacun . . . . fr. **20 00**

TABLE ANALYTIQUE des cinquante premiers volumes de la REVUE DES QUESTIONS SCIENTIFIQUES (1877-1901). Vol. in-8° de XII-168 pages, petit texte (1904), en vente au prix de 5 fr. ; pour les abonnés . . fr. **2 00**

Ph. Gilbert. Mémoire sur l'application de la méthode de Lagrange à divers problèmes de mouvement relatif. Deuxième édition (1889). Vol. in-8° de 150 pages . . . . fr. **7 50**

DISCUSSION SUR LE FŒTICIDE MÉDICAL. Brochure in-8° de 38 pages (1904) . . . . fr. **1 00**

LA CRISE DU LIBRE-ÉCHANGE EN ANGLETERRE. Rapports de MM. G. Blondel, Ch. Dejace, A. Viallate, Emm. de Meester, P. de Laveleye, Ed. Vandersmissen. Brochure in-8° de 121 pages (1905) . . fr. **2 00**

LES PORTS ET LEUR FONCTION ÉCONOMIQUE : **T. I.** Introduction, Éd. Van der Smissen. I. La Fonction économique des Ports dans l'Antiquité grecque, H. Francotte. II. Bruges au Moyen âge, G. Eeckhout. III. Barry, H. Laporte. IV. Beira, Ch. Morisseaux. V. Liverpool, P. de Rousiers. VI. Anvers, E. Dubois et M. Theunissen. VII. Les Ports et la vie économique en France et en Allemagne, G. Blondel. Un vol. in-8° de 183 pages, figures et plans. Prix : 4 francs. **T. II.** VIII. Londres, G. Eeckhout. IX. Délos, A. Roersch. X. Rotterdam, J. Charles. XI. Gênes au Moyen âge, J. Hanquet. XII. Marseille, G. Blondel. Un vol. in-8° de 123 pages, figures et plans. Prix : 3 francs. **T. III.** XIII. Le Port moderne de Gênes, M. Theunissen. XIV. Ostende. L.-Th. Leger. XV. Jaffa, P. Gendebien. XVI. Lisbonne, Ch. Morisseaux. XVII. Le Havre, G. Blondel. XVIII. Hambourg, P. de Rousiers et J. Charles. XIX. Rio-de-Janeiro, F. Georlette. XX. Han-Kow. A. Vanderstichel. Prix : 3 francs. **T. IV.** XXI. Barcelone et Bilbao, J. Charles. XXII. Buenos-Aires, M. Theunissen. XXIII. Brême, J. Charles. XXIV. New-York, Paul Hagemans. XXV. Le Port de Pouzzoles dans l'Antiquité, d'après un livre récent, Alphonse Roersch. XXVI. Shanghaï, A. A. Fauvel. XXVII. Zeebrugge, J. Nyssens-Hart. Un vol. in-8° de 184 pages, figures et plans. Prix : 3 francs. **T. V**, sous presse.

SUR QUELQUES POINTS DE MORALE SEXUELLE DANS SES RAPPORTS AVEC LA MÉDECINE. Rapport de M. le D^r X. Francotte. Brochure in-8 de 48 pages (1907). . . . . fr. **0 75**

DE LA DÉPOPULATION PAR L'INFÉCONDITÉ VOULUE. Rapport de M. le D^r Henri Desplats, et discussion. Brochure in-8° de 29 pages (1908) . . . . fr. **0 75**

REVUE DES QUESTIONS SCIENTIFIQUES

PUBLIÉE PAR

LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE DE BRUXELLES

TROISIÈME SÉRIE

Cette revue de haute vulgarisation, fondée en 1877 par la Société scientifique de Bruxelles, se compose actuellement de deux séries : la **première série** comprend 30 volumes (1877-1891) ; la **deuxième**, 20 volumes (1892-1901). La livraison de janvier 1902 a inauguré la **troisième série.**

La revue paraît en livraisons trimestrielles de 352 pages, à la fin de janvier, d'avril, de juillet et d'octobre. Chaque livraison renferme trois parties principales.

La **première partie** se compose d'**Articles originaux**, où sont traités les sujets les plus variés se rapportant à l'ensemble des sciences mathématiques, physiques, naturelles, sociales, etc.

La **deuxième partie** consiste en une **Bibliographie scientifique**, où l'on trouve un compte rendu détaillé et l'analyse critique des principaux ouvrages scientifiques récemment parus.

La **troisième partie** consiste en une **Revue des Revues et des Publications périodiques**, où des écrivains spéciaux résument ce qui paraît de plus intéressant dans les archives scientifiques et littéraires de notre temps.

Chaque livraison contient ordinairement aussi un ou plusieurs articles de **Variétés.**

CONDITIONS D'ABONNEMENT

Le prix d'abonnement à la REVUE DES QUESTIONS SCIENTIFIQUES est de **20 francs** par an. Les membres de la Société scientifique de Bruxelles ont droit à une réduction de **25** %; le prix de leur abonnement est donc de **15 francs** par an.

Table analytique des cinquante premiers volumes de la REVUE. Un vol. du format de la REVUE de XII-468 pages. Prix : 5 francs ; pour les abonnés, 2 francs.

Des volumes isolés seront fournis aux nouveaux abonnés à des conditions très avantageuses.

S'adresser pour tout ce qui concerne la **Rédaction** *et l'***Administration** *au secrétariat de la Société scientifique, 11, rue des Récollets, Louvain.*

Une Notice sur la Société scientifique, son but, ses travaux, est envoyée gratuitement à ceux qui en font la demande au secrétariat.

Louvain. — Imp. F. & R. Ceuterick, rue Vital Decoster, 60.

ANNALES

DE LA

SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE

DE BRUXELLES

TRENTE-QUATRIÈME ANNÉE, 1909-1910
SECOND FASCICULE

LOUVAIN
SECRÉTARIAT DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE
(J. THIRION)
11, RUE DES RÉCOLLETS, 11

1910

TABLE DES MATIÈRES

PREMIÈRE PARTIE

DOCUMENTS ET COMPTES RENDUS

PAGES

Session du 29 janvier 1910, à Bruxelles. — Séances des Sections.

Première Section 163
Deuxième — 182
Troisième — 187
Quatrième — 202
Cinquième — 221
Sixième — 221
Assemblée générale 226

SECONDE PARTIE

MÉMOIRES

La Vibration pendulaire son rôle véritable en acoustique, par M. J. Delemer 149
La valeur de la couche amylifère dans la tige et la théorie stélaire de Van Thieghem, par M. Victor Grégoire 164
Notes sur la Flore du Katanga, par M. É. De Wildeman 172
Deux particularités du glaciaire ancien de la Combe des Prés (Jura), par M. Bourgeat 186
Notices de manuscrits de la Bibliothèque Royale de Belgique, se rapportant aux sciences naturelles, par le R. P. J. Van den Gheyn, S. J. 191

Le volume des ANNALES DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE paraît en 4 fascicules trimestriels ; il coûte 20 francs pour les personnes qui ne sont pas membres.

S'adresser pour tout ce qui concerne la **Rédaction** de la REVUE et des ANNALES, et l'**Administration** de ces deux publications et de la *Société scientifique*, au Secrétariat, 11, rue des Récollets, Louvain.

ADRESSE DU SECRÉTAIRE GÉNÉRAL : **M. Paul Mansion,**
6, quai des Dominicains, Gand.

SESSION DU 27 JANVIER 1910

A BRUXELLES

SÉANCES DES SECTIONS

Première section

Comme suite à sa communication d'octobre *Sur certaines notions fondamentales de la mécanique* et en réponse aux observations faites à ce sujet par M. Mansion, M. Pasquier croit utile de faire remarquer qu'en attirant très incidemment l'attention sur la question des électrons, il a simplement voulu noter, après bien d'autres, qu'on connaît maintenant des phénomènes auxquels certaines notions fondamentales de la mécanique physique ordinaire ne sont pas applicables : pour les électrons, en effet, où la vitesse est extrêmement grande, la masse (rapport de la force à l'accélération) n'est plus constante, mais fonction de la vitesse et l'action et la réaction ne sont plus égales et directement opposées. Par suite — et c'est ce qui intéresse spécialement les membres de la première section — certains théorèmes de la mécanique analytique doivent être généralisés, si l'on veut qu'ils s'appliquent aussi aux faits susvisés de la physique moderne. Dans sa note, M. Mansion parle dans le même sens, mais M. Pasquier n'avait garde de dire le contraire.

M. Mansion fait une communication intitulée : *Le système des sphères homocentriques comme origine du système des épicycles.*

Nous avons publié, sous ce titre, une courte note dans le *Festschrift Moritz Cantor,* à l'occasion du quatre-vingtième anniversaire de l'illustre historien des mathématiques (Leipzig, Vogel, 1909, pp. 84-87. Extrait de l'ARCHIV FÜR DIE GESCHICHTE DER NATURWISSENSCHAFTEN UND DER TECHNIK, I). Depuis lors, nous avons trouvé, à l'appui de notre conjecture, une raison beaucoup plus forte que celle qui lui sert de base dans la note du *Festschrift*. C'est pourquoi nous reproduisons ce petit travail en y introduisant cette raison nouvelle (*).

1. *Objet de la présente note.* Il y a eu dans l'ancienne astronomie, celle qui ramène tous les mouvements célestes à la combinaison d'un nombre fini de mouvements circulaires, deux systèmes vraiment scientifiques, celui des sphères homocentriques d'Eudoxe, de Callippe et d'Aristote, et celui des épicycles d'Hipparque et de Ptolémée, que l'on retrouve, chez Copernic et Tycho Brahé, sous forme héliocentrique ou héliogéocentrique.

Avant Hipparque d'ailleurs, il y a lieu de signaler des anticipations remarquables du système des épicycles. Héraclide du Pont (4^e siècle avant J.-C.) fait tourner Mercure et Vénus autour du Soleil et celui-ci autour de la Terre. Aristarque de Samos (310-250) fait tourner la Lune autour de la Terre et la Terre autour du Soleil.

Quelle relation existe-t-il entre le système des sphères homocentriques et celui des épicycles ? Aucune en apparence. Car, dans le système d'Eudoxe, on admet que chaque planète reste à une distance fixe de la terre ; dans celui d'Hipparque, on suppose que cette distance change, et avec raison, puisque l'on explique ainsi les variations d'éclat de Vénus et de Mars et les changements du diamètre apparent du Soleil et de la Lune, qui sont inexplicables dans le système d'Eudoxe.

Mais, à un autre point de vue, le système des sphères homocentriques est bien plus proche de celui des épicycles qu'il ne paraît au premier abord. Il a pour but d'expliquer par des combinaisons de mouvements de sphères les stations et rétrogradations des planètes. Or, à ce point de vue purement géométrique, le système d'Eudoxe est, au fond, un système d'épicycles, d'abord sur la sphère

---

(*) Le R. P. Thirion, dans son opuscule *L'Évolution de l'Astronomie chez les Grecs*, p. 77, a émis sur le principe du système d'Eudoxe, des vues qui, poussées à bout, se confondraient sans doute avec celles qui sont développées dans cette note.

et ensuite dans l'espace, et, par suite, il a pu être le point de départ qui a conduit Apollonius ou Hipparque ou leurs prédécesseurs au système d'épicycles.

La présente note a pour objet de montrer, non qu'il en a été réellement ainsi — les documents manquent sans doute pour cela — mais qu'*il a pu en être ainsi*. C'est une simple conjecture que nous soumettons à ceux qui s'occupent de l'histoire de l'ancienne astronomie, à M. G. V. Schiaparelli en particulier, le maître illustre qui a ressuscité, il y a trente-cinq ans, le système des sphères homocentriques et à qui l'on doit tant d'études pénétrantes sur le passé de cette science à laquelle il a lui-même ajouté une page à jamais célèbre sur les étoiles filantes.

2. *Le théorème de Möbius et la théorie des épicycles dans le plan et sur la sphère.* A. Möbius a énoncé, sans le démontrer, dans la préface de ses *Elemente der Mechanik des Himmels* (1843 ; voir p. 4 du t. IV de ses *Œuvres,* Leipzig, Hirzel, 1887), ce théorème que le mouvement d'un point quelconque dans un plan peut se ramener à un nombre infini de mouvements circulaires. La démonstration est aisée au moyen des séries de Fourier, comme Möbius le remarque et comme nous l'avons montré en détail dans une note sur le mouvement képlerien (ANNALES DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE DE BRUXELLES, 1901, XXX, 1re partie, pp. 71-75). D'après ce théorème de Möbius, le mouvement képlerien revient à la combinaison d'un nombre infini de mouvements circulaires ; c'est pourquoi Kepler a véritablement inauguré l'astronomie moderne, puisque sa découverte du mouvement elliptique des planètes équivaut d'un seul coup à une infinité de perfectionnements du système des épicycles.

La démonstration du théorème de Möbius s'étend d'elle-même du plan à la sphère, mais on peut aussi le démontrer pour une trajectoire sphérique en le déduisant du même théorème pour la projection stéréographique plane de cette trajectoire sphérique.

B. Nous avons fait remarquer (ANNALES DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE DE BRUXELLES, 1906, XXX, 1re partie, p. 115) que les anciens ont pu trouver une proposition pratiquement équivalente au théorème de Möbius, soit pour un mouvement plan, soit pour un mouvement sphérique, soit pour une trajectoire fermée quelconque, de la manière suivante :

Considérons, par exemple, la trajectoire (S) à peu près circulaire d'un astre S autour d'un repère T dit immobile. Traçons un cercle (s) de centre T qui se rapproche le plus possible de (S). Supposons que S parcoure (S) d'un mouvement presque uniforme et que s parcoure (s) d'un mouvement uniforme, la différence sS des vecteurs TS, Ts étant toujours assez faible, par hypothèse.

Construisons autour d'un point S′ une trajectoire (S′) dont les vecteurs émanant de S′ soient égaux aux vecteurs sS. Le mouvement de S sur (S) sera très bien représenté (représenter = faire connaître complètement) par celui de s sur (s) plus celui de S′ sur (S′).

On pourra faire sur la seconde trajectoire (S′) la même décomposition que sur (S) et continuer ainsi jusqu'à ce que l'on arrive à une dernière trajectoire de rayon vecteur si petit qu'elle se confonde pratiquement avec un point. Le mouvement de S sur (S) sera donc remplacé par une suite de mouvements circulaires uniformes.

3. *Le système des sphères homocentriques est un système d'épicycles sur la sphère.* La chose est presque évidente. Eudoxe, dit Schiaparelli, dans le § II de son célèbre *Mémoire* de 1874 sur les sphères homocentriques, admet que chaque corps céleste A est entraîné dans un mouvement circulaire par une sphère de centre O animée d'un mouvement de rotation uniforme autour de deux pôles P, P′ ; l'astre est situé en un point de l'équateur de cette sphère. Pour expliquer les changements de vitesse, les stations et rétrogradations des planètes, Eudoxe fait tourner P, P′ uniformément autour de l'axe d'une seconde sphère homocentrique à la première et dont les pôles sont Q, Q′ ; de même Q, Q′ tournent uniformément autour d'une troisième sphère homocentrique aux précédentes et de pôles R, R′, puis R, R′ uniformément aussi autour de l'axe d'une quatrième sphère de centre O et de pôles S, S′. Pour le Soleil et la Lune, Eudoxe n'emploie que trois sphères ; plus tard, on leur en attribue cinq ainsi qu'à Mars, Vénus et Mercure.

Projetons du centre O les pôles Q, Q′, R, R′, S, S′, sur la première sphère en q, q', r, r', s, s'. Le mouvement de l'astre A, considéré sur la première sphère, sera celui d'un point autour du centre P, lequel se meut sur un cercle de centre sphérique q, de rayon sphérique qP ; ce centre q se meut lui-même sur un cercle de centre r, de rayon rq ; enfin le centre r se meut sur un cercle de centre s de rayon sr. Donc, le mouvement de A est un mouvement sur un système d'épicycles sphériques.

4. *Passage au système d'épicycles dans le plan ou dans l'espace.* En prenant quelques précautions de plus que dans le cas d'épicycles plans, on peut échanger entre eux le rôle des différents cercles de manière à faire porter les plus petits par les plus grands.

Par exemple, on peut ranger dans un ordre inverse les mouvements épicycloïdaux de A sur la sphère en procédant de la manière suivante. Soient π, κ, ρ les points symétriques de P, q, r par rapport au milieu de As. Le mouvement de A pourra être obtenu en faisant tourner le vecteur ρA autour de ρ avec la même vitesse et dans le même sens que le vecteur égal sr autour de s ; le vecteur $\kappa\rho$ autour de κ avec la même vitesse que le vecteur égal rq autour de r ; le vecteur $\pi\kappa$ autour de π avec la même vitesse et dans le même sens que le vecteur égal qP autour de q ; enfin le vecteur $s\pi$ autour de s avec la même vitesse et dans le même sens que le vecteur égal PA autour de P. On observera que, dans le cas considéré, PA et $s\pi$ sont des quadrants ; par suite, l'angle πOs est un angle droit.

Cela posé, projetons A en ρ' sur $O\rho$, ρ' en κ' sur $O\kappa$, κ' en π' sur $O\pi$, et π' en O sur Os, puisque πOs est un angle droit. Quand A décrit un cercle de centre sphérique ρ, ρ un cercle de centre sphérique κ, κ un cercle de centre sphérique π, π un centre de cercle sphérique s, il est clair que A, ρ', κ', π' décrivent des cercles ayant pour centres ρ', κ', π', O ; le premier seul de ces cercles est sur la sphère de rayon OA. Donc *le système des sphères homocentriques équivaut à un système d'épicycles dans l'espace*, chaque épicycle ayant son centre dans son plan et ces plans étant inclinés les uns sur les autres.

5. *Conclusion.* On peut admettre que les astronomes anciens ont ainsi passé par des raisonnements élémentaires du système d'Eudoxe à celui d'Hipparque, ou auparavant à celui d'Héraclide du Pont et à celui d'Aristarque de Samos. Bien entendu, ils ont dû préalablement supprimer du système d'Euxode ce qui était contraire aux faits d'observation, savoir la constance de la distance du Soleil, de la Lune et des planètes à la Terre.

M. Neuberg continue sa communication *sur la Parabole de Kiepert* (voir pp. 82-88).

9. Cherchons maintenant le lieu du centre d'homologie S des triangles ABC, $O_aO_bO_c$.

U et L ayant la signification indiquée au § 8, les équations des cercles BCN, CAN, ABN sont

$$U - uxL = o, \quad U - vyL = o, \quad U - wzL = o, \tag{5}$$

où u, v, w représentent les puissances des points A, B, C par rapport aux cercles opposés.

On en conclut que les coordonnées barycentriques x, y, z, de N vérifient les équations

$$ux = vy = wz. \tag{6}$$

En remplaçant dans l'une des équations (5) ces coordonnées par $\frac{1}{u}$, $\frac{1}{v}$, $\frac{1}{w}$ on trouve

$$a^2u + b^2v + c^2w = vw + wu + uv. \tag{7}$$

Les égalités (6) peuvent être établies synthétiquement. En effet, soit A_1, B_1, C_1 les points où les droites AN, BN, CN recoupent les circonférences O_a, O_b, O_c et appelons λ, μ, ν les suppléments des angles BNC, CNA, ANB, le point N étant supposé à l'intérieur du triangle ABC. Les angles des triangles A_1BC, AB_1C, ABC_1 sont précisément égaux à λ, μ, ν. Les triangles ACA_1, B_1CB étant équiangles, on a

$$AA_1 : BB_1 = AC : B_1C = \sin\mu : \sin\lambda.$$

D'autre part, les coordonnées x, y de N sont proportionnelles aux aires des triangles NBC, NCA, ou aux produits NB $\sin\lambda$, NA $\sin\mu$. Il résulte de là que

$$AA_1 \,.\, AN \,.\, x = BB_1 \,.\, BN \,.\, y.$$

10. Pour obtenir les coordonnées du centre O_a du cercle NBC, égalons entre elles les dérivées partielles de $U - uxL$ par rapport à x, y, z ; ce qui donne

$$b^2z + c^2y - uL = c^2x + a^2z, \quad c^2x + a^2z = a^2y + b^2x. \tag{8}$$

En substituant dans la première des équations (8) la valeur de x tirée de la seconde, on obtient

$$b^2(a^2+c^2-b^2)z-c^2(a^2+b^2-c^2)y=u[(a^2+c^2-b^2)y-(a^2+b^2-c^2)z].$$

Remplaçons les parenthèses par $2ac \cos B$, $2ab \cos C$, ensuite b par $2R \sin B$ et c par $2R \sin C$; il vient

$$2R^2(z \sin 2B - y \sin 2C) = u(y \cot B - z \cot C). \qquad (9)$$

Cette équation représente la droite AO_a ; par analogie, celles des droites BO_b, CO_c sont

$$2R^2(x \sin 2C - z \sin 2A) = v(z \cot C - x \cot A), \qquad (10)$$

$$2R^2(y \sin 2A - x \sin 2B) = w(x \cot A - y \cot B). \qquad (11)$$

Pour abréger, nous écrivons ces équations ainsi :

$$2R^2\eta_a = u\epsilon_a, \quad 2R^2\eta_b = v\epsilon_b, \quad 2R^2\eta_c = w\epsilon_c \, ; \qquad (12)$$

$\eta_a = 0$, $\eta_b = 0$, $\eta_c = 0$ représentent les droites AO, BO, CO, et $\epsilon_a = 0$, $\epsilon_b = 0$, $\epsilon_c = 0$ les hauteurs AA_h, BB_h, CC_h. Nous aurons l'équation du lieu du point S en éliminant u, v, w entre les relations (7) et (12) ; ce qui donne

$$\begin{aligned} 2(\eta_a\epsilon_b\epsilon_c \sin^2 A + \eta_b\epsilon_c\epsilon_a \sin^2 B + \eta_c\epsilon_a\epsilon_b \sin^2 C) \\ = \epsilon_a\eta_b\eta_c + \epsilon_b\eta_c\eta_a + \epsilon_c\eta_a\eta_b. \end{aligned} \qquad (13)$$

Ce lieu est donc une cubique passant par les points

$A(\epsilon_a = 0, \eta_a = 0)$, B, C, $O(\eta_a = \eta_b = \eta_c = 0)$, $H(\epsilon_a = \epsilon_b = \epsilon_c = 0)$.

Nous en trouverons plus loin une équation plus simple.

11. Le lieu du point N peut également se déduire des calculs précédents. A cet effet, donnons aux équations (9), (10), (11) la forme :

$$(2R^2 \sin 2C + u \cot B)y = (2R^2 \sin 2B + u \cot C)z,$$
$$(2R^2 \sin 2A + v \cot C)z = (2R^2 \sin 2C + v \cot A)x,$$
$$(2R^2 \sin 2B + w \cot A)x = (2R^2 \sin 2A + w \cot B)y \, ;$$

en les multipliant membre à membre, on obtient après quelques réductions

$$\Sigma uv \cos C \sin (A - B) - 4R^2 \Sigma u \sin^2 A \cos A \sin (B - C) = o. \quad (14)$$

Rendons l'équation (14) homogène en u, v, w en multipliant les termes du premier degré par $\Sigma uv : \Sigma a^2 u$, quantité égale à l'unité et remplaçons ensuite u, v, w, par $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$, $\frac{1}{z}$.

12. Voici une méthode plus simple pour déterminer le lieu du point S.

Les distances du point O_a aux côtés AC, AB, sont égales à $O_aC \sin O_aCA$, $O_aB \sin O_aBA$; on en conclut l'équation de la droite AO_a en coordonnées normales α, β, γ et, par analogie, celles des droites BO_b, CO_b :

$$\frac{\beta}{\gamma} = \frac{\cos (\lambda - C)}{\cos (\lambda - B)}, \quad \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\cos (\mu - A)}{\cos (\mu - C)}, \quad \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\cos (\nu - B)}{\cos (\nu - A)}, \quad (15)$$

ou

$$\frac{\beta \cos B}{\gamma \cos C} = \frac{1 + \operatorname{tg} \lambda \operatorname{tg} C}{1 + \operatorname{tg} \lambda \operatorname{tg} B}, \text{ etc.}$$

Entre ces équations et la relation $\lambda + \mu + \nu = \pi$ ou

$$\operatorname{tg} \lambda + \operatorname{tg} \mu + \operatorname{tg} \nu = \operatorname{tg} \lambda \operatorname{tg} \mu \operatorname{tg} \nu,$$

éliminons λ, μ, ν ; il vient

$$\Sigma(\beta \cos B - \gamma \cos C)(\alpha \sin A - \beta \sin B)(\gamma \sin C - \alpha \sin A)$$
$$= (\alpha \cos A - \beta \cos B)(\beta \cos B - \gamma \cos C)(\gamma \cos C - \alpha \cos A). \quad (16)$$

Si l'on pose

$$\epsilon_a \equiv \beta \cos B - \gamma \cos C, \quad \delta_a \equiv \beta \sin B - \gamma \sin C, \dots$$

on peut écrire, pour le lieu du point S,

$$\epsilon_a \delta_b \delta_c + \epsilon_b \delta_c \delta_a + \epsilon_c \delta_a \delta_b = \epsilon_a \epsilon_b \epsilon_c. \quad (17)$$

Les équations $\epsilon_a = 0$, $\epsilon_b = 0$, ϵ_c représentent les hauteurs AA_h, BB_h, CC_h, et les équations $\delta_a = 0$, $\delta_b = 0$, $\delta_c = 0$ les médianes

AG, BG, CG. On voit immédiatement que le lieu passe par les points A ($\epsilon_a = 0$, $\delta_a = 0$), B, C, H ($\epsilon_a = \epsilon_b = \epsilon_c = 0$).

L'équation (16) se ramène à

$$\alpha(\beta^2 - \gamma^2)\cos(B - C) + \beta(\gamma^2 - \alpha^2)\cos(C - A) \\ + \gamma(\alpha^2 - \beta^2)\cos(A - B) = 0\,;$$

comme elle ne change pas quand on remplace α, β, γ, par $\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\beta}$, $\frac{1}{\gamma}$, le lieu est une cubique anallagmatique dans l'inversion triangulaire.

Cette courbe rencontre le côté BC en un troisième point A_j situé sur la droite $\gamma\cos(C - A) = \beta\cos(A - B)$; si B_j, C_j désignent les troisièmes points d'intersection des côtés CA, AB avec la cubique, les droites AA_j, BB_j, CC_j concourent au point J de coordonnées $\cos(B - C)$, $\cos(C - A)$, $\cos(A - B)$.

13. En multipliant les équations (15) membre à membre, on trouve la relation nécessaire entre les angles λ, μ, ν pour que les droites AO_a, BO_b, CO_c concourent en un même point ; elle est

$$\cos(\lambda - C)\cos(\mu - A)\cos(\nu - B) = \cos(\lambda - B)\cos(\mu - C)\cos(\nu - A)$$

ou

$$\Sigma(\operatorname{tg} A - \operatorname{tg} B)(\operatorname{tg} \nu - \operatorname{tg} C \operatorname{tg} \lambda \operatorname{tg} \mu) = 0.$$

M. Neuberg traite encore la question suivante :

Étant donnés deux tétraèdres $A_1A_2A_3A_4 \equiv T_a$, $B_1B_2B_3B_4 \equiv T_b$, *peut-on les rendre homologiques ou hyperboloïdiques en imprimant à* T_b *une translation ?*

1. Soit $C_1C_2C_3C_4 \equiv T_c$ une position de T_b telle que les droites A_1C_1, A_2C_2, A_3C_3, A_4C_4 concourent en un point S. On peut déterminer S en menant par A_1A_2, A_2A_3, A_3A_1 des plans respectivement parallèles aux droites B_1B_2, B_2B_3, B_3B_1. Alors les plans menés par A_4A_1, A_4A_2, A_4A_3 parallèlement à B_4B_1, B_4B_2, B_4B_3 devront passer par S. Il paraît donc que les tétraèdres T_a, T_b sont assujettis à trois conditions. Mais celles-ci se réduisent à deux.

En effet, après avoir déterminé le point S, comme il a été dit, coupons le trièdre $SA_1A_2A_3$ par le plan $B_1B_2B_3$; sur la section $D_1D_2D_3$ qui est homothétique au triangle $B_1B_2B_3$, construisons le tétraèdre $D_1D_2D_3D_4$ homothétique au tétraèdre T_b. Il suffit maintenant que les points S, D_4, A_4 soient en ligne droite, ce qui s'exprime par deux conditions. Car on pourra construire un tétraèdre T_c homothétique à $D_1D_2D_3D_4$ par rapport à S et égal à T_b.

On parvient à la même conclusion en observant que les faces homologues de deux tétraèdres homologiques se coupent sur un même plan. Par conséquent, les faces correspondantes de T_a, T_b doivent se couper suivant quatre droites parallèles à un même plan.

Soient, par rapport à trois axes quelconques Ox, Oy, Oz,

$$M_i x + N_i y + P_i z + Q_i = 0,$$
$$M'_i x + N'_i y + P'_i z + Q'_i = 0$$

les équations des faces de T_a, T_b opposées aux sommets A_i, B_i; les paramètres directeurs de l'intersection de ces plans sont les mineurs du système

$$\left\| \begin{matrix} M_i & N_i & P_i \\ M'_i & N'_i & P'_i \end{matrix} \right\|,$$

nous les désignerons par μ_i, ν_i, π_i. Si les quatre droites analogues sont parallèles au plan $Ex + Fy + Gz + H = o$, on a les quatre conditions

$$E\mu_i + F\nu_i + G\pi_i = 0, \qquad (i = 1, 2, 3, 4).$$

Pour qu'elles soient compatibles, on doit avoir (en employant une notation connue)

$$\left\| \begin{matrix} \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 & \mu_4 \\ \nu_1 & \nu_2 & \nu_3 & \nu_4 \\ \pi_1 & \pi_2 & \pi_3 & \pi_4 \end{matrix} \right\| = 0\,;$$

en d'autres termes, deux des déterminants obtenus par la suppression d'une colonne de la matrice précédente doivent être nuls.

2. Soit maintenant T_c une position de T_b telle que les droites A_1C_1, A_2C_2, A_3C_3, A_4C_4 appartiennent à un même système réglé.

Prenons T_a pour tétraèdre de référence et désignons par

$(x_{i1}, x_{i2}, x_{i3}, x_{i4})$, $(y_{i1}, y_{i2}, y_{i3}, y_{i4})$ les coordonnées normales absolues des points B_i, C_i. Les quatre droites B_1C_1, B_2C_2, B_3C_3, B_4C_4 sont égales et parallèles; appelons α_1, α_2, α_3, α_4 leurs projections sur les hauteurs de T_a et f_1, f_2, f_3, f_4 les aires des faces de T_a. Nous aurons

$$y_{i1} = x_{i1} + \alpha_1, \quad y_{i2} = x_{i2} + \alpha_2, \quad y_{i3} = x_{i3} + \alpha_3, \quad y_{i4} = x_{i4} + \alpha_4$$

et comme

$$f_1 y_{i1} + f_2 y_{i2} + f_3 y_{i3} + f_4 y_{i4} = f_1 x_{i1} + f_2 x_{i2} + f_3 x_{i3} + f_4 x_{i4},$$

les quantités α_1, α_2, α_3, α_4 sont liées par la relation

$$f_1\alpha_1 + f_2\alpha_2 + f_3\alpha_3 + f_4\alpha_4 = 0. \tag{1}$$

Les conditions de la question donnent

$$y_{12}\, y_{23}\, y_{31} = y_{21}\, y_{32}\, y_{13}, \quad y_{23}\, y_{34}\, y_{42} = y_{32}\, y_{43}\, y_{24},$$
$$y_{34}\, y_{41}\, y_{13} = y_{43}\, y_{14}\, y_{31}, \quad y_{41}\, y_{12}\, y_{24} = y_{14}\, y_{21}\, y_{42}\,;$$

elles se réduisent à trois. Introduisons les valeurs des y dans les trois premières ; il vient

$$(x_{12} + \alpha_2)(x_{23} + \alpha_3)(x_{31} + \alpha_1) = (x_{21} + \alpha_1)(x_{32} + \alpha_2)(x_{13} + \alpha_3),$$
$$(x_{23} + \alpha_3)(x_{34} + \alpha_4)(x_{42} + \alpha_2) = (x_{32} + \alpha_2)(x_{43} + \alpha_3)(x_{24} + \alpha_4),$$
$$(x_{34} + \alpha_4)(x_{41} + \alpha_1)(x_{12} + \alpha_2) = (x_{43} + \alpha_3)(x_{14} + \alpha_4)(x_{21} + \alpha_1).$$

Ces équations qui sont du second degré par rapport à α_1, α_2, α_3, α_4, étant jointes à l'équation (1), déterminent les inconnues ; le problème admet donc huit solutions.

3. On peut se demander si un déplacement convenable de T_b peut rendre les deux tétraèdres T_a, T_b homologiques.

Ce problème revient à trouver deux points S, S′ tels que les gerbes $S(A_1A_2A_3A_4)$, $S'(B_1B_2B_3B_4)$ soient superposables. Les points S, S′ sont soumis à cinq conditions : il suffira d'exprimer, par exemple, que les angles A_1SA_2 et $B_1S'B_2$, A_2SA_3 et $B_2S'B_3$, $A_3S'A_1$ et $B_3S'B_1$, $A_4S_1A_1$ et $B_4S'_1B_1$, A_4SA_2 et $B_4S'_1B_2$ sont égaux (ou supplémentaires), ce qui donne cinq équations entre les coordonnées (rectangulaires) des points S et S′. En éliminant les coordonnées de S′ ou celles de S, on obtient deux équations représentant une courbe sur laquelle doit se trouver S ou S′.

Qu'il me suffise d'indiquer cette solution provisoire d'une question qui demanderait des développements très étendus.

M. de la Vallée Poussin fait une communication *Sur les enveloppes qui ont un contact d'ordre supérieur*. Ce travail sera publié ailleurs.

Le R. P. Bosmans fait connaître diverses particularités de la vie de Grégoire de S. Vincent qu'il a glanées dans la correspondance des Généraux de la Compagnie de Jésus avec les Pères des provinces de Flandre et de Bohême.

En 1616, Grégoire de S. Vincent demanda et obtint l'autorisation de se consacrer aux Missions de la Chine ; mais ce projet n'eut pas de suite.

Grégoire de S. Vincent était versé dans l'architecture : il s'est occupé très activement, en 1630, de la reconstruction du collège de Prague et, en 1661, de la transformation de celui de Gand.

En 1629, à sa demande, ses supérieurs lui ont accordé comme aide Théodore Moretus, pour publier son grand ouvrage. Ils lui permirent aussi, en 1630, d'aller rejoindre le P. della Faille, à Madrid, pour y enseigner les mathématiques ; la santé de Grégoire de S. Vincent l'empêcha d'entreprendre ce voyage.

L'*Opus austriacum* (1647) de Grégoire de S. Vincent fut tout de suite apprécié avec ses mérites et ses défauts par les Généraux Caraffa, Nickel, Oliva, comme en témoignent leurs lettres adressées à lui ou à ses supérieurs.

M. Mansion fait une communication intitulée : *Raisons en faveur de la formule définitive de Gauss pour la mesure de la précision d'un système d'observations.*

1. *Données.* Pour fixer les idées, considérons cinq équations linéaires à deux inconnues,

$$a_1x + b_1y = c_1, \quad \ldots, \quad a_5x + b_5y = c_5, \tag{1}$$

incompatibles entre elles, quand on les prend trois à trois, donnant, au contraire, des valeurs déterminées pour les inconnues, quand on les associe deux à deux. Les a, b, c, sont les grandeurs observées, x, y les paramètres cherchés.

Posons, suivant l'usage,

$$aa = a_1^2 + \cdots + a_5^2, \qquad ab = a_1 b_1 + \cdots + a_5 b_5,$$

et de même dans tous les cas où nous rencontrons des sommes de carrés ou de produits analogues.

Les équations normales données par la méthode des moindres carrés sont

$$(aa)\mathrm{X} + (ab)\mathrm{Y} = ac, \qquad (ab)\mathrm{X} + (bb)\mathrm{Y} = bc. \tag{2}$$

Les valeurs X, Y, introduites à la place de x et y dans les équations (1) donnent naissance à des résidus $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_5$ définis par les relations

$$a_1\mathrm{X} + b_1\mathrm{Y} = c_1 + \epsilon_1, \;\ldots,\; a_5\mathrm{X} + b_5\mathrm{Y} = c_5 + \epsilon_5. \tag{3}$$

Ces résidus vérifient les deux égalités

$$a\epsilon = 0, \qquad b\epsilon = 0, \tag{4}$$

et sont tels que la somme

$$\epsilon\epsilon = \epsilon_1^2 + \cdots + \epsilon_5^2$$

est plus petite pour les valeurs de X, Y que pour n'importe quelles autres valeurs attribuées à x et à y dans les équations données.

2. *Relation entre* $\epsilon\epsilon$ *et la somme des carrés des vrais résidus.* Comme Gauss l'a remarqué au § 37 de son grand *Mémoire sur la méthode des moindres carrés*, la somme des carrés des résidus correspondant aux vraies valeurs de x ne coïncidera avec $\epsilon\epsilon$ que dans le cas peu probable où X, Y donnés par les équations normales (2) sont les vraies valeurs des paramètres à chercher.

Soient $\mathrm{E}_1, \ldots, \mathrm{E}_5$ les résidus correspondant à ces vraies valeurs $\mathrm{X} + \Delta\mathrm{X}$, $\mathrm{Y} + \Delta\mathrm{Y}$, d'ailleurs inconnues, des paramètres à chercher. On aura pour la première des équations (1), quand on y introduit $\mathrm{X} + \Delta\mathrm{X}$, $\mathrm{Y} + \Delta\mathrm{Y}$ à la place de x et y,

$$a_1(\mathrm{X} + \Delta\mathrm{X}) + b_1(\mathrm{Y} + \Delta\mathrm{Y}) = c_1 + \mathrm{E}_1,$$

ou, d'après la définition de ϵ_1,

$$E_1 - \epsilon_1 = a_1\Delta X + b_1\Delta Y.$$

De même,

$$E_2 - \epsilon_2 = a_2\Delta X + b_2\Delta Y, \ \ldots, \ E_5 - \epsilon_5 = a_5\Delta X + b_5\Delta Y \quad (5)$$

En multipliant ces équations par ϵ_1, ..., ϵ_5, ajoutant et tenant compte des relations (4), il vient

$$E\epsilon - \epsilon\epsilon = 0.$$

Les mêmes équations (5) multipliées par E_1, ..., E_5 et ajoutées, donnent

$$EE - E\epsilon = (aE)\Delta X + (bE)\Delta Y,$$

c'est-à-dire, puisque $E\epsilon = \epsilon\epsilon$,

$$EE - \epsilon\epsilon = (aE)\Delta X + (bE)\Delta Y.$$

On peut transformer le second membre de cette relation comme il suit. Ordonnons la valeur de X tirée des équations (2), d'après les quantités c_1, ..., c_5 en posant

$$X = \lambda_1 c_1 + \cdots + \lambda_5 c_5.$$

Les coefficients λ vérifient les relations

$$\lambda a = 1, \qquad \lambda b = 0, \qquad \lambda\epsilon = 0 \quad (6)$$

comme on le voit aisément. En multipliant les équations (5) par λ_1, ..., λ_5 et ajoutant, on trouve, en tenant compte des relations (6),

$$\Delta X = \lambda E.$$

Si l'on a

$$Y = \mu_1 c_1 + \cdots + \mu_5 c_5,$$

on trouve de même

$$\Delta Y = \mu E.$$

Donc enfin, on peut écrire pour $EE - \epsilon\epsilon$, la valeur définitive

$$EE - \epsilon\epsilon = (aE)(\lambda E) + (bE)(\mu E).$$

3. *Valeur moyenne de* EE *d'après Gauss.* « Dans l'ignorance où nous sommes, dit en substance Gauss, au § 38 de son *Mémoire,* de la valeur des erreurs $E_1, \ldots, E_5$ calculons la valeur moyenne de l'expression $EE - \epsilon\epsilon$, en remplaçant les carrés $E_1^2, \ldots, E_5^2$ par leur valeur moyenne $(EE : 5)$ et en omettant les termes E_1E_2, E_1E_3, etc., dont la valeur moyenne est zéro. » La valeur moyenne de chacun de ces produits, de E_1E_2, par exemple, est nulle, parce que l'on peut attribuer à E_1 une valeur quelconque entre 0 et $\pm$ M, M étant la limite supérieure admissible pour ces résidus, tandis que l'autre facteur E_2 est fixe. Quant à la valeur moyenne de chacun des cinq résidus au carré, $E_1^2, \ldots, E_5^2$, quand $E_1, \ldots, E_5$ varie de 0 à $\pm$ M, elle est la même pour tous et, par suite, égale à $(EE : 5)$.

En vertu de ces raisonnements, la valeur moyenne de $(aE)(\lambda E)$ est

$$(\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_5 a_5)\frac{EE}{5} = \frac{EE}{5}$$

d'après la première relation (6). De même, la valeur moyenne de $(bE)(\lambda E)$ est aussi $\frac{1}{5}(EE)$.

On aura donc, en moyenne,

$$EE - \epsilon\epsilon = \frac{2}{5}EE,$$

ou

$$\frac{EE}{5} = \frac{\epsilon\epsilon}{5-2}.$$

Si les équations données contiennent k inconnues au lieu de 2 et sont en nombre n, la formule finale est, après extraction de la racine carrée des deux membres,

$$\sqrt{\frac{EE}{n}} = \sqrt{\frac{\epsilon\epsilon}{n-k}}.$$

« La vraie valeur EE de la somme des carrés des erreurs, dit Gauss, pourra, suivant les cas que le hasard présentera, être plus grande ou plus petite que celle que nous venons d'indiquer, mais la différence sera d'autant moindre que le nombre des observations sera plus grand ; l'expression $\sqrt{\epsilon\epsilon : (n-k)}$ pourra être regardée comme une valeur approchée de la moyenne des erreurs. »

4. *Mesure de la précision d'un ensemble d'observations.* Quoi que l'on pense de la force probante des considérations précédentes sur le calcul du résidu quadratique moyen $\sqrt{[\epsilon\epsilon : (n-k)]}$, *l'inverse de cette expression*

$$h = \sqrt{\frac{n-k}{\epsilon\epsilon}},$$

est très bien choisi pour mesurer la précision d'un système d'observations.

1° En effet, si $n = k$, on a $n - k = 0$, $\epsilon\epsilon = 0$ et h est *indéterminé,* comme cela doit être ; car il est impossible de parler de la précision d'un système d'observations, s'il ne conduit pas à plus d'équations que d'inconnues.

2° On ne peut pas remplacer dans h, k par un nombre plus petit, k' et, en particulier, on ne peut pas faire $k = 0$. En effet, la formule

$$h = \sqrt{\frac{n-k'}{\epsilon\epsilon}}, \qquad k' < k$$

donnerait au système une *précision infinie* quand $n = k$, puisqu'alors $\epsilon\epsilon = 0$, et $n - k' = k - k'$ est différent de zéro.

3° On ne peut pas non plus supposer que

$$h = \sqrt{\frac{n-k''}{\epsilon\epsilon}}, \qquad k'' > k,$$

car cette formule donnerait une *précision nulle* au système où $n = k''$.

Les considérations précédentes prouvent que, dans la théorie de l'erreur moyenne due à Laplace, qui est tout autre que celle de Gauss, on doit prendre pour mesure de la précision

$$\frac{n-k}{\epsilon\,.\,1};$$

le dénominateur représente la somme des résidus pris en valeur absolue.

Le R. P. Willaert fait une communication *Sur la probabilité d'amener* p *séries de* k *rouges consécutives dans une suite de* n *épreuves à la roulette.*

Supposons formé le tableau des 2^n arrangements avec répétition des objets N et R, n à n. Évaluons-y le nombre d'arrangements comprenant p séries de k rouges. Nous désignerons ce nombre par le symbole à trois variables K_n^p. La probabilité cherchée a pour valeur $2^{-n} K_n^p$.

Le calcul direct de ces nombres K est inabordable. La remarque suivante nous permettra d'arriver au résultat par une formule de récurrence. On passe, du tableau des arrangements $n - 1$ à $n - 1$, au tableau des arrangements n à n, en écrivant deux fois à la suite le tableau primitif et en le bordant, la première fois d'une colonne de N, la seconde fois d'une colonne de R. En appliquant ce procédé à partir de la combinaison des objets 1 à 1, on obtient le tableau suivant, où les signes + et — désignent les rouges et les noires :

—	—	—	—
+	—	—	—
—	+	—	—
+	+	—	—
—	—	+	—
+	—	+	—
—	+	+	—
+	+	+	—
—	—	—	+
+	—	—	+
—	+	—	+
+	+	—	+
—	—	+	+
+	—	+	+
—	+	+	+
+	+	+	+

Le tableau entier se divise ainsi en groupes d'arrangements terminés respectivement par 0, 1, 2, ..., n signes +.

En comptant, dans chacun de ces groupes, les arrangements qui renferment p séries de k rouges, on a

$$\begin{aligned} K_n^p = K_{n-1}^p + K_{n-2}^p + \cdots + K_{n-k}^p + K_{n-k-1}^{p-1} \\ + K_{n-k-2}^p + \cdots + K_{(k+1)p-1}^p \end{aligned} \tag{1}$$

ou

$$K_n^p = K_{n-k-1}^{p-1} - K_{n-k-1}^p + \sum_{i=n-1}^{(k-1)p-1} K_i^p. \tag{2}$$

En raisonnant de même pour évaluer le nombre d'arrangements ne contenant aucune série de k rouges ($p = 0$), on est amené à étendre l'application du symbole K_i^j à des valeurs nulles et négatives des indices.

On peut écrire

$$K_n^p = K_{n-k-1}^{p-1} - K_{n-k-1}^p + \sum_{i=n-1}^{-\infty} K_i^p, \tag{3}$$

avec les conditions

$$\begin{aligned} K_i^j = 1 \qquad \text{pour} \qquad i = (k+1)j - 1, \\ K_i^j = 0 \qquad \text{pour} \qquad i < (k+1)j - 1. \end{aligned} \tag{4}$$

La formule (3) permet de calculer par récurrence toutes les valeurs de K_n^p à partir des éléments initiaux $K_{(k+1)j-1}^j$, fournis par l'égalité (4). On est conduit ainsi au tableau suivant où les éléments initiaux, marqués d'un astérisque, suffisent à construire tous les autres nombres du tableau. Ainsi un nombre quelconque est égal à la somme de tous ceux qui sont au-dessus de lui, somme où l'on a remplacé le nombre qui précède de k rangs le nombre cherché, par le nombre de même rang de la colonne précédente.

p	K = 1								K = 2						K = 3				K = 4			
	0	1	2	3	4	5	6	7	0	1	2	3	4	5	0	1	2	3	0	1	2	3
n																						
−1	1*								1*						1*				1*			
0	1								1						1				1			
1	1	1*							2						2				2			
2	2	2							3	1*					4				4			
3	4	3	1*						6	2					7	1*			8			
4	7	6	3						11	5					14	2			15	1*		
5	12	13	6	1*					21	10	1*				27	5			30	2		
6	21	26	13	4					39	22	3				52	12			59	5		
7	37	50	30	10	1*				73	46	9				101	26	1*		116	12		
8	65	96	66	24	5				136	97	22	1*			195	58	3		228	28		
9	114	184	139	59	15	1*			254	200	54	4			377	126	9		449	62	1*	
10	200	350	288	140	40	6			474	410	126	14			729	270	25		883	138	3	
11	351	661	591	318	150	21	1*		885	832	290	40	1*		1409	575	63	1*	1737	302	9	
12	616	1242	1199	704	266	62	7		1652	1679	651	109	5		2724	1212	156	4	3417	654	25	
13	1081	2324	2406	1533	645	174	28	1*	3084	3368	1440	280	20		5266	2538	374	14	6722	1404	66	
14	1879	4332	4785	3288	1515	468	91	8	5757	6725	3138	698	65	1*	10180	5284	876	44	13223	2995	165	1*

Les nombres k sont astreints à vérifier les identités suivantes :

$$\sum_{i=0}^{+\infty} K_n^i = 2^n,$$

$$\sum_{i=0}^{+\infty} i K_n^i = 2^{n-k-2}(n-k+3)\,;$$

la première a un sens évident, la seconde exprime que le nombre total de séries de k rouges dans le tableau des 2^n arrangements est égal à $2^{n-k-2}(n-k+3)$, résultat que nous avions trouvé dans une communication précédente.

En exprimant que K_n^p est égal à la somme des nombres d'arrangements dont la m^{me} série commence au rang $i+1$, $i+2$, ..., on trouve une série d'identités :

$$K_n^p = \sum_{i=(k+1)(m-1)}^{n-k-(k+1)(p-m)} K_{i-1}^{m-1} \cdot K_{n-k-i-1}^{p-m},$$

où m peut prendre les valeurs 1, 2, ..., p.

En tenant compte des inégalités (4), on peut écrire, plus simplement,

$$K_n^p = \sum_{i=-\infty}^{i=+\infty} K_{i-1}^{m-1} \cdot K_{n-k-i-1}^{p-m},$$

qui permet de calculer dans le tableau une colonne quand on connaît deux des colonnes précédentes.

Seconde section

—

Les membres de la section visitent le laboratoire de M. Kläge, dont l'outillage mécanique et électrique, remarquablement développé, répond à toutes les exigences de la construction et de l'étalonnage des instruments puissants et des appareils délicats réclamés par les usines et les laboratoires.

Le R. P. Wulf, S. J., présente le rapport, dont il a été chargé à la session d'octobre, sur le mémoire de M. Delemer, *La vibration pendulaire, son rôle véritable en acoustique.*

M. le Professeur Delemer se demande dans ce travail si les solutions particulières déduites de la théorie mathématique des corps vibrants donne une image exacte des mouvements qu'exécutent les corps sonores et que l'on peut enregistrer par diverses méthodes, par exemple au moyen du gramophone. Il insiste à bon droit sur ce point que l'on ne peut considérer ces solutions particulières comme des solutions du problème physique qu'à la condition d'avoir, au préalable, démontré que les corps sonores vibrent réellement suivant une loi sinusoïdale. Or on doit reconnaître avec l'auteur du mémoire que les exposés classiques touchent à peine cette question.

A vrai dire, le rapporteur est d'avis que cette condition est réalisée dans la plupart des cas. Cela découle de cette propriété des corps vibrants que les forces ramenant le mobile vers sa position d'équilibre sont, pour les amplitudes pratiquement réalisées, une fonction linéaire de sa distance à cette position d'équilibre.

Toutefois il reconnaît la nécessité de soumettre ce point à un examen approfondi : le mérite de M. Delemer est d'avoir attiré expressément l'attention sur cette nécessité. Il serait à souhaiter que M. le professeur entreprît lui-même cette recherche ultérieure.

Le R. P. Wulf et M. R. d'Adhémar, second rapporteur, proposent l'impression du présent mémoire dans les Annales de la Société.

Cette conclusion est adoptée. Le mémoire de M. Delemer est publié dans la seconde partie des Annales.

M. l'abbé Th. Annycke présente un mémoire intitulé *Sur le calcul du pouvoir refroidissant des courants fluides.* M. Delemer et le R. P. Schaffers, S. J., sont nommés rapporteurs.

M. Van de Vyver fait la communication suivante : *Détermination du coefficient moyen de dilatation linéaire à l'aide du théodolite d'Hurlimann.* — Le problème que nous avions à résoudre était le suivant : déterminer le coefficient de dilatation linéaire d'un corps dont on ne possède qu'un échantillon de 30 cm. de longueur, et qui ne peut être, ni plongé dans un liquide, ni soumis à l'action de la vapeur d'eau chauffée ; les écarts entre les températures initiale et finale ne devant d'ailleurs pas dépasser au maximum 50 à 60°C. (*).

Un examen attentif de la question prouve que, vu les données du problème, aucune méthode usuelle n'était applicable. Au surplus, nous ne possédions aucun des appareils comparateurs, ou autres, que nécessitent ces méthodes.

La nature et les dimensions du corps nous empêchaient même d'appliquer la méthode que nous avons imaginée en 1898 (**).

On aurait pu peut-être, mais avec des précautions toutes spéciales, employer la méthode des franges, due à Fizeau. Mais, vu le corps en expérience, l'opération eût présenté de sérieuses difficultés, et nous ne possédions pas non plus l'appareil de Fizeau !

Nous étions donc réduit à résoudre la question avec les ressources ordinaires de notre laboratoire. C'est alors que nous eûmes l'idée de recourir au théodolite d'Hurlimann.

Ce théodolite est, comme on le sait, un excellent appareil de petite triangulation et de topographie.

Il présente sur ses congénères un avantage précieux qui le met au premier plan pour les levers en pays neufs ; il permet en effet de déterminer, outre les coordonnées habituelles qu'exigent les opérations cartographiques, la déclinaison magnétique d'un lieu, avec beaucoup plus d'exactitude qu'on ne pourrait le faire avec un vulgaire déclinatoire.

Pour y arriver, l'appareil porte fixée à l'axe vertical et sous le cercle d'azimut, une caisse rectangulaire en cuivre dans laquelle se place, sur un pivot *ad hoc,* une aiguille aimantée longue de 17 cm., à pointes très effilées, et que l'on peut viser très exactement avec la lunette du théodolite. Cette lunette exige donc à la fois des visées à longues portées et des visées à très courtes distances.

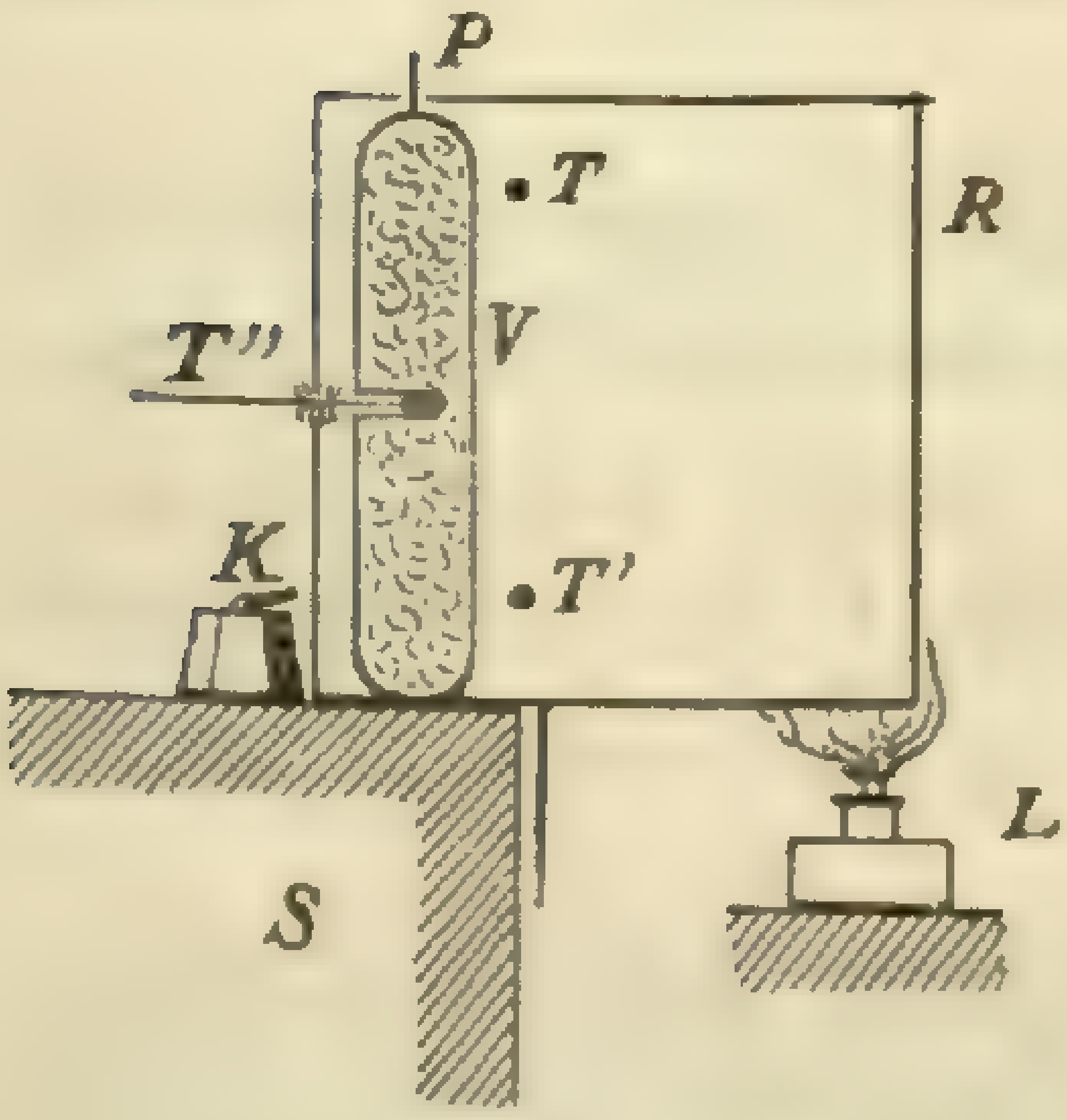
(*) Il s'agissait d'un produit employé dans les constructions légères et qui porte le nom de « *masse voltz* ». C'est un mélange d'environ cinq parties de scories ou de coke fin, 2 1/2 parties de gypse, 1 1/2 de chaux, et de colle dont la quantité varie suivant le besoin ; le tout amalgamé avec des couches de fibres d'alpha ou d'autres fibres végétales.

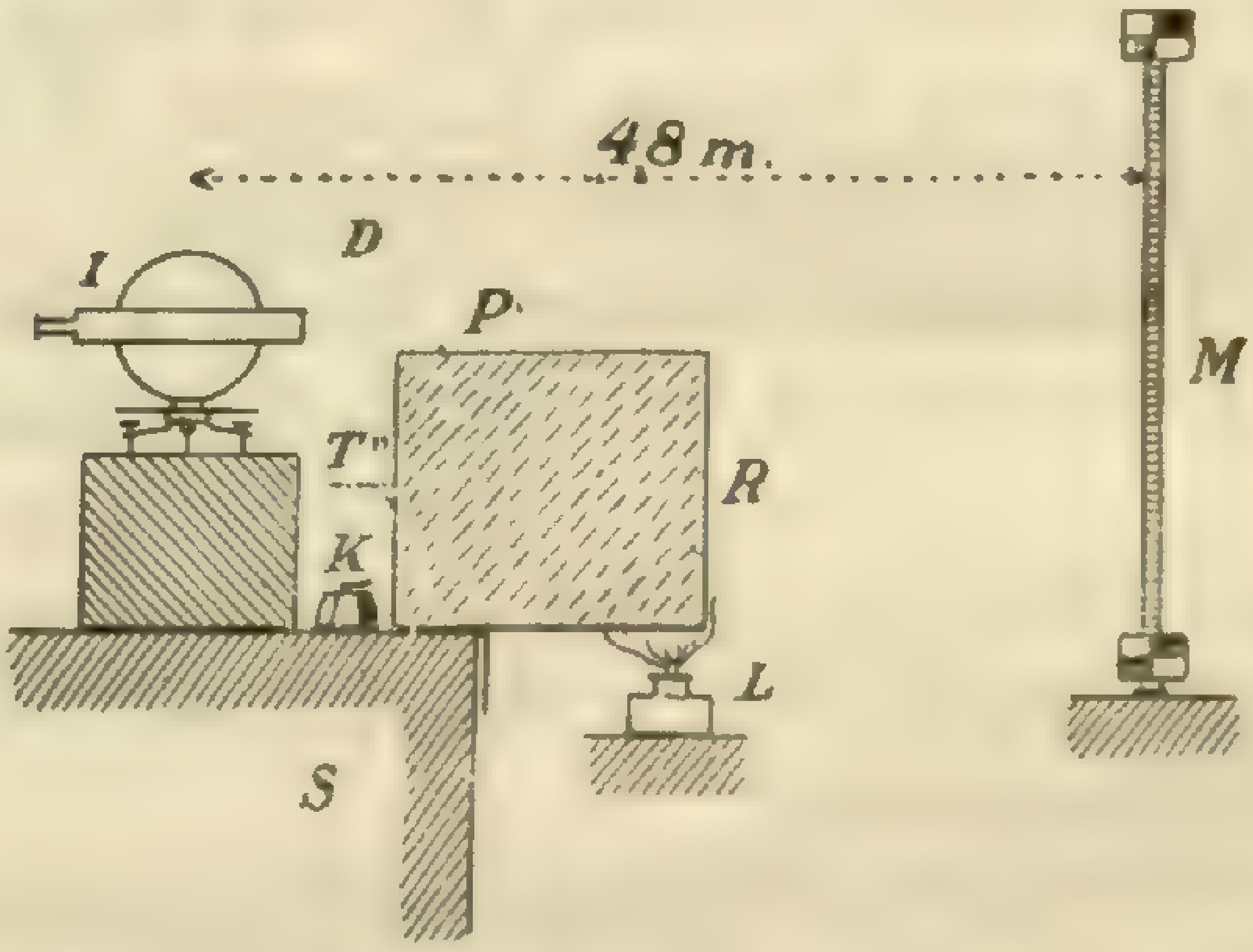
(**) BULL. DE L'ACAD. ROY. DE BELGIQUE, 3e série, t. XXXV, n° 5, 1898.

A cet effet, le collier de l'objectif est garni d'une bague mobile dans laquelle est enchâssée une seconde lentille qui, amenée devant l'objectif, transforme la lunette en un véritable microscope.

C'est précisément ce dispositif ingénieux, emprunté, croyons-nous, au déclinomètre de Gambey qui nous a permis de solutionner le problème qui nous intéressait.

Le schéma de l'appareil que nous avons employé nous permettra de simplifier les explications.





R, Réservoir métallique : étuve dans laquelle est placé le corps en expérience. Ce réservoir est mis en porte à faux sur le support S ; un contrepoids K maintient l'équilibre.

V, Corps en expérience, il est posé *directement* sur le support.

P, Fine pointe d'acier de 2 à 3 cm. de longueur, enchâssée dans la partie supérieure de la masse V.

T,T', Projections de deux thermomètres portés par le réservoir et voisins du corps.

T'', Thermomètre encastré à peu près au centre de la masse V. Des expériences préliminaires nous avaient prouvé que, vu la porosité du corps, l'indication de T'' pouvait, sans erreur appréciable, être prise comme température moyenne du corps.

L, Lampe à alcool.

I, Théodolite, dont les pieds sont fixés sur un bloc en granit ; ce bloc est fixé lui-même sur S.

D, Lentille qui se place devant l'objectif.

M, Mire parlante graduée au centimètre, placée verticalement à une grande distance du théodolite. Dans nos expériences, la plus grande distance dont nous disposions était de 48 mètres.

Le théodolite est anallatique et donne donc, en même temps, la distance à la mire.

Voici comment on opère. Les trois thermomètres étant en équilibre et à une même température, on vise au microscope la pointe P et, par les vis de rappel de l'instrument, on ramène cette pointe exactement au fil du milieu du réticule. Cela étant, et sans déranger la lunette, on écarte la lentille supplémentaire, ce qui permet de viser la mire et de noter les divisions en regard des fils du réticule. La lecture se fait au centimètre et l'estime donne facilement le millimètre.

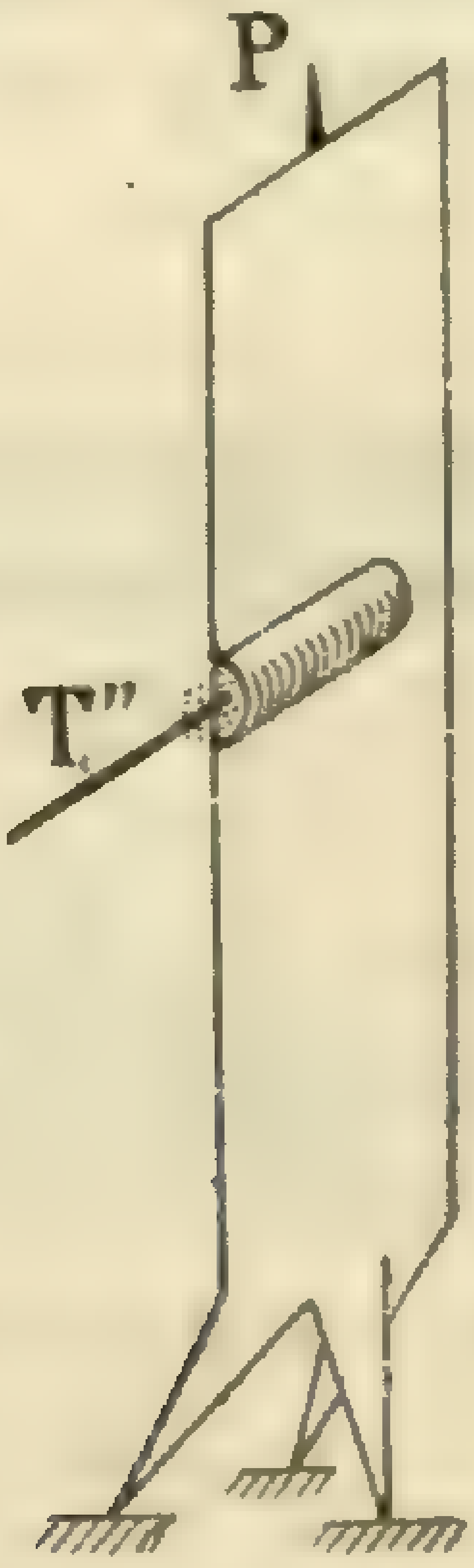
On ramène ensuite la lentille L devant l'objectif ; puis on chauffe le réservoir et, en réglant et la flamme et la position de la lampe, on amène les trois thermomètres vers la même température ; on maintient cet état jusqu'à ce que la pointe P mise en contact avec le fil milieu du réticule, ne présente plus aucun signe d'allongement.

Ce résultat étant atteint, on vise de nouveau la mire ; la différence des deux lectures donne la quantité dont le rayon visuel tangent à la pointe s'est relevé au cours des opérations.

Connaissant les distances de l'axe horizontal de rotation de la lunette, à la pointe et à la mire, on peut en déduire l'allongement de la masse V entre les limites de températures indiquées par le thermomètre T''. Il reste à réduire cette valeur à l'unité pour obtenir le coefficient cherché.

Plusieurs séries de mesures faites sur le corps en expérience et à des températures différentes nous ont donné des résultats très concordants.

Voulant du reste contrôler le degré d'exactitude que présente la méthode, nous avons employé le même procédé pour des métaux tels que le cuivre, le fer, etc. dont les coefficients moyens de dilatation linéaire sont connus. Nous avons pris des lames métalliques de 30 cm. de longueur, maintenues verticalement. A cet effet, nous avons disposé la partie inférieure de chaque lame en griffe à trois branches effilées, de manière à réduire au minimum les surfaces de contact avec le marbre du support. La pointe P est rivée à la partie supérieure de la tige, et le thermomètre T″ est logé dans un étui de même métal faisant corps avec la plaque ; un bourrelet d'ouate comprimé forme collet et obture l'étui tout autour du thermomètre.



Les résultats que nous avons obtenus concordent en général jusqu'à la troisième décimale significative, avec ceux donnés par les autres méthodes, ce qui confirme la valeur du procédé ; aussi croyons-nous que, pour les besoins ordinaires de la pratique, il peut être employé en toute sécurité.

La même méthode nous a permis en outre de déterminer l'allongement que subissait la substance en expérience sous l'effet du mouillage.

Pour y arriver, nous avons simplement sorti le corps de l'étuve et nous l'avons placé devant le théodolite comme s'il s'agissait de chercher le coefficient de dilatation. Le corps étant sec, nous avons visé d'abord la pointe, puis la mire et nous avons refait les mêmes opérations après avoir aspergé le corps. Nous avons pu aussi trouver l'allongement cherché, bien plus simplement et plus exactement que par n'importe quel autre procédé.

Troisième section

M. le professeur Kaisin et le R. P. Schmitz, S. J., sont nommés commissaires pour un mémoire sur *La Campine,* envoyé en réponse à une des questions de concours.

Conformément aux conclusions des rapporteurs : A) M. Maes et le R. P. Van den Gheyn, S. J., B) M. Kaisin et M. Van Ortroy, la Section renvoie aux auteurs, pour être complétés ou rectifiés : I) le travail de M. Viaene : *La forêt congolaise et ses habitants ;* II) *Une série de cartes manuscrites du Congo belge*, dressées par M. Maes.

Sur les rapports favorables de M. F. Meunier et du R. P. Dierckx, S. J., la section vote l'impression de la note suivante du R. P. Longin Navas, S. J., *Osmylides exotiques (insectes névroptères) nouveaux.*

En étudiant les Osmylides du Musée de Paris, j'ai trouvé quelques espèces qui m'ont semblé inédites et dont je donne ici les diagnoses. En même temps, j'ai revu ma collection où se trouvait aussi une espèce, également nouvelle, dont la description a été ajoutée aux autres.

Osmylus hauginus, sp. nov.

Minor, fusco-ferrugineus.

Caput testaceum, fronte macula ante antennarum basim et alia grandiore in clypeo et labro in triangulum ∵ dispositis ; palpis tenuibus, acutis ; antennis, præter duos articulos basilares fuscos, stramineis ; singulis articulis apice puncto fusco antice notatis.

Prothorax elongatus, marginibus parallelis, testaceo-rufus, ad latera infuscatus, pilis longis hirsutus. Meso- et metanotum ferruginea, fusco obscurata.

Abdomen ferrugineum, pilis longis pallidis, inferne pallidius, superne singulis segmentis margine postico fusco fasciatis.

Pedes straminei, omnibus tibiis dorso puncto fusco notatis ad medium, præterea tibiis anterioribus alio puncto fusco prope basim et ad apicem ; tarsorum articulis apice fusco ; unguibus arcuatis, divaricatis.

Alæ hyalinæ, irideæ, apice acutæ, atomis fuscis quasi arena adspersæ ; venis stramineis, fusco adspersis ; venulis fuscis et stramineis mistis, pilis concoloribus, stigmate albo, parum visibili ; series venularum gradatarum completæ.

In ala anteriore campus costalis venulis simplicibus, stigmate

macula fusco-ferruginea interna, alia externa exigua marginali. Campus subcostalis maculis notatus, 4 primis fuscis, reliquis 3-5 ferrugineis, evanescentibus. Duæ maculæ in disco fusco-ferrugineæ, altera initio seriei internæ venularum gradatarum, alia versus finem seriei externæ. Præter has aliæ plurimæ exiguæ tenuesque, veluti umbra, nebula ad medium cubiti usque ad marginem posticum recurrente et evanescente.

Ala posterior vix furcata nisi in venulis ; præterea duæ tresve maculæ exiguæ, una in serie gradata externa, duabus ante medium cubiti et ad marginem posteriorem pertingentibus.

Longit. corp.	7,5	mm.
— alæ anter.	16,5	»
— alæ poster.	15,5	»

Patrie : Bas-Ogooué (Afrique) entre Lambaréné et la mer, E. Haug, 1901 (Mus. de Paris).

Dictyosmylus, gen. nov.

Étymologie : δίκτυον, filet ; allusion à la réticulation de l'aile.

Simile *Osmylo*. Campus costalis in ala anteriore reticulatus, venulis transversis inter venulas costales in series dispositis in unam duasve ad medium campi, in tres quatuorve prope basim ; venula recurrente basilari cellulam oblongam liberante. Venulæ costales pleræque ad marginem furcatæ. Cellulæ discales et marginales posteriores pleræque hexagonales. Series venularum gradatarum bina.

Dictyosmylus lunatus, sp. nov.

Fusco-ferrugineus, alis hyalinis.

Caput vertice fascia semilunari eburnea transversa pone antennas ; fronte testacea ; palpis elongatis, stramineis ; antennis mediocribus, pilosis, fusco-rufis.

Prothorax longior quam latior, marginibus lateralibus subparallelis, superne nitens, ad latera pilis longis tenuibus rufis hirtus. Meso- et metanotum sublævia, nitida.

Abdomen fusco-rufum, apice ferrugineo, pilis albidis vestitum.

Pedes graciles, ferruginei, pilis concoloribus ; tarsis primo articulo longo, tribus sequentibus subæqualibus, brevibus, quinto primo longiore ; unguibus arcuatis, arolio bispinoso.

Alæ grandes, amplæ, apice acutæ ; membrana violaceo valde iridea ; vena subcostali subtota flavida ; radiali magnam partem, fusco alternatim striata, reliquis fuscis pallido mistis ; venulis plerisque fuscis. Fimbriæ pilique reticulationis ferruginei.

Ala anterior campo costali ampliato, paulo post basim usque ad tertium apicale reticulato, venulis transversis in 1-4 series dispositis ; venulis costalibus plerisque ad marginem furcatis. Stigma venulis densis parallelis simplicibus obscuratum. Sector radii 12-15 ramos emittens. Medium alæ et campus marginalis posterior totus cellulis reticulatus plerisque hexagonalibus. Pupilla circularis ad medium alæ in medio cellulæ sita. Præter hanc 7 maculæ valde exiguæ fuscæ, 1ª in anastomosi ramorum cubiti, 2ª et 3ª in serie venularum gradatarum externa, 4ª in ipso apice, 5ª, 6ª et 7ª in campo marginali pone et inter primam et pupillam. Vena procubitalis initio valde arcuata, ad angulum divisa. Vena procubitalis initio tortuosa, mox in ramos evanescens.

Ala posterior penitus immaculata præter umbras ferrugineas ad stigma et atomos ferrugineos ad marginem externum. Campus costalis basi angustus, ante medium parum ampliatus, venulis in prima parte simplicibus, in secunda furcatis. Cellulæ discales pleræque hexagonales. Campus marginalis posterior paucissimis venulis transversis, venulis marginalibus plerisque ad marginem furcatis, aliquot simplicibus.

Longit. corp.	14-16	mm.
— alæ anter.	26-28	»
— — poster.	22-24	»

Patrie : Darjeeling (Himalaya), J. Harmand, 1890 ; Thibet, R. P. Soulié, 1907 (Mus. de Paris).

Osmylus harmandinus, sp. nov.

Minor. Fuscus, fulvo mistus.

Caput flavidum, fronte ante antennas, vertice inter ocellos, fascia longitudinali in occipite fuscis ; antennis flavis, apice fuscescentibus, pilis flavidis ; palpis flavidis.

Prothorax disco fusco-trifasciato, marginibus lateralibus flavidis, pilis longis nigris hirsutus. Meso- et metanotum fusca, duabus fasciis longitudinalibus, in metanoto abbreviatis, flavidis.

Abdomen fuscum, flavido punctatum, inferne copiosius ; pilis flavidis.

Pedes testacei ; femoribus posterioribus ad apicem et linea externa integra fuscis ; unguibus tenuibus, arcuatis arolio grandi.

Alæ elongatæ, apice acutæ, membrana hyalina, cupreo et viridi iridea ; reticulatione subtota fusca, flavido mista, pilis concoloribus. Series venularum gradatarum completæ, obliquæ, apicem versus divergentes. Pupillæ solum sub lente visibiles, haud tinctæ, interna infra radicem sectoris radii, externa ad medium alæ. Cellulæ discales pleræque rectangulares.

In ala anteriore costa fulva ; venulæ costales omnes simplices, fuscæ ; stigma fulvum, macula fusca interne et externe limitatum ; venæ subcostalis et radialis fulvæ, quinque striis fuscis alternatæ ; sector radii 11 ramis instructus ; venulæ fusco limbatæ, præter paucas ad cubitum ante medium, maculam exiguam formantes.

Ala posterior penitus immaculata, præter dilutas et exiguas maculas ante et post stigma.

Longit. corp.		10	mm.
—	alæ anter.	17-21	»
—	— poster.	16-19	»

Patrie : Japon, Nippon moyen, env. de Tokio, J. Harmand, 1906 (Mus. de Paris).

Osmylus faurinus, sp. nov.

Minor, stramineus, fusco notatus.

Caput fronte ante antennas, clypeo et vertice fusco maculatum ; palpis et antennis stramineis, his satis pilosis, pilis concoloribus.

Prothorax stramineus, linea longitudinali media et alia transversa posteriore fuscis. Meso- et metanotum straminea, scutello toto et macula ad scapulas nigris.

Abdomen stramineum fusco maculatum, pilis stramineis.

Pedes mediocres, straminei, pilosi, tibiis validis, unguibus tenuibus, acutis, arcuatis, divaricatis.

Alæ hyalinæ, viridi et violaceo irideæ, elongatæ, apice acutæ, venis pilisque stramineis ; venulis aliquot fuscis, gradatis omnibus, in duas series completas subparallelas dispositis ; venulis costalibus omnibus simplicibus.

Ala anterior venulis fuscis aliisque fusco limbatis quasi adspersa ferrugineo vel sordidata maculis minutis, formantibus ad cubitum 6-8, ad basim seriei internæ venularum gradatarum, ante et post stigma stramineum, ad marginem. Sector radii 10 ramis instructus. Pupilla interna in medio maculæ pone basim sectoris radii, externa visibilis, sed tenuis, ad medium alæ. Cellulæ discales pleræque rectangulares.

Ala posterior sine maculis, solum venulis aliquot fuscis obscurata, in campo costali et ante et post stigma vix apparens, gradatis.

Longit. corp.	6,5	mm.
— ala anter.	14	»
— — poster.	12,8	»

Patrie : Japon, Avomori, Faury (c'est le nom de l'étiquette du Mus. de Paris ; mais je suppose que c'est le R. P. Faurie, missionnaire).

On peut résumer comme suit les espèces d'*Osmylus* du Japon connues actuellement.

Tableau analytique des espèces d' « Osmylus » du Japon

Plus grand, envergure de plus de 4 centimètres . . . . . 1.
Plus petit, envergure de 4 centimètres ou moins ; antennes jaunes ou jaunâtres . . . . 3.
1. Presque toutes les vénules costales de l'aile antérieure sont fourchues, et quelques-unes d'entre elles près de la base sont reliées par une vénule transverse. Ailes postérieures sans taches brunes, excepté au stigme. Ailes antérieures sans

taches ou en ayant 2 petites au disque. Enverg. 45-50 mm. . *hyalinatus* Mc Lachl.

— Presque toutes les vénules costales de l'aile antérieure simples, sans vénules transverses les joignant. Aile antérieure plus ou moins tachetée . . . 2.

2. Aile antérieure avec une série de taches brunes le long du cubitus formant une ligne mal définie bordant le champ marginal et allant à l'angle externe ; une tache brune au stigme. Aile postérieure sans taches, excepté au stigme. Enverg. 52 mm. . *Prieri* Mc Lachl.

— Noir. Aile antérieure avec la plupart des vénules bordées de brun, rendant l'aspect de l'aile marbré ; aile postérieure ombragée de grisâtre au champ marginal postérieur ; taches brunes au stigme. Env. 52 mm. *tessellatus* Mc Lachl.

3. Tête noire, antennes jaunes, noirâtres à l'extrémité. Aile antérieure tachetée d'une ou deux mottes basilaires, une ou deux au centre, une plus large après le centre formée de 2 ou 3 atomes. Ailes postérieures sans taches, excepté au stigme. Enverg. 34 mm. . . . . . *flavicornis* Mc Lachl.

— Tête jaune ou jaunâtre, antennes jaunâtres . . . . 4.

4. Ailes à peine ombragées de brun, outre les deux taches limitant le stigme, visibles aux deux ailes ; réticulation des ailes brune. Aile antérieure avec

quelques petites taches brunes le long du champ costal et le long du cubitus. Aile postérieure à peine ombragée de brun et de brunâtre au champ marginal postérieur. Enverg. 40 mm. . . . . *harmandinus* Nav.

— Stigme aux ailes presque incolore, à peine limité de brun ; réticulation presque en entier jaunâtre. Aile antérieure parsemée de petites taches brunes rougeâtres, évanouies au bord, plus visibles le long du cubitus. Aile postérieure hyaline, sans taches. Enverg. 30 mm . . . *faurinus* Nav. . . . . .

Osmylus oberthurinus, sp. nov.

Stramineus, piceo maculatus.

Caput fronte inter antennas, labro, vertice piceo maculatis ; antennis fulvis.

Prothorax stramineus, fasciis duabus transversis marginem haud attingentibus, alia longitudinali media conjunctis, fusco maculatus. Meso- et metanotum medio et ad scapulas piceo maculata.

Abdomen stramineum, punctis fuscis notatum.

Pedes toti straminei, pilosi, pilis concoloribus, unguibus nigris, divaricatis, arcuatis.

Alæ apice acutæ, membrana hyalina, iridea, reticulatione subtota fusca. Ala anterior venulis costalibus omnibus simplicibus ; stigmate albido, interne dilutius, externe densius et latius fusco limitato. Cellulæ discales rectangulares aut pentagonales. Venulæ gradatæ in duas series obliquas completas, apicem versus divergentes, dispositæ. Maculæ fuscæ exiguæ paucissimæ, tres quatuorve ad cubitum.

Longit. corp.	9	mm.
— alæ anter.	18	»

Patrie. Probablement Tien-Tsuen, en Chine. J'ai reçu un échantillon un peu endommagé de M. Oberthür, de Rennes, avec d'autres insectes provenant de la Chine et de Java.

Le R. P. Schmitz, S. J., s'excuse auprès de la Section, de ce que l'exécution contrariée des planches de la communication *Sur les brèches du houiller,* présentée à la session d'octobre dernier, l'ait empêché d'envoyer son manuscrit.

Un mémoire présenté par M. l'abbé Claerhout sur *La population du Limbourg,* est envoyé à l'examen du R. P. Van den Gheyn, S. J., et de M. Éd. De Jonghe.

M. Fernand Meunier signale à la Section *Une nouvelle espèce de Paléodictyoptère (sténodictyoptère Brongniart) du terrain houiller de Commentry,* et fait à ce sujet les observations suivantes : Après l'élaboration des nouvelles recherches sur la faune primaire de Commentry (*), faisant suite au mémoire monographique de feu Ch. Brongniart, j'ai rencontré le curieux fossile signalé ici parmi plusieurs centaines de Blattidae, du même horizon géologique, soumises à mon examen, en vue d'un travail d'ensemble, par M. Marcellin Boule, professeur administrateur au Muséum d'histoire naturelle de Paris.

A première vue, le nouveau fossile houiller se sépare de tous les Sténodictyoptères, décrits par Brongniart, par la morphologie du champ anal. Il se range irrécusablement dans le genre Cockerelliella mais se sépare de C. peromopteroïdes Meun., non seulement par la taille, beaucoup plus petite, mais aussi par le secteur du radius et quelques autres détails de la morphologie des ailes.

COCKERELLIELLA SEPULTA, NOV. SP.

A la base de l'aile, la sous-costale est assez éloignée du bord costal, elle s'en rapproche insensiblement et y aboutit après le milieu du champ de cet organe. Le radius se termine bien après l'apex de l'aile, à son point de départ, il est rapproché de la sous-

---

(*) ANN. DE PALÉONTOLOGIE, t. IV. Paris, 1909.

costale ; de plus, son secteur commence à assez peu de distance du point d'attache de l'aile et comprend quatre nervures dont les trois premières sont simples, la quatrième longuement fourchue (l'extrémité du secteur lui-même offre une petite fourche) (*).

Non loin de la base de l'aile, la médiane présente deux nervures dont la première est longuement fourchue, la deuxième, à peine plus longue, a son rameau inférieur aussi fourchu.

Près de l'attache de l'aile, le cubitus est longuement fourchu, son rameau supérieur est simple, l'inférieur est longuement fourchu. La nervure anale est connexe. A cette nervure s'anastomosent cinq nervures simples.

Comme chez Cockerelliella peromopteroïdes Meun., le bord costal est orné d'une réticulation transversale, bien appréciable, et tout le champ alaire pourvu d'un tissu gaufré, des plus distincts.

Cette belle espèce de Paléodictyoptère (sténodictyoptère Brongniart) se sépare immédiatement de C. peromopteroïdes par la topographie de la nervure anale et par les quatre nervures aboutissant au secteur du radius.

Longueur de l'aile antérieure 90 millim. ; largeur 20 millim.

M. Meunier donne ensuite un *Aperçu sur les Chironomidae du Copal récent de Zanzibar et de Madagascar.*

Dans le travail monographique sur les Chironomidae de l'ambre (**), j'ai signalé toute une série de diptères de cette famille dont la plupart sont bien représentés dans la reine des résines.

En étudiant les insectes du copal, de la collection Evers de Altona-Barenfeld (Hambourg), j'ai observé les quelques Chironomidae qui font l'objet de cette communication. Un examen, très détaillé, de ces Orthorapha et de ceux enrobés dans le succin laisse entrevoir que les espèces du copal récent de Zanzibar et de Madagascar sont voisines de celles de cette résine. Il est impossible de comparer les formes incluses aux espèces actuelles des faunes malgache et éthiopienne. En effet, les couleurs, très délicates, de ces minuscules bestioles sont toujours très altérées ou nulles par suite d'al-

---

(*) Ce caractère n'est distinct que sur la contre-empreinte, cette partie du champ alaire de l'empreinte étant totalement enlevée.

(**) ANN. DE LA SOC. SCIENT. DE BRUXELLES, 1904 (mémoire couronné).

térations chimiques survenues peu après leur inclusion. Au point de vue morphologique, la comparaison ne peut guère se faire, la faune des Chironomidae des régions citées n'étant pas même ébauchée.

A ma connaissance, le Dr Bezzi est un des rares diptéristes qui se sont occupés des très petits diptères de la faune africaine (*).

Les caractères morphologiques généraux des Chironomidae du copal sont les mêmes que ceux de notre faune; il en est de même de la taille. A l'exemple des Mycetophilidae, des Sciaridae et des Phoridae, la faune de ces Orthorapha du copal semble être très voisine de la faune paléarctique actuelle. Toutefois, on ne peut admettre cette manière de voir qu'à titre hypothétique, les matériaux connus concernant les Chironomidae, et d'autres groupes de diptères, étant encore trop peu nombreux pour donner une solution à cette difficile question. Elle intéresse les zoologistes étudiant les relations fauniques entre elles et les paléontologistes s'occupant des insectes tertiaires et quaternaires.

Pour prendre date, résumons maintenant les remarques qu'il m'a été possible de faire sur les Chironomidae du copal.

Avec le savant diptériste Williston (**), des États-Unis, je conserve les Ceratopogon parmi les Chironomidae au lieu d'en faire une famille à part, les Ceratopogonidae, comme le font quelques diptéristes. Morphologiquement parlant, les caractères de ces êtres sont bien distincts pour en faire une sous-famille, les Ceratopogonidae, mais le démembrement des Chironomidae ne semble guère être bien profitable à l'avancement de la science.

Dans le copal récent de Zanzibar, j'ai observé trois espèces du genre Ceratopogon Meigen, une espèce de Tanypus Meigen et un vrai Chironomus Meigen. La résine récente de Madagascar m'a fourni un beau spécimen ♀ du genre Tanypus, deux espèces de Ceratopogon et aussi une forme de Chironomus. Une espèce de

---

(*) 1. *Materiali per la conoscenza della Fauna Eritrea* (Bull. della soc. Ent. italiana, anno XXXIII). Firenze, 1901.

2. *Ditteri eritrei*. etc. (Bull. della soc. Ent. italiana, anno XXXVII, Trimestre II, III, IV). Firenze, 1906.

(**) *A manual of the North american Diptera*. Third edition. New Haven, 1908.

Ceratopogon est commune à la faune malgache et à celle de la région éthiopienne.

Les descriptions de toutes ces intéressantes formes de Chironomidae feront l'objet d'un mémoire, accompagné de dessins, actuellement en préparation.

M. Meunier signale à la Section *Un Coniopterygidae du Copal récent de Togo*, assez mal conservé, qui, par la nervation alaire, se range irrécusablement parmi les névroptères de cette famille. Il fait remarquer que ces minuscules êtres n'ont guère été observés jusqu'ici dans les résines et que c'est Hagen qui, en 1866, a signalé la seule inclusion connue, le Coniopteryx tumidus. L'espèce du Copal, qui fait l'objet de cette communication, a les antennes disposées en grains de chapelet, distinctement ciliées, beaucoup plus longues que le corps et composées de 30 articles. La nervation de l'aile antérieure de cet insecte présente les caractères suivants : la sous-costale longe, de très près, le bord costal et n'atteint pas l'extrémité de l'aile ; le radius est bien éloigné de la sous-costale ; son secteur offre une longue fourche. A la base de l'aile, le radius et la médiane sont assez coalescents ; la médiane a une fourche un peu plus longue que celle du secteur du radius. Le cubitus est représenté par deux nervures. Le champ anal semble aussi avoir deux nervures dont la deuxième longe, de très près, le bord postérieur de l'aile. Il existe une petite nervule transversale entre la sous-costale et le radius, une autre entre le radius et le rameau supérieur de son secteur, une troisième entre le rameau inférieur du dit secteur, et le rameau supérieur de la fourche de la médiane. Vers le centre du champ alaire, on remarque une nervule entre la médiane et la première nervure du cubitus. Une autre nervule est plus rapprochée de la base de l'aile ; il existe encore une petite nervule transversale entre les deux nervures du cubitus.

Les Coniopterygidae peuvent être considérés comme des insectes rares ou difficiles à se procurer. Cependant, malgré la petitesse de leur taille, ils ont exercé la sagacité d'un de nos meilleurs entomologistes, le Dr Enderlein (*) de Stettin.

(*) *Monographie der Coniopterygiden*, mit Nachtrag : JENA ZOOL. JAHRBÜCHER und STETTIN. ENT. ZTG., 1906-1907, mit 6 tlw. col. Doppeltaf.

L'insecte du copal de Togo devait avoir à peine 2 millimètres de longueur, l'aile antérieure a 2 millim. de longueur et 1 millim. de largeur. C'est la première fois qu'un Coniopterygidae est signalé du Copal. M. F. Meunier propose de nommer cette délicate bestiole Coniopteryx **Enderleini**, en l'honneur du savant monographe de cette famille.

Par la nervation de l'aile antérieure (la postérieure est peu distincte chez le seul spécimen observé), ce névroptère se rapproche de Coniopteryx tineiformis Curtis. Il ne s'en sépare que par quelques menus détails de la topographie des nervures.

Notre collègue est d'avis qu'il faut attendre la découverte de spécimens en meilleur état de conservation, avant de donner une diagnose plus complète de cet intéressant Coniopterygidae.

M. De Wildeman donne *Sur l'École d'agriculture coloniale de Witzenhausen* (sur la Werra près de Munden), qu'il a visitée en 1910, quelques renseignements intéressants.

Il fait ressortir tout d'abord l'importance de l'agriculture pour la mise en valeur des colonies. Il montre que les Allemands ont compris la nécessité de posséder des hommes connaissant à fond cette agriculture, et formés au double point de vue de la théorie et de la pratique.

C'est là le but de l'École de Witzenhausen qui désire voir des jeunes gens de la classe aisée, les frais d'écolage et d'entretien (l'école est un internat) étant élevés, partir pour les colonies avec un bagage de connaissances théoriques et pratiques grâce auquel ils ne se trouveront pas trop souvent embarrassés.

A Witzenhausen, ils s'initient à tous les métiers nécessaires à la ferme ; tous les jours ils travaillent soit aux champs, aux étables, dans la laiterie ou la fromagerie, soit dans les jardins ; ils passent aussi la moitié de leur journée sur les bancs de l'école où on les initie aux progrès récents des sciences naturelles pures et appliquées.

L'école a un succès tel que dans ces derniers temps la direction, confiée à M. Fabarius, d'accord en cela avec le Conseil, a décidé de réduire le nombre des élèves — qui avait atteint 90 — au nombre de 70.

M. De Wildeman donne certains détails sur l'organisation de cette école unique, vraiment bien installée, et fait ressortir les effets de l'instruction spéciale sur le développement agricole des Colonies allemandes dans lesquelles de nombreux jeunes gens sortis de Witzenhausen se sont rendus.

Il cite également l'*École coloniale pour femmes* qui s'est fondée dans la même petite ville, à côté de l'École d'agriculture et dont la fondation a eu pour but de former des femmes capables de se rendre dans les colonies, soit seules, soit comme compagnes des agents gouvernementaux ou des colons ; car, disent avec raison, pensons-nous, les organisateurs de cette école, ce qu'il faut pour faire de la saine colonisation, c'est former loin de la mère patrie, des familles au sein desquelles elle soit rappelée.

Cette dernière école n'a pas encore obtenu le succès de son aînée.

Il est donné lecture par le Secrétaire de la Section, de la note ci-dessous, adressée de Nice par M. A. Proost.

Les amateurs d'histoire naturelle qui villégiaturent aux bords de la Riviera ne se doutent pas qu'il leur est facile de se procurer, sans bourse délier, une collection complète des roches caractéristiques des Alpes maritimes en se promenant sur la plage de Nice jusqu'à l'embouchure du Var, c'est-à-dire sur une ligne de quelques kilomètres à peine. Ces roches étant polies par les vagues constituent d'excellents échantillons de collection, comme l'ont pu constater *de visu* les visiteurs de notre collection de Mousty. On sait que les Alpes maritimes présentent des variétés très nombreuses de roches primaires, secondaires et tertiaires et que la chaîne de l'Esterel qui commence à Cannes pour s'étendre jusqu'aux carrières de porphyre de Saint-Raphaël, contient aussi de belles espèces minérales d'origine plutonienne et neptunienne. Or, il doit exister un courant marin, correspondant sans doute au mistral, qui contourne l'Esterel et qui chasse les galets de l'ouest vers l'est, car on trouve à Nice même beaucoup d'échantillons variés des roches de cette chaîne, notamment les micaschistes et les porphyres rouges, les porphyres gris et bleus de St-Raphaël, les *roches basaltiques* ou *trachytiques* de l'Esterel, les schistes et grès rouges du triasique etc. D'autre part, les courants d'Italie ramènent à Nice des débris de laves et de marbres multicolores, et le Var charrie jusqu'à la mer, où il se jette au champ de course de Nice (Californie), toutes les roches qu'il a détachées sur son parcours alpestre. Il en est de même du Paillon et de la Vésubie, qui alimente aujourd'hui la ville de Nice d'eau potable, grâce au traitement perfectionné par l'*ozone* qui détruit tous les germes pathogènes, ainsi que nous avons pu le constater nous-même, en prélevant des échantillons sur place avec le chimiste du bureau municipal d'hygiène, M. le Dr Beunat, et en contrôlant la culture des germes. Ces eaux sont tout simplement filtrées à l'usine et stérilisées en quelques minutes. Nous avons fourni au service de l'hygiène du Ministère de l'agriculture des renseignements très précis à ce sujet, au cours de janvier 1907 et 1909.

Voici quelques noms de roches qui font partie de la collection formée par nous *pour les écoles,* au cours de nos promenades à la côte d'Azur :

Série de granites des Alpes contenant des minéraux divers : épidotes, tourmalines, amphiboles, pyroxènes, muscovite, biotite, etc. ; — serpentines, silex et talcschistes du terrain secondaire ; — basaltes de l'Esterel ; — ponces et laves roulées (probablement d'origine vésuvienne) ; — gneiss et micaschistes de l'Esterel ; — gneiss, protogines, mélaphyres et micaschistes des Alpes maritimes ; — schistes et quartzites siluriens des Alpes ; — roches rouges et vertes du permien et du triasique (roulées), sources du Var ; — beaux échantillons fossilifères des roches jurassiques et crétacées du littoral (roulés) ; — marbres variés et brèches polychromes du littoral de la Riviera, beaux galets de marbre blanc de Carrare ; — grès tertiaires fossilifères ; — mosaïques roulées, débris de poteries anciennes en terre rouge (vases étrusques), sidérose, titane, manganèse, orpiment ; — rognons d'hématite rouge mamelonnée.

Le R. P. Van den Gheyn, S. J., présente deux *Notices relatives à des pièces manuscrites de la Bibliothèque Royale de Belgique.*

La première est consacrée à l'étude d'un superbe album de papillons, attribué, sans qu'on puisse apporter de preuves péremptoires, à Georges Hoefnagel, d'Anvers.

La seconde étudie les trois cents portulans manuscrits que possède la Bibliothèque Royale et qui n'ont été acquis que très récemment. Ces cartes sont l'œuvre de Bartolomeo Olivès, de Freducci, et de Bartolomeo Laso. Ces deux notices paraîtront dans la seconde partie des ANNALES.

Quatrième section

La Section s'est réunie le jeudi 27 janvier, à l'issue de l'Assemblée générale.

M. le Dr Struelens, qui préside en l'absence de M. le Professeur Desplats, empêché, fait part à ses collègues de l'admission de nouveaux membres : MM. le Dr Fiessinger, membre correspondant de l'Académie de Médecine de Paris, collaborateur du Professeur Huchard, rédacteur du JOURNAL DES PRATICIENS, littérateur et psychologue apprécié ; M. le Dr Beco, professeur à l'Université de Liége et membre correspondant de l'Académie de Médecine de Belgique ; M. le Dr J. Havet, professeur à l'Université de Louvain et M. J. Marcq, médecin-vétérinaire, adjoint à l'Institut bactériologique provincial de Namur. La Section s'estime heureuse de posséder ces éminents confrères et compte sur leur collaboration.

M. le Dr Deroitte présente une communication intitulée : *Troubles somatiques et mentaux caractéristiques de l'Alcoolisme chronique*, où il fait une relation très documentée d'un sujet alcoolique qu'il a eu l'occasion d'observer à l'établissement de la Colonie de Gheel, en 1905-1906, et qui succomba à des lésions profondes siégeant dans plusieurs organes. Ayant pu pratiquer l'autopsie, M. Deroitte nous en donne les résultats, il insiste sur les lésions du système nerveux central, en rapport avec les troubles psychiques et mentaux observés. Voici le texte de cet intéressant travail :

Nous avons eu souvent l'occasion d'observer, durant notre séjour de six années à la Colonie de Gheel, les lésions multiples produites par l'alcoolisme ; elles sont surtout fréquentes chez les nombreux individus envoyés par la Justice aux colonies de bienfaisance d'où, après un court séjour, beaucoup sont dirigés sur les établissements d'aliénés où ils auraient dû être envoyés directement après examen médical.

Ces lésions sont très variées; elles se manifestent tantôt avec prédominance des symptômes psychiques, tantôt accentuées surtout dans le domaine somatique, les troubles mentaux étant alors moins marqués. Bien rares sont les cas où la déchéance est aussi générale que chez le sujet dont nous présentons ici l'observation. Nous insisterons sur quelques particularités anatomo-pathologiques relevées au cours de l'autopsie du sujet et d'un examen microscopique approfondi.

Histoire clinique. — C. Alexandre, âgé de 50 ans, ouvrier paveur, ayant consommé beaucoup d'alcool est un jour amené au commissariat d'un poste de police de Bruxelles par deux amis : il s'est livré à des actes extravagants et ne se retrouve plus dans des rues qui lui sont cependant très familières. Il a l'air hébété, et saisit mal les questions qu'on lui pose.

On l'envoie au dépôt de l'hôpital Saint-Jean. Là, on constate que l'on a affaire à un alcoolisé, manifestant des troubles de la compréhension, de la perception, de la mémoire : il ne peut dire ni son âge, ni le millésime de l'année. Il est agité, ne dort guère la nuit, et se plaint de douleurs au niveau de l'épigastre. Les pupilles, égales des deux côtés, ne réagissent pas à la lumière. Les réflexes rotuliens sont abolis.

De l'hôpital Saint-Jean, le malade est envoyé à la Colonie de Gheel. Voici un rapide aperçu de l'observation pendant les cinq premiers jours passés à l'établissement, en décembre 1905 :

L'affaiblissement intellectuel est très marqué ; il sait qu'il est né à Waterloo, qu'il a cinquante ans, qu'il est ouvrier paveur, mais c'est tout ce qu'on peut en tirer ; il n'a aucun souvenir de son passage par l'hôpital Saint-Jean et ne sait pas qu'il a pris le train à Bruxelles pour venir à Gheel. Complètement désorienté, il ne sait pas où il se trouve ; incohérent dans ses idées, il répond à peine aux questions qu'on lui pose. Il est incapable de se soigner : il ne se mettrait pas à table avec ses compagnons si on ne l'y engageait. Rien ne l'intéresse, rien ne l'inquiète. Vers la mi-décembre, on le place chez un nourricier.

Les jours suivants, son état reste sensiblement le même, mais il présente régulièrement des accès de confusion mentale, avec impulsions brutales, le soir et la nuit. Le matin, le malade, fatigué et épuisé, est un peu plus calme. Le trional administré par la bouche parvient à lui procurer un peu de tranquillité. Malgré la privation d'alcool, le malade devient de plus en plus faible et les troubles de la perception et du moral ne s'amendent plus. On prescrit un régime tonique, le repos absolu physique et intellectuel, et des boissons abondantes sans aucun alcool.

L'observation des premiers mois nous a été remise par notre excellent collègue le Dr Boeckmans. En voici le résumé :

Janvier. Accès de confusion mentale avec agitation brutale, très fréquents, vers le soir ; insoumis, il déchire ses vêtements, détruit les meubles. L'état mental général reste le même.

Février. Même état.

Mars. Le trional procure un peu de calme ; mais malgré tout les accès se reproduisent et le malade maigrit.

Avril. Toujours les mêmes accès de confusion mentale brutale avec impulsions, se renouvelant chaque jour dans l'après-midi et la nuit. Le matin, le malade est épuisé et hébété.

Le traitement nous fut confié à partir du mois de mai. Pour donner une idée de son état à cette époque, relatons une des visites journalières, celle du 7 mai.

Nous trouvons le malade accroupi au bord du lit, tout découvert, fixant tantôt le sol, tantôt la porte, tantôt un coin de la chambre où il voit des hommes qui, dit-il d'une voix bredouillante et traînante, vont lui faire du mal. Comme d'habitude, il a fait du tapage toute la nuit, a essayé de déchirer tout ce qui lui tombait sous la main, et cela plutôt inconsciemment, pour donner cours à son besoin d'agitation.

Il répond très lentement aux questions qu'on lui pose ; la mémoire est engourdie ; l'attention est encore assez soutenue, mais la perception est presque nulle, ainsi que la faculté d'idéation. Tout souvenir d'événements récents fait défaut ; il n'a aucune conscience de son état ; il veut retourner chez lui, veut partir de suite, dit-il : il ne songe pas qu'il n'a plus de domicile et qu'il ne peut marcher sans soutien.

Son caractère est celui d'un enfant capricieux. Lorsque nous lui demandons de nous serrer la main, dans le but d'évaluer sa force musculaire, il refuse, disant qu'il ne veut pas faire de mal, puis il cède aux instances, et tout d'un coup cherche à me mordre la main : « C'est pour jouer », dit-il. Quand nous lui percutons le tendon rotulien, il se met à pleurnicher : on veut, dit-il, lui casser la jambe.

Au physique, les signes de la polynévrite alcoolique sont manifestes : douleurs et paresthésies dans le territoire des différents nerfs sensibles ; sensations subjectives de fourmillement, de piqûre, d'engourdissement.

La force musculaire est très diminuée ; mieux conservée toutefois aux membres supérieurs, ainsi qu'il est facile de le constater par la résistance opposée aux mouvements. Pour les membres inférieurs, on constate la chute du pied due à l'atrophie des masses musculaires de la partie antérieure du mollet.

Les mouvements sont lents et incertains ; la main étendue est agitée de tremblements. Le malade éprouve beaucoup de peine à se lever : il est maladroit, tremblote et laisse les jambes fléchir, traîner sur le sol, surtout à droite.

Les pupilles sont fixes, punctiformes. Les réflexes rotuliens sont exagérés ; il existe du clonus des deux pieds. La langue n'est pas déviée, elle ne tremble pas.

La fin du mois de mai n'apporte pas de changement à la situation de notre malade, les fonctions végétatives semblent s'exécuter normalement, mais la marche devient de plus en plus difficile. L'état de gâtisme ne nous permet pas l'examen du système urinaire, mais la présence d'éléments anormaux ne nous paraît pas douteuse, malgré l'absence d'œdème.

L'état reste le même jusqu'au 15 juin ; alors se déclarent des convulsions fréquentes, de nature Jacksonnienne, du côté droit et débutant par le bras.

Le 21, les jambes participent aux contractions, puis le bras gauche ; le sujet est couché « en chien de fusil », les jambes fléchies, ramenées contre le tronc, la face toujours tournée vers le mur. Depuis la veille, la marche est devenue complètement impossible : dans la matinée, il parvenait encore à sortir du lit ; vers 1 heure de l'après-midi, il s'était couché et s'était assez vite assoupi, et les convulsions avaient augmenté.

La face est déviée vers la droite, la bouche est contracturée. Le pouls est inégal et irrégulier, à 116 pulsations à la minute ; la respiration, à 32, est profonde ; pas de toux.

Le soir, le malade ne répond plus aux questions qu'on lui adresse, il semble ne plus rien entendre ; les mâchoires sont crispées : on parvient à grand'peine à lui faire avaler un peu de liquide ; le 22, il meurt dans le coma.

Résultat de l'autopsie. — Tête. Le cuir chevelu est normal, et les sutures osseuses du crâne en bon état. La dure-mère n'adhère ni aux os du crâne ni à la pie-mère ; elle est normale, et ses vaisseaux sont gorgés de sang. Les espaces arachnoïdiens renferment peu de liquide.

Au vertex, à la partie correspondant aux lobes pariétaux, on trouve un amas de granulations peu épaisses, sur une étendue d'une pièce de cinq francs, envoyant à la dure-mère quelques bribes fibreuses.

L'encéphale pèse 1280 grammes.

Les centres nerveux dans leur ensemble sont fermes, d'une consistance uniformément supérieure à la normale. La pie-mère, légèrement opacifiée, n'adhère qu'au niveau des granulations à la couche grise sous-jacente. Tous les vaisseaux, ceux des enveloppes et ceux des masses nerveuses, portent les lésions de l'inflammation chronique simple. Après enlèvement de la pie-mère, la surface des circonvolutions cérébrales paraît légèrement chagrinée et laisse suinter un peu de lymphe.

Voici ce que les centres nerveux, sectionnés en tranches, nous ont montré :

Les ventricules latéraux, très peu dilatés, sont remplis de lymphe ; leur surface est lisse et les granulations épendymaires légèrement kystiques. L'épiphyse, petite et dure, est en partie calcifiée. La substance grise des circonvolutions est mince, mais bien colorée, sans trace de ramollissement, et partout bien limitée de la substance blanche.

Dans toute la substance nerveuse, on remarque, à la section, un piqueté hémorrhagique caractéristique, mais peu abondant. Les ganglions de la base sont de couleur, de forme et de consistance normales.

Examen du cervelet. La pie-mère présente un léger degré d'inflammation, mais n'adhère pas. Nous ne rencontrons dans l'organe aucune lésion en foyer. La consistance seule est anormale, un peu trop ferme. Rien d'autre à noter.

L'axe cérébro-spinal. Pont, bulbe et moelle épinière. Le canal rachidien est libre, un peu congestionné. Il ne présente aucune adhérence avec les organes qui se laissent facilement enlever après l'ouverture. Le bulbe a une consistance très ferme ; les olives du bulbe sont même dures. La substance grise de ces parties a sa couleur ordinaire ; on n'y rencontre aucun foyer. Les méninges présentent un léger degré de réaction inflammatoire chronique.

Le *thorax* est bien conformé, sans traces de rachitisme. Détachant la paroi antérieure, nous constatons que tous les organes ont leur place habituelle. Les poumons y sont libres, à part quelques légères adhérences à droite. Le cœur n'est pas déplacé. Lorsque nous incisons le péricarde, nous constatons qu'il ne renferme pas de liquide. Le feuillet viscéral présente des plaques opaques, nacrées, lisses. Les vaisseaux de l'organe sont sinueux.

La fibre musculaire est grasse et jaune, surtout à droite ; partout une couche de graisse à la surface extérieure.

Les cavités sont remplies d'un sang caillé noir ; les orifices sont normaux et les valvules étanches. A noter cependant quelques petites nodosités sur la valvule auriculo-ventriculaire droite.

La crosse de l'aorte, légèrement dilatée, ne présente pas d'athérôme.

Poids des organes de la cage thoracique : Le cœur pèse 352 grammes ; le poumon droit, 400 grammes ; le poumon gauche, 892 grammes ; il présente des lésions de la pneumonie lobaire.

L'*abdomen*. Nous ne trouvons aucun dérangement dans la situation et la position normale des organes : le foie, l'estomac, les intestins qui apparaissent d'abord ont gardé leurs rapports habituels.

Nous enlevons d'abord la rate ; elle est petite, ratatinée, avec une capsule plissée ; une pulpe de couleur brun clair à la coupe, de consistance ferme avec forte hypertrophie des travées conjonctives.

Les reins se décortiquent facilement. A la coupe, la substance médullaire semble normale tandis que la substance corticale est épaissie, dure et blanchâtre. Leur surface est irrégulière et creusée de rétractions qui la divisent pour ainsi dire en 2 ou 3 lobes. Le rein droit porte, vers le pôle inférieur, un petit kyste séreux rempli de liquide jaunâtre.

Le pancréas est normal.

Le foie est petit, dur, à surface lisse. Sur la face externe existe un enfoncement linéaire, vertical. L'organe est dur ; il présente à la surface de section la coloration de la noix muscade.

La vésicule biliaire renferme une bile épaisse de couleur foncée, très filante, mais aucun calcul.

Poids des principaux organes de l'abdomen. La rate pèse 76 grammes ; le rein gauche, 126 grammes ; le rein droit, 123 grammes ; le foie, 1395 grammes.

La vessie, la prostate et les autres organes du bassin ne présentent aucune particularité.

Examen microscopique des centres nerveux. Des fragments de substance cérébrale ont été fixés à l'alcool et au formol et enrobés à la paraffine, coupés au microtome, et colorés sur porte-objet par la méthode de Nissl et celle de Van Gieson.

Examen de la circonvolution frontale ascendante droite. La coupe passe par le sommet de cette circonvolution, à un endroit où il y a quelques adhérences. Nous y avons étudié successivement la pie-mère, les vaisseaux sanguins et les cellules nerveuses.

La pie-mère est considérablement épaissie, formée de faisceaux fibreux bien organisés et denses, et de noyaux allongés. Parfois, à l'intérieur des tissus on rencontre un globule blanc en diapédèse.

Il y a néoformation de vaisseaux sanguins dont la paroi est considérablement épaissie, mais ne présente pas de dégénérescence hyaline ou autre. Ils sont remplis de globules rouges et, dans le tissu qui les environne, se rencontrent un peu plus de globules blancs.

Les adhérences de la pie-mère à la substance cérébrale se font par des vaisseaux de néoformation.

Les altérations des cellules nerveuses vont en s'accentuant vers la profondeur ; elles consistent en dépôts de masses graisseuses, en chromatolyse du protoplasme avec déformation, décoloration et déplacement du noyau, et sclérose des prolongements cellulaires. Ces altérations vont jusqu'à la disparition des cellules dont on ne trouve plus parfois que des débris.

La neuroglie est organisée sans multiplication des noyaux.

Les vaisseaux sanguins de l'écorce proprement dite sont légèrement scléreux et remplis de sang ; on y rencontre des leucocytes en surabondance et, dans l'épaisseur de leurs parois, surtout aux angles de bifurcation, des dépôts de pigment.

A cet endroit, c'est-à-dire dans la profondeur de l'écorce, la diapédèse est nulle.

Examen de l'autre hémisphère : troisième circonvolution frontale gauche. L'aspect est peu différent. La pie-mère n'adhère pas ; elle est pour ainsi dire normale. Même sclérose des vaisseaux sanguins, avec envahissement plus considérable de leur paroi par les globules blancs qui se répandent en petit nombre dans le tissu voisin.

Mêmes altérations des cellules nerveuses, mais plus prononcées et s'accentuant également quand on descend dans les couches profondes.

Pas d'augmentation notable non plus des cellules de neuroglie.

Examen par la méthode de Weigert. Coloration de la neuroglie. Cette méthode, après enrobage à la celloïdine, permet d'étudier l'état du tissu de la substance cérébrale. Nous l'avons appliquée à des fragments de la circonvolution frontale ascendante droite. Elle nous renseigne principalement sur la couche de fibrilles neurogliques qui circulent parallèlement à la surface de l'écorce immédiatement sous la pie-mère. Cette couche de fibrilles neurogliques est peu épaisse à l'état normal : ici elle est augmentée et envoie, vers la profondeur, des prolongements verticaux tandis qu'elle est séparée de la pie-mère épaissie, par une bande de tissu conjonctif auquel celle-ci est intimement unie : la couche neuroglique.

Les vaisseaux hypertrophiés soudent pour ainsi dire en certains endroits la pie-mère à l'écorce.

Dans les couches superficielles on rencontre des cellules géantes. Les vaisseaux ont les parois épaissies, mais sans diapédèse.

Cervelet. La pie-mère, généralement intacte, présente par places de l'infiltration leucocytaire avec épaississement peu considérable; les vaisseaux sont légèrement épaissis et remplis de sang. Leur paroi n'est pas infiltrée.

La substance granuleuse est bien fournie de grains.

Le nombre des cellules de Purkinjé n'a pas diminué, mais elles prennent mal les colorants : leur aspect est flou ; le noyau se délimite mal du reste de la cellule et semble renfermer des débris de chromatine. Le nucléole est bien visible, parfois déplacé. Les blocs chromatiques sont dissociés et n'existent bien marqués qu'à la périphérie de la cellule avec quelques amas autour du noyau, ou bien encore vers le sommet de la cellule et au nombre de deux ou trois, collés contre la membrane du noyau, ou enfin autour de ce dernier seul, ce qui semble être le stade précédant immédiatement l'état sablé.

La cellule a en général la forme globuleuse, et les prolongements sont invisibles. D'autres fois, mais plus rarement, elle est piriforme ou fusiforme, les prolongements se voient alors mieux : ils sont pâles, ainsi que le reste de la cellule, dont on distingue difficilement les parties constituantes.

Les petits vaisseaux sont un peu tortueux, dilatés et remplis de sang. Les gros vaisseaux de la substance corticale sont dilatés, un peu scléreux ; l'espace lymphatique qui les entoure est assez marqué.

La méthode de Weigert pour la coloration de la neuroglie confirme les données de la méthode de Nissl. Elle nous montre, en outre, de rares cellules géantes aux confins de la substance granuleuse et de la couche moléculaire.

Nous ne relaterons pas l'examen microscopique des autres organes, les lésions de l'encéphale étant celles qui nous intéressent particulièrement ici.

Conclusion. Notre malade présentait des lésions profondes produites par l'alcool : cirrhose du foie, sclérose rénale, dégénérescence graisseuse du cœur, rate scléreuse et plissée, artériosclérose généralisée, méningite avec commencement d'adhérences à l'écorce cérébrale.

Au point de vue microscopique, et c'est sur ce point que nous désirons attirer l'attention, les lésions sont irrégulièrement réparties ; *elles prédominent dans les grandes cellules pyramidales de l'écorce et dans les cellules de Purkinjé du cervelet.* La réaction neuroglique est assez intense, mais postérieure à la désagrégation des cellules ganglionnaires. Il est possible d'attribuer aux altérations des cellules du cervelet le trouble dans la coordination des mouvements présenté par notre malade. Les cellules pyramidales de l'écorce méritent, semble-t-il, de retenir l'attention : dans les psychoses, les symptômes si différents doivent avoir un fondement dans des altérations différentes des centres nerveux dus à l'électivité des poisons pour tel ou tel système ; on ne doit pas négliger l'hérédité, mais dans des cas semblables au nôtre elle n'entre pas en ligne de compte.

Quant à l'origine alcoolique de tous ces troubles, elle est indéniable : les antécédents du sujet sont connus. et les symptômes psychiques sont frappants : laisser-aller dans tous les actes, perte des souvenirs récents, désorientation, hallucinations périodiques, affaiblissement du jugement ; il faut y joindre, au point de vue somatique, les signes de polynévrite avec atrophie des muscles de la face antéro-externe de la jambe.

L'ordre du jour appelle un exposé des *Applications thérapeutiques du Radium*, par M. le Dr Matagne. Notre collègue nous décrit la technique de la méthode et nous fait part des résultats — dont quelques-uns encourageants — qu'il en a obtenus.

Une courte discussion s'engage, à laquelle prennent part MM. Ét.Henrard et Delétrez,sur les indications respectives de la radiumthérapie, de la radiothérapie et de l'intervention chirurgicale dans le traitement des épithéliomes.

Bien qu'il soit difficile d'établir, dès à présent, d'une manière définive la valeur de la thérapeutique par *le radium*, il semble bien, d'après M. Henrard, que ce soient surtout les cancers profonds (cancer des lèvres, de l'œsophage, etc.) qui bénéficient de ce moyen de traitement ; il en est de même pour les « taches de vin ». En revanche, *les rayons X*, d'un dosage plus sûr, doivent de préférence être employés contre l'épithéliome cutané. M. Delétrez, de son côté, estime qu'il est des cas nombreux justiciables exclusivement de la chirurgie.

Les indications du traitement par *la fulguration*, récemment exposées devant la Section par M. le Dr Desplats, fils, et dont M. le Dr Solé devait encore nous entretenir aujourd'hui, ont également été mentionnées.

M. le Dr Nicolas Moeller nous entretient des *Conditions de succès de l'opération du bec-de-lièvre*. Il insiste sur certaines modifications à apporter à la méthode opératoire habituelle, modifications dont l'utilité lui a été démontrée par l'expérience, et qui permettent d'obtenir une restauration plus parfaite.

Dans l'opération du bec-de-lièvre, nous dit M. Moeller, la grande difficulté réside dans l'écartement des tissus et la tension consécutive des sutures; souvent cette tension amène la désunion des lambeaux ou leur gangrène.

On a imaginé plusieurs procédés pour combattre cette tension et maintenir l'affrontement parfait des sutures. Beaucoup de chirurgiens emploient, pour suturer, le fil d'argent, espérant que sa solidité assurera le succès de l'intervention. En outre, on tâche de rapprocher les joues de la ligne médiane par divers pansements dont le plus employé est le pansement à la gaze collodionnée : par le rapprochement des joues, les sutures n'étaient plus tiraillées en même temps que la gaze collodionnée constituait, croyait-on, un pansement protecteur occlusif.

Dans les cas que j'ai vu traiter de la sorte, j'ai toujours été frappé de l'inutilité et même des inconvénients des moyens employés.

Tout d'abord le *fil d'argent coupe* les tissus si la tension est trop forte, et en tout cas laisse après lui de vilaines cicatrices.

Quant au *pansement collodionné*, s'il arrive à diminuer la tension quand il ne se décolle pas (et cela est fréquent), au lieu d'être un protecteur pour la plaie, il constitue au contraire au bout d'un jour ou deux un clapier infect. En effet presque toujours par l'intervention, le nez est irrité, et il s'y produit, les jours qui suivent l'opération, un écoulement assez abondant qui vient imprégner la gaze, s'infiltrer sous elle et baigner la cicatrice dans un vrai milieu de culture. Il est extraordinaire que dans ces conditions la plaie ne s'infecte pas toujours, et si on l'évite souvent c'est grâce à la chance ou à la grande vitalité des tissus d'enfants et à la bonne volonté habituelle, à ce point de vue, des sutures cutanées.

Mais nombreux sont les cas où on a le déplaisir de constater après 3 à 8 jours la désunion de toutes les sutures ou d'une partie d'entre elles. On doit recommencer ou se contenter d'un résultat partiel médiocre.

L'inutilité de ces procédés m'a porté à *chercher dans une autre voie* les garanties de succès. Ce n'est pas au moyen du pansement qu'il faut supprimer la tension des tissus, mais par le *procédé opératoire*. On est sûr de réussir si, les sutures terminées et non pansées, il ne persiste aucune tension. Or celle-ci est facile à supprimer, et j'y suis toujours arrivé aisément dans tous les cas que j'ai opérés. Dans ce but, voici comment il faut procéder. Avant tout il faut, au thermo-cautère ou de préférence avec des ciseaux courbes, *débrider la lèvre supérieure de l'os incisif et des maxillaires supérieurs aussi haut* que possible ; il faut continuer ce débridement jusqu'à ce que l'on constate que les deux lambeaux se rapprochent *aisément*. Sans tiraillement aucun, j'y suis arrivé même dans des cas très difficiles où la distance entre les deux lambeaux était énorme. Si par hasard on n'y arrivait pas, il faudrait alors faire les débridements vers la joue. Il ne faut s'arrêter dans ce premier temps opératoire que quand on se sera assuré que les sutures ne seront pas plus tiraillées que n'importe quelle autre suture cutanée.

Un autre avantage de ce procédé est de corriger du même coup l'épatement du nez qui est souvent énorme. Surtout dans les becs-de-lièvre doubles, il faudra souvent refouler le lobule incisif médian qui fait fortement saillie en avant, et qui quelquefois, comme dans le dernier cas que j'ai opéré, était si saillant qu'il paraissait inséré à la partie antérieure de la cloison nasale.

Dans les cas où il est très proéminent, on conseille de *sectionner le vomer* après dépériostage, pour permettre le refoulement du lobule.

Pour ma part, j'ai pu *me contenter de libérer le lobule de ses attaches latérales,* et alors je l'ai aisément *refoulé à l'aide d'une pince à os*. Tel est le premier temps de l'opération qui est, à mon sens, le plus important et dont dépend le succès.

Deuxième temps : *avivement des lambeaux*. Dans les cas habituels, le procédé de *Mirault* est le meilleur : dans le bec-de-lièvre unilatéral, on commence par aviver le petit lambeau et après on taille, aux dépens de l'autre lèvre, par transfixion un lambeau triangulaire à base externe, ou quelquefois inférieure, suivant les cas, aux dépens de l'autre lèvre ; alors, sans perdre de temps, on suture l'angle saillant du premier lambeau dans l'angle rentrant formé par l'abaissement du lambeau triangulaire.

La suture est *faite au crin de Florence*. On doit entrer à cinq millimètres des bords de la plaie, et le fil doit embrasser toute l'épaisseur de la peau et des tissus sous-jacents mais sans atteindre la face muqueuse postérieure. Ainsi l'artère coronaire est comprise dans la suture et l'hémorrhagie arrêtée ; on passe alors deux points au crin sur la ligne médiane, et un ou deux points pour fixer le lambeau triangulaire à l'autre lèvre ; en général, quatre ou cinq points de suture suffisent, dans les cas simples.

Ces sutures au crin sont bien supérieures au fil d'argent, et comme, grâce au premier temps d'opération, on a pu suturer sans tension, elles suffisent, et je n'ai jamais observé qu'elles aient coupé les tissus.

Si on craint trop d'hémorrhagie, un moyen aisé d'hémostase est d'armer les branches des pinces longuettes de drains en caoutchouc, et un assistant pince avec celles-ci les extrémités de la lèvre opérée. Mais en général c'est inutile : si on prépare d'avance ses fils et aiguilles et que l'on commence par aviver le petit lambeau, dès que le lambeau principal est taillé, l'hémorrhagie est arrêtée par le premier point de suture.

Pour éviter la gangrène de l'extrémité du lambeau taillé, il importe que sa base soit suffisamment large.

Dans les cas *bilatéraux* simples, on taille de chaque côté un lambeau triangulaire et on avive, s'il existe, le lobule médian. S'il est grave, que l'écartement est énorme et qu'il y a deux larges encoches entre le lobule médian et les deux lambeaux latéraux, on avive le lobule et le pourtour de deux encoches et on les suture de façon à obtenir deux cicatrices verticales. En dessous, on taille les lambeaux de Mirault qu'on suture en les renversant : toutes les sutures ont la forme d'un Y dont les deux branches supérieures représentent un fer à cheval. Si le premier temps de l'opération a été complet, on constate qu'il n'y a aucune tension des tissus suturés.

Pansement. Une autre condition de succès consiste dans la suppression du pansement. Je ne mets aucun pansement, je n'ai pas à rapprocher les joues parce qu'il n'y a pas de tension, je me contente tout au plus de saupoudrer la région dans un peu d'airol et je laisse la cicatrice libre ; il s'y forme rapidement quelques petites croûtes protectrices.

Grâce à la suppression du pansement, c'est un plaisir de voir la propreté de la suture les jours suivants. S'il y a trop de croûtes formées, on essuye les cicatrices avec un peu de vaseline, surtout la veille du jour où on doit enlever les fils : ainsi on les retrouve aisément. J'enlève les fils le cinquième et au plus tard le septième jour. On peut toujours le faire le cinquième, si l'avivement a été largement fait. Plus tôt on coupe les fils, moins ils laisseront de marques.

En résumé, pour réussir l'intervention il faut débrider très haut des os maxillaires les lambeaux à rapprocher, refouler l'os incisif, suturer au crin, enlever les sutures au plus tard le septième jour et supprimer tout pansement.

Quand les enfants ont moins de trois mois, j'opère sans anesthésie et me contente de fixer les bras au tronc par une bande.

A quel âge peut-on opérer le bec-de-lièvre ? Au plus tôt au mieux. Le plus jeune enfant que j'ai opéré avait cinq semaines et le cas était particulièrement grave ; deux autres avaient six semaines. Ces enfants ont parfaitement supporté l'intervention et comme les enfants plus âgés n'ont pas paru incommodés les jours suivants.

Grâce aux précautions que j'ai indiquées, j'ai réussi tous les cas que j'ai opérés et, à part un cas où j'ai dû faire une petite retouche plus tard, tous ont donné d'emblée un résultat définitif sans désunion des sutures. L'enfant le plus jeune avait cinq semaines, le plus âgé, un an deux mois.

Il y avait sur neuf cas, deux bilatéraux, cinq unilatéraux gauches et deux droits ; quatre étaient compliqués de fente palatine ; des cas non compliqués, un était bilatéral.

Voici le résumé des cas :

1. C. R., fille, onze mois. Bec-de-lièvre compliqué gauche remontant jusqu'à la narine ; l'écartement des deux lambeaux, 4 millimètres ; os incisif un peu proéminent ; voûte palatine fendue jusqu'au voile du palais ; fente large de 1 centimètre 50 ; ne savait pas téter.

17 mai 1904. Je débride les lèvres contre le maxillaire et os incisif assez haut. L'affrontement se fait bien alors : la lèvre externe gauche est avivée aux ciseaux ; je taille par transfixion un lambeau à base inférieure aux dépens de la lèvre droite. Suture de l'angle rentrant avec l'angle saillant, puis deux points sur la plaie supérieure et deux sur le lobule.

Pansement : gaze au collodion. Hémostase par pinces longuettes caoutchoutées.

21 mai. Pansement.

27 mai. Enlèvement des fils, résultat parfait.

Opéré sans chloroforme.

2. O. V., garçon, neuf mois. Bec-de-lièvre gauche remontant jusque dans la narine ; os incisif assez saillant et fixé du côté droit à la lèvre ; les deux bords s'affrontent assez bien ; voile du palais normal.

17 décembre 1904. Je détache aux ciseaux le frein de la lèvre et les insertions des lèvres aux os incisif et maxillaire, et je remonte ainsi contre l'os jusque sous les narines : hémostase aux pinces longuettes ; refoulement de l'os incisif avec pince à os.

Ensuite suture de la lèvre en taillant un lambeau de Mirault, cinq points ; pansement au collodion.

Trois jours après, je l'enlève car les sécrétions nasales coulent en dessous ; plus de pansement.

22 décembre. J'enlève deux fils ; le 24, sept jours après, je coupe les derniers fils.

28 décembre. Résultat très bon.

3. R. A., garçon, trois mois. Bec-de-lièvre unilatéral droit compliqué, remontant jusque dans la narine. L'écartement des lambeaux est d'un centimètre ; l'aile droite du nez est aplatie ; l'os incisif est saillant ; le maxillaire fendu ; fente palatine d'un centimètre.

L'enfant a dû être nourri à la cuillère.

26 avril 1905. Opéré comme les autres cas : le débridement de la lèvre des os incisifs et maxillaire donne assez d'hémorrhagie arrêtée par le tamponnement. Les lèvres sont suturées par cinq points au crin ; aucun pansement, sinon pommade à l'airol. Opération sans anesthésie.

Le lendemain, la cicatrice est propre et sèche grâce à l'absence de pansement.

Le 2 mai, six jours après l'intervention, j'enlève tous les fils réunis par primam sur toute l'étendue, bien que l'enfant ait beaucoup crié.

Résultat parfait.

4. J. W., garçon, six semaines. Bec-de-lièvre gauche compliqué très grave ; la fissure remonte dans le nez ; l'aile du nez est tout à fait aplatie et déviée à gauche ; la lèvre gauche n'est qu'un petit bourgeon. L'écartement entre les deux lèvres est énorme ;

os incisif un peu saillant ; voile du palais fendu ; la pointe du nez est déviée à droite.

L'enfant sait néanmoins prendre le biberon.

26 mai 1905. Je détache les deux lambeaux *très haut* jusque sous la racine du nez.

Suture des lèvres par le procédé de Mirault décrit, cinq points de suture au crin : quand elles sont terminées, je constate que la lèvre supérieure se relève trop au milieu, je mets un point supplémentaire transversal dans la racine du nez ; ce point en rapprochant encore la partie supérieure des deux lambeaux, fait basculer ceux-ci vers le bas et abaisse la lèvre ; pas de pansement, pas d'anesthésie. Cinq jours après, le 31 mai, j'enlève les fils : réunion parfaite, sauf l'extrémité du lobule vers la gauche. Six semaines après, je le revois : le résultat est parfait, la lèvre est fort belle, sur la ligne médiane aussi.

5. J. H., fillette, six semaines. Bec-de-lièvre double avec lobule médian ; le voile du palais est normal, mais la voûte est plus profonde.

20 juillet 1908. Après dissection des lèvres, suture par le procédé de König Mirault ; avivement des bords du lobule médian et des deux lambeaux latéraux, puis à chaque lèvre-lambeau à base externe. Suture transversale des deux encoches, puis suture entre eux et avec la partie supérieure de la lèvre des deux lambeaux renversés en bas, cela donne une cicatrice en Y ; neuf points au crin ; pas de pansement ni de chloroforme.

Le 25 juillet, cinq jours après, enlèvement des fils ; tout a tenu, sauf une partie du lambeau inférieur gauche, qui se ferme par bourgeonnement.

6. D., trois mois. Bec-de-lièvre gauche simple ; écartement des lèvres d'un centimètre ; lèvre adhérente au maxillaire.

1 mai 1907. Opération comme pour les 1, 2, 3. etc. En tout, trois points de suture au crin : pas d'anesthésie, pas de pansement ; enlèvement des fils, sept jours après.

Résultat définitif excellent.

Un fil a blessé le sein de la mère et a occasionné un abcès du sein.

7. F. C., garçon, un an deux mois. Bec-de-lièvre droit léger : encoche, nez aplati de ce côté, palais normal.

4 février 1907. Opération comme plus haut, quatre points de

suture ; pas de pansement ; enlèvement des fils cinq jours après. Résultat parfait.

8. V. C. P., garçon, sept mois. Bec-de-lièvre gauche léger ; encoche ; nez un peu aplati à gauche.

13 mars 1907. Opération comme plus haut : pas de pansement ; après cinq jours, j'enlève tous les fils sauf un ; quatre jours après, j'enlève le dernier fil.

Résultat très beau.

9. E. J. M., garçon, cinq semaines. Bec-de-lièvre double compliqué, *très grave*. Lobule médian si proéminent qu'il paraît inséré à la pointe du nez ; l'écartement entre ce lobule et la lèvre est surtout marqué à droite, l'écartement entre les deux lambeaux est énorme : il comprend presque toute la longueur de la lèvre ; le voile du palais manque : on voit par la bouche les deux cavités nasales séparées par la cloison du nez, celui-ci est très épais ; le cas est très difficile, et je me demande comment il y aura moyen de réunir les tissus.

Malgré cet état, l'enfant sait prendre le biberon.

31 décembre 1908. Opération : refoulement du lobule médian : je fais une incision de deux centimètres sur le bord inférieur de la cloison du nez et dissèque le périoste et la muqueuse des deux côtés assez haut, dans l'intention de sectionner verticalement le vomer ; mais c'était inutile : après avoir rompu au bistouri une petite adhérence du lobule au maxillaire gauche, sans sectionner le vomer, je refoule le lobule osseux aisément avec une pince à os.

Alors je dissèque de l'os tout le lobule charnu et je dissèque le lambeau médian et les deux lèvres très haut sur les maxillaires.

Puis avivement et sutures, d'après König Mirault, comme obs. 5 ; en tout, je plaçai cinq points de suture au crin ; pas de chloroforme ; pas de pansement. L'enfant fut très pâle à la fin de l'opération et perdit assez de sang pendant la dissection, inutile d'ailleurs, du vomer.

Les jours suivants il alla parfaitement.

Six jours après, j'enlève les fils ; tout a tenu, mais les deux extrémités des lambeaux de Mirault se gangrenèrent ; tout était bien, le nez épaté avait une forme normale, il persistait donc une petite encoche à la lèvre, encoche médiane peu profonde. Le 30 juillet, quand l'enfant avait sept mois, j'opérai cette encoche : j'avivai la lèvre, taillai deux petits lambeaux à base externe que je suturai en les renversant ; en tout, quatre points ; le résultat fut parfait, et l'intervention fut faite sans chloroforme ; je revis l'enfant en octobre, donc trois mois après l'intervention ; tout est bien, le résultat esthétique très beau. Au milieu de la lèvre seulement un point est resté muqueux.

Des Écoles d'infirmières. Leur but. Opportunité de leur extension. Difficultés à surmonter. Tel est l'objet d'une communication de M. le Dr Van Swieten, professeur — comme notre collègue, M. le Dr F. Henrard — à l'École d'infirmières et gardes-malades, fondée à Bruxelles sous le nom d'Œuvre Saint Camille.

Sans s'arrêter aux résultats acquis, M. Van Swieten voudrait voir apporter quelques réformes et améliorations à cette œuvre, si importante, tant au point de vue médical, qu'au point de vue de l'action chrétienne et sociale qu'elle est appelée à exercer. Parcourant le programme de l'examen institué par le Gouvernement en 1908, il regrette qu'on n'ait pas réglementé l'enseignement pratique, après avoir arrêté un programme théorique, afin d'obliger les candidats à faire un stage sérieux de plusieurs mois dans un hôpital moderne où tout leur serait un exemple et un enseignement.

Il voudrait que l'école pour les infirmières, et particulièrement pour les religieuses gardes-malades, fût un établissement annexé à l'hôpital où les élèves feraient un apprentissage comme internes pendant un an au moins. Dans tous les pays du nord de l'Europe, les institutions d'infirmières sont florissantes et sont toutes basées sur cette organisation.

En étudiant ces desiderata, les autorités religieuses se rendront compte de leur opportunité et ne manqueront pas d'aplanir les obstacles qui s'opposent à un progrès nécessaire, dont le diplôme créé par le Gouvernement a été la première étape.

L'École Saint Camille, fondée il y a trois ans sous les auspices du *Club Médical* de Bruxelles et d'un Comité de dames de la société bruxelloise, comprend deux années d'études. Dans la première, les élèves sont préparées à l'examen conférant le diplôme d'infirmières ; elles suivent des cours théoriques qui se donnent deux fois par semaine, rue Brialmont, 11. Outre la pratique à laquelle se livrent toutes les élèves (soins de malades à domicile, ou dans les cliniques auxquelles elles sont attachées), les élèves font actuellement deux mois de stage à l'hôpital Sainte Élisabeth à Uccle, où elles passent successivement dans un service de médecine et dans un service de chirurgie. Un cours colonial, destiné aux infirmières missionnaires, et l'enseignement du flamand ont été ajoutés cette année.

La seconde année, destinée à perfectionner les études théoriques et pratiques, forme les monitrices qui, à l'hôpital, s'occupent de la formation des élèves de première année.

Dans cette seconde année se donnent des cours de puériculture, de cuisine pour malades, de massage et de pharmacie.

Plus de 50 élèves, religieuses et laïques, suivent chaque année les cours de l'École Saint Camille dont les succès aux examens ont dépassé les espérances et couronné les efforts.

Plusieurs membres (MM. Delétrez, Cuylits, Morelle, F. Henrard, Glorieux, Warlomont) présentent quelques observations au sujet de cette institution si intéressante. La portée de l'œuvre avait été déjà exposée au récent Congrès de Malines, par M. le Dr Van Swieten lui-même et par Madame la comtesse Jean de Mérode, présidente de l'œuvre. Pour beaucoup, ce fut la révélation de l'existence d'un organisme nouveau qui a désormais sa place au premier rang des œuvres chrétiennes et charitables qui honorent notre pays. Les gardes-malades et les infirmières, religieuses ou laïques, y trouveront la formation nécessaire pour exercer avec fruit leur rôle d'assistantes du médecin ou du chirurgien, de providence et de réconfort pour les malades.

Il était urgent, aussi, de prévenir les effets d'une campagne dont le mobile, à peine déguisé, est d'éloigner de nos hôpitaux, comme incapables ou inférieures à des infirmières laïques préparées par un tout autre enseignement, les femmes de cœur et de foi qui consolent et secourent le pauvre et l'ouvrier de nos grandes villes.

L'œuvre de Saint Camille a, du reste, en elle, le germe de succès certain : n'est-elle pas animée par ce souffle de la charité catholique que rien ne remplace ? C'est là qu'il faut chercher l'explication du zèle éclairé de ses maîtres, et de l'assiduité fervente de ses élèves. Il y a bien une difficulté, que des écoles rivales ne connaissent pas : l'observation, pour beaucoup d'écolières, de la règle de la vie religieuse, mais cette règle est, elle-même, la source féconde du dévouement et du sacrifice. Grâce à une entente entre l'autorité épiscopale, les supérieures des communautés religieuses et la direction de l'œuvre de Saint Camille, il sera certainement possible de concilier les exigences de la vie religieuse avec celles d'un enseignement qui doit se maintenir à la hauteur de tous les progrès et même les susciter.

Tel a été le sens général des observations échangées entre les membres de la Section. Une discussion a eu lieu, notamment quant aux divers projets de réforme de M. Van Swieten. La Section reviendra, sans doute, sur ce sujet si intéressant et si actuel.

Cinquième section

M. F. Deschamps développe une *Proposition d'une enquête concernant les marchés financiers* que la Section pourrait entreprendre après l'étude, qu'elle terminera à la session de Pâques, de la *Fonction économique des ports*. La communication de M. F. Deschamps a paru *in extenso* dans la Revue des Questions scientifiques, livraison du 20 avril 1910, pp. 454-479.

Sixième section

M. P. Daubresse fait la communication suivante *Sur la théorie des mécanismes de distribution à commande par excentriques.*

L'étude théorique des distributions commandées par excentriques, telle qu'elle est encore faite par la plupart des auteurs, manque, peut-on dire, d'unité, et souffre de l'absence de grands principes directeurs.

Débutant généralement par le cas le plus simple du tiroir plan ordinaire, commandé par un excentrique dit « normal », puis passant aux cas plus compliqués qu'amènent les différents autres systèmes à étudier, on introduit progressivement les compléments, modifications, corrections, etc. que ces derniers exigent. Les théories ainsi établies semblent donc édifiées péniblement, par pièces et morceaux, à coups de corrections et au prix d'approximations perpétuelles.

Elles n'envisagent jamais que des cas particuliers. Nulle part on ne cherche à mettre en évidence de grands principes directeurs, des théorèmes tout à fait généraux, dont les méthodes relatives aux divers systèmes et aux différents cas ne seraient que des applications.

Et pourtant ces principes existent et ne demandent qu'à être mis dans leur pleine évidence. Et il est superflu de dire qu'alors l'étude théorique des mécanismes de distribution devient beaucoup plus simple, plus facile, plus attrayante ; qu'elle revêt le caractère d'unité, l'esthétique, en quelque sorte, qui lui manquaient ; que, finalement, elle devient plus vraiment scientifique, s'il est vrai que la science poursuit la connaissance des lois les plus générales et les plus fondamentales qui régissent un ensemble déterminé de faits.

Or, c'est ce que M. Daubresse s'est efforcé de faire dans son enseignement, et le but de sa communication actuelle était de faire connaître, dans ses grandes lignes, la façon dont il y était arrivé.

Le procédé des projections constitue, comme on le sait, l'auxiliaire fondamental qui, dans un très grand nombre de questions, joue le rôle essentiel ; il se trouve être le pivot de la plupart des opérations, la pierre d'angle de la plupart des constructions. Pour peu qu'on veuille y réfléchir, on constate qu'il imprègne véritablement presque toutes les questions dans lesquelles interviennent des considérations de nature géométrique.

La géométrie analytique, la mécanique analytique, la graphostatique de l'espace, ne reposent-elles pas essentiellement sur le principe et l'usage constant des projections ? Il était opportun de rappeler ici cette remarque ; car les principes fondamentaux que M. Daubresse énonce comme devant permettre l'établissement de toutes les théories, et la résolution de tous les problèmes relatifs aux mécanismes de distribution, utilisent comme élément essentiel, le procédé des projections : ils portent sur des projections de mouvements, sur des « mouvements projetés » dans des conditions et suivant des règles déterminées.

M. Daubresse énonce d'abord un *Premier principe des mouvements projetés*. Ce principe s'applique à une tringle ou barre quelconque, dont les deux extrémités possèdent certains mouvements sur des trajectoires en principe quelconques, et dont la longueur soit assez grande comparativement à l'amplitude des déplacements des deux points susdits pour que, au cours du mouvement, elle ne prenne que des obliquités peu sensibles par rapport à sa direction moyenne.

Dans ces conditions, et en négligeant les différences peu sensibles provenant des effets d'obliquité, les projections des mouvements des deux points extrêmes, faites normalement à la direction moyenne de la barre, sur des trajectoires parallèles quelconques, en particulier sur la direction moyenne susdite sont identiques. Les mouvements réels peuvent donc être différents ; les mouvements projetés, au sens qui vient d'être dit, seront toujours identiques. (Ce principe s'applique, d'ailleurs, non seulement aux points extrêmes, mais indifféremment à tous les points de la barre ; dans les applications qu'on doit en faire, ce ne sont pourtant que les points extrêmes qu'on a à considérer.)

M. Daubresse montre que ce premier principe suffit, seul, à résoudre tous les cas qui peuvent se rencontrer de commande par un seul excentrique, que celle-ci soit d'ailleurs directe ou indirecte, et quelle que soit, dans cette dernière, la complication du mécanisme intermédiaire intercalé entre l'excentrique initial et l'organe commandé.

Dans tous les cas, quels qu'ils soient, le premier principe des mouvements projetés permet la détermination de l'excentrique idéal E_i (à commande hypothétique directe et centrale) auquel on peut rapporter la loi du mouvement de l'organe distributeur. Seulement, M. Daubresse introduit, pour prévoir tous les cas possibles, une notion à laquelle il attache une grande importance : celle de l'E_i variable dans le tour.

Certains mécanismes intermédiaires sont conçus et proportionnés de telle façon qu'ils ne déforment pas les lois du mouvement ; ils ne font que transformer l'action de l'excentrique réel E en celle d'un autre excentrique, l'E_i dont il vient d'être question ; cet E_i a des caractéristiques différentes de l'E réel, mais le mouvement considéré continue à correspondre, comme forme, à un certain excentrique à commande directe et centrale. Ce sont les seuls qui, jusque maintenant, se prêtaient à la détermination d'un E_i.

D'autres, par contre, sont disposés et proportionnés de manière à déformer les lois du mouvement ; tels sont ceux produisant les mouvements oscillants non symétriques dont Corliss a été le protagoniste. M. Daubresse fait rentrer l'étude de ces derniers, de même que celle, en général, de tous les cas où les effets d'obliquité ne sont plus négligeables, où même ils sont systématiquement recherchés — comme précisément ils le sont dans les mécanismes susdits — dans son même procédé général d'investigation par l'introduction du concept de l'E_i variable dans le tour, notion sur laquelle il s'étend et qu'il montre comme devant recevoir, dans la suite, une fécondité toujours croissante.

Il aborde après cela les cas de commande par deux excentriques.

Dans ces derniers, on retrouve toujours, en principe, une certaine pièce, de forme d'ailleurs variable, dont deux points, A et B, sont placés sous la dépendance, directe ou indirecte, des deux excentriques employés pour la commande E_a et E_b et dont un troisième point C est pris comme point d'attaque de l'organe à conduire, attaque pouvant être, à son tour, directe ou indirecte. Ce dernier point se trouve donc placé sous l'influence simultanée des deux excentriques E_a et E_b. C'est pour l'étude de ces derniers systèmes que M. Daubresse énonce son *Second principe des mouvements projetés*. Lorsque, encore une fois, on considère, au lieu des mouvements réels, les mouvements projetés, la projection ayant lieu cette fois, sur une direction quelconque, et suivant une autre direction également quelconque (donc projection oblique dans le cas le plus général), le second principe en question permet de déduire très simplement le mouvement projeté de C de ceux des points A et B. Ce second principe est d'ailleurs énoncé d'abord sous sa forme la plus générale, c'est-à-dire pour des mouvements absolument quelconques de A et de B, sans donc s'astreindre à les supposer produits ni directement ni indirectement, par des excentriques. Abordant alors le cas de la commande effective par excentriques, dans lequel, comme il se vérifie dans les applications, les mouvements projetés de A et B correspondent aussi à certains excentriques fictifs E'_a et E'_b, le mouvement projeté de C correspond à son tour à un excentrique E'_c que l'on déduit des deux précédents par une construction très simple, celle que Guinotte a pour la première fois fait connaître en se limitant d'ailleurs à un seul cas particulier (encore que son théorème, tel qu'il l'a énoncé, et que des auteurs même récents ont continué à le reproduire, ne fût pas tout à fait correct).

L'orateur montre, par plusieurs exemples, quelle est l'utilité de ce second principe, et comment il permet, par le choix judicieux des deux directions, projetante et de projection, d'arriver dans tous les cas à la solution du problème posé, c'est-à-dire à la détermination de l'E_i, constant ou variable, donnant la loi du mouvement du distributeur. La notion de l'E_i variable trouve ici un nouveau et vaste champ d'applications, et le conférencier cite à cet égard des exemples tout à fait topiques.

Pour épuiser la liste des principes fondamentaux qui permettent l'étude de tous les systèmes de distribution, il reste à citer celui de l'excentrique fictif des mouvements relatifs, auquel, comme l'on sait, on doit recourir pour faire l'étude des distributions par tiroirs superposés.

ASSEMBLÉE GÉNÉRALE

La séance s'ouvre à 2 heures et demie, sous la présidence de M. F. Dewalque, professeur à l'Université de Louvain, président de la Société scientifique.

La parole est donnée à M. le V^{te} R. de Montessus de Ballore, pour une conférence avec projections sur *L'Aviation, hier, aujourd'hui, demain*. Cette conférence a paru *in extenso* dans la Revue des Questions scientifiques, livraison du 20 janvier 1910, pp. 189-223.

M. Dewalque félicite et remercie l'orateur et déclare close la session de janvier 1910.

LA VIBRATION PENDULAIRE
SON ROLE VÉRITABLE EN ACOUSTIQUE

par J. DELEMER
Professeur aux Facultés libres de Lille

I

Rappel de la théorie du timbre acoustique et des critiques déja formulées contre cette théorie

Helmholtz a développé et tenté de démontrer l'hypothèse d'Ohm sur le timbre des sons.

C'est, en somme, une hypothèse sur le mécanisme physiologique de l'audition. D'après Ohm et Helmholtz, *notre oreille est faite pour ne percevoir que les sons pendulaires* (sons à vibrations sinusoïdales). Dans ces conditions, *un son musical quelconque provoque chez l'auditeur une sensation globale ; celui-ci entend plusieurs sons pendulaires simultanés, le son fondamental et les harmoniques. Le son musical dont il s'agit est alors perçu comme la résultante de ces divers sons pendulaires*, et c'est par le mélange de ceux-ci que se forme le timbre.

Or Helmholtz n'a pas démontré cette hypothèse, il n'a fait qu'avancer des raisons pour la rendre vraisemblable ; et son argumentation prête à de graves critiques. Ces critiques ont été réunies et formulées avec vigueur dans l'ouvrage du docteur Guillemin sur la *Génération de la voix et du timbre* (1), ouvrage dont nous allons présenter brièvement en commençant quelques idées fondamentales. Et d'abord, rappelons en quelques mots ce que sont les harmoniques.

---

(1) *Génération de la voix et du timbre*, par le Dr A. Guillemin, chez Félix Alcan, à Paris. Ouvrage très intéressant, bien que de forme un peu trop originale pour un livre scientifique. Cf. les chapitres VIII et IX.

Les harmoniques. — L'existence des harmoniques dans la plupart des sons est connue depuis longtemps. Chacun peut, en frappant la note ut_2 sur un piano, parvenir à distinguer dans la masse sonore divers harmoniques, voire le sol_3 et le mi_4.

Des résonnateurs appropriés, en communication acoustique avec l'oreille, aident à distinguer ces harmoniques.

De plus, l'intensité relative de chacun des harmoniques d'un son varie avec le timbre de ce son. Les sons de flûte, de hautbois, de violon pris à la même hauteur dans la gamme, ne donnent pas la même intensité relative pour leurs divers harmoniques.

Application de la série de Fourier. — Helmholtz remarque qu'une vibration sonore quelconque est un mouvement périodique(¹); si on représente l'élongation de ce mouvement vibratoire par une fonction périodique du temps

$$y = f(t),$$

on pourra développer y par la série périodique de Fourier en écrivant

$$y = f(t) = A_0 + A_1 \sin\left(\frac{2\pi t}{T} + \alpha\right) + A_2 \sin\left(\frac{4\pi t}{T} + \beta\right) + \cdots;$$

tous ces sinus devant admettre la même période T que la fonction $f(t)$. Or Helmholtz s'est proposé de prouver, pour appuyer l'hypothèse d'Ohm, que ces différents sinus, introduits dans la série à titre purement analytique, représentent exactement le son fondamental et les harmoniques du son complexe représenté lui-même par $f(t)$.

Critique de cette interprétation de la série de Fourier. — Cette interprétation de la série de Fourier paraît au premier abord confirmée par la forme de l'expression analytique trouvée pour l'intégrale générale de l'équation des cordes vibrantes. Cette expression analytique est une série trigonométrique où les termes successifs, comme ceux de la série précédente, contiennent des

---

(¹) Voir Helmholtz, *Théorie physiologique de la musique.*

sinus de périodicités respectivement égales à T, $\frac{T}{2}$, $\frac{T}{3}$, etc. qui semblent correspondre exactement aux divers sons partiels de la corde.

En réalité, la confirmation que cette formule semble apporter à l'hypothèse d'Ohm n'est qu'apparente. A cause de la raideur de toute corde réelle, les véritables sons propres de la corde (¹) ne peuvent être tous rigoureusement à la hauteur musicale voulue pour correspondre parfaitement aux divers termes de la série trigonométrique qu'on vient de dire.

Mais, revenons à la considération du son musical d'un instrument quelconque, la comparaison entre les harmoniques réels de ce son et ceux qu'expriment les termes de la série de Fourier est impossible.

Il est impossible, d'une part, d'apprécier à l'oreille les intensités relatives des divers harmoniques réels d'un son. Il n'est guère plus aisé, d'autre part, de déterminer les intensités des harmoniques théoriques du même son en se servant de la série de Fourier. Il faut pour cela, obtenir un graphique parfait de la vibration et en faire une interprétation minutieuse, de manière à identifier l'ordonnée de ce graphique avec l'élongation *y* exprimée par la série de Fourier. Cette identification doit entraîner la détermination des coefficients des termes de la série et, par conséquent, les intensités des harmoniques théoriques. Or divers expérimentateurs ont tenté ces déterminations numériques, mais il n'y a jamais eu d'accord entre leurs résultats.

Donc, *il n'y a pas de preuves positives* que les sinus de la série de Fourier représentent les harmoniques.

Au reste, M. Guillemin fait ressortir certaines conséquences vraiment étranges auxquelles conduit l'emploi de la série de Fourier dans la théorie du timbre (²). Son argumentation établit entièrement l'inutilité de cette série pour résoudre la question.

En somme, la conclusion de cet auteur, que nous adoptons de tout point, est que *la série de Fourier ne s'applique pas à la*

(¹) Ces sons propres sont ceux que donne la corde vibrant sans nœud entre les extrémités, ou bien encore en présentant deux, trois ou un plus grand nombre de concamérations.

(²) Voir Guillemin, *loc. cit.*, chap. IX, pages 272 et suivantes.

théorie du timbre des sons. Cette théorie qui touche à la physiologie en même temps qu'à la physique ne peut s'accommoder d'une formule aussi rigide, si intéressante et rigoureuse soit-elle au point de vue de l'analyse mathématique.

Le timbre des sons dépend-il seulement des harmoniques? — Quant aux harmoniques que nous percevons dans divers sons, notamment dans celui du piano, M. Guillemin nie leur existence objective. Nous n'allons pas aussi loin, car certains faits nous paraissent nettement en faveur de l'existence objective des harmoniques ; mais nous ne croyons pas, comme on le dit d'ordinaire, que le timbre des sons dépende *uniquement* de la présence et de l'intensité relative des divers harmoniques. Cela ne peut *se prouver vraiment* par les expériences d'analyse des sons, et les expériences de synthèse sont encore bien plus vagues.

Helmholtz a tenté de reproduire les sons des divers instruments et de la voix humaine en faisant vibrer ensemble plusieurs diapasons électriques, harmoniques l'un de l'autre.

La méthode ne semble pas avoir donné de résultat décisif ; dans la reproduction de la voix humaine notamment (voyelles chantées), le succès a été très faible. Et cependant, cette reproduction expérimentale est possible, puisque M. Marage, grâce à une étude méthodique de la voix, a pu la réaliser d'une manière satisfaisante.

II

LE ROLE VÉRITABLE DE LA VIBRATION SINUSOÏDALE EN ACOUSTIQUE

Discussion relative surtout aux théories de l'acoustique mathématique. — Ici doit se préciser le point fondamental de notre discussion. Nous venons de voir que la série de Fourier ne peut pas s'appliquer à la théorie du timbre. Cela entraîne une conclusion très importante : l'hypothèse de Ohm-Helmholtz qui attribue un rôle si considérable à la vibration sinusoïdale, n'est pas démontrée.

Donc, si nous nous plaçons au point de vue de la sensation sonore, les vibrations pendulaires ne doivent plus, comme on l'admet d'ordinaire, être considérées comme les seules vraiment importantes, capables de produire, en se mélangeant les unes aux autres, l'infinie variété de tous les timbres sonores existants.

Les timbres des sons ne sont probablement pas dus à de simples combinaisons de vibrations pendulaires ; celles-ci ne jouent pas le rôle physiologique qui leur est d'ordinaire attribué.

D'un autre côté, plaçons-nous au point de vue de la théorie analytique des vibrations des divers corps sonores. Nous remarquerons que là aussi, dans un ordre d'idées différent du précédent, on résout tous les problèmes d'acoustique par la vibration sinusoïdale, en attribuant à celle-ci un rôle d'une importance extrême au point de vue physique ; et cela, sans preuve à l'appui de cette manière de faire. Quand un sinus d'un arc proportionnel au temps peut, multiplié par une fonction analytique des coordonnées x, y, z, constituer une solution particulière de l'équation aux dérivées partielles qui régit les vibrations d'un corps solide ou fluide, on se hâte d'en conclure que ce *sinus* représente un son propre du corps sonore dont il s'agit. Or, rien n'autorise cette conclusion.

En effet, à ne considérer que le côté mathématique de la question, il est facile de voir que les solutions particulières isolées sont impuissantes à représenter des modes de vibrations réels des corps sonores. Même dans certaines questions acoustiques où une solution particulière semble pouvoir être immédiatement interprétée, on voit, en y regardant d'un peu près, que les conditions limites ou les conditions initiales dont la solution particulière tient compte ne sont pas physiquement réalisables.

C'est spécialement à ce sujet qu'il nous a paru intéressant de présenter dans la suite de ce travail, une discussion de l'interprétation physique des solutions particulières mathématiques rencontrées dans divers problèmes d'acoustique. Elle montre, nous semble-t-il, que les modes de vibration théoriques donnés par les fonctions sinusoïdales du temps, nommées solutions particulières, ne peuvent prétendre à représenter les divers sons propres réels.

Une corde sonore infiniment mince et un tuyau long ouvert admettent, il est vrai, des sons propres dont les nombres de vibrations sont proportionnels aux nombres entiers successifs 1, 2, 3, 4... D'autre part, les solutions particulières sont des sinus périodiques dont les nombres respectifs de périodes obéissent à la même loi ;

il y a ici correspondance presque parfaite (¹) entre les sons propres réels et les solutions particulières.

Mais ce sont là deux cas où la nature remarquablement symétrique du mode de vibration pourrait expliquer cette coïncidence. On n'a pas le droit de conclure de ces cas particuliers remarquables au cas général.

Les sons propres des membranes, verges, plaques ou encore des espaces pleins d'air vibrant par résonance, ne sont probablement pas des sons pendulaires et surtout, ils ne correspondent probablement pas aux solutions particulières des équations de ces divers corps sonores.

Ces diverses considérations nous conduisent à conclure qu'*il y a lieu de diminuer beaucoup* l'importance si considérable qu'on donne aux vibrations pendulaires en acoustique. D'une part, la vibration pendulaire n'est pas, d'une manière exclusive, l'agent de toutes les sensations sonores continues. D'autre part, la théorie mathématique ne prouve nullement que les sons propres des divers corps sonores soient dus à des vibrations pendulaires.

Il est vrai, comme nous en dirons un mot, que les frottements et les résistances passives amortissent plus vite les irrégularités des vibrations que les vibrations elles-mêmes, ce qui donne l'occasion d'observer souvent des vibrations au moins quasi-sinusoïdales. Mais ceci n'infirme en rien la critique qui précède.

III

DE L'INTERPRÉTATION PHYSIQUE DES SOLUTIONS PARTICULIÈRES DES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DES DIVERS CORPS SONORES

A. *Verges vibrantes de longueur finie.* — En prenant pour axe des x la direction de la verge supposée rigide, l'équation de vibration des verges s'écrit :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + a^2 \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 0. \qquad (1)$$

(¹) Cette correspondance n'est pas rigoureuse mais seulement approximative, car les cordes réelles ne sont jamais parfaitement flexibles.

y représente l'élongation et t, le temps ; a est une constante dépendante des dimensions et de la nature de la verge.

On trouve une solution particulière de cette équation en posant pour une verge de longueur finie l

$$y = \mathrm{Y} \cos\left(\frac{\omega^2 a}{l^2} t\right) \qquad (2)$$

Y étant une fonction de x seulement.

Substituons cette valeur de y dans (1), nous en tirerons une équation différentielle

$$\frac{d^4\mathrm{Y}}{dx^4} = \frac{\omega^4}{l^4}\mathrm{Y}$$

qui donne par intégration

$$\mathrm{Y} = \mathrm{Y}_0 \cos\left(\frac{\omega}{l}x\right) + \mathrm{Y}_1 \sin\left(\frac{\omega}{l}x\right) + \mathrm{Y}_2 e^{\frac{\omega}{l}x} + \mathrm{Y}_3 e^{-\frac{\omega}{l}x}\ ; \quad (3)$$

Y_0, Y_1, Y_2, Y_3 sont des constantes arbitraires entre lesquelles les conditions aux extrémités de la verge établiront des relations qui serviront aussi à déterminer ω.

Supposons la verge encastrée à un bout, pour $x = 0$ par exemple, et libre à l'autre bout pour $x = l$, on écrira que :

$$\text{pour } x = 0, \quad (\mathrm{Y})_0 = 0 \quad \left(\frac{d\mathrm{Y}}{dx}\right)_0 = 0\ ;$$

et pour $x = l$: deux autres conditions exprimant que le couple s'exerçant sur le tronçon extrême de la verge et aussi l'effort tranchant, sont nuls.

De là, quatre équations devant être vérifiées quel que soit le temps, équations qui déterminent les rapports de trois des constantes arbitraires Y_1, Y_2 et Y_3 par exemple, à la première Y_0. Ces équations donneront aussi pour ω une succession illimitée de valeurs comprises dans les formules

$$\omega = \frac{\pi}{2} + \epsilon + 2k\pi$$

$$\omega = \frac{\pi}{2} - \epsilon + (2k+1)\pi$$

où ϵ est inférieur à $\frac{\pi}{2}$. Et les diverses valeurs de ω fourniront autant de solutions particulières de (1).

Pour intégrer rigoureusement l'équation (1) à l'aide de ces solutions particulières, *il faut faire ce que l'on fait pour intégrer l'équation des cordes vibrantes ;* additionner toutes les solutions particulières de la forme (2) où Y se trouve remplacé par sa valeur (3), faire $t = 0$ dans la somme ainsi formée et déterminer les coefficients restés arbitraires de tous les termes de cette série de manière que celle-ci représente la déformation initiale de la verge vibrante.

Telle est la seule manière de tenir compte des circonstances initiales du mouvement, *ce qui est indispensable dans toute question de physique mathématique.*

Dans le cas des cordes vibrantes, les solutions particulières de la forme

$$A_1 \sin \frac{nx}{l} \cos \frac{nat}{l},\ A_2 \sin \frac{2nx}{l} \cos \frac{2nat}{l},\ldots \tag{4}$$

additionnées ensemble, donnent, quand on fait $t = 0$, la série

$$A_1 \sin \frac{nx}{l} + A_2 \sin \frac{2nx}{l} + A_3 \sin \frac{3nx}{l} + \ldots \tag{4 BIS}$$

que l'on identifie aisément avec l'expression

$$y = f(x)$$

représentant la déformation initiale de la corde vibrante.

L'identification s'obtient rigoureuse à l'aide du procédé imaginé par Fourier (série de Fourier).

C'est donc par l'application exacte de cette méthode qu'on peut obtenir l'intégrale générale de l'équation des verges vibrantes. La verge sera supposée déformée par une traction transversale exercée sur un de ses éléments, puis abandonnée à elle-même. A l'instant initial où on l'abandonne et où commence la vibration, la déformation de la verge pourra être exprimée comme plus haut par une fonction y de x, aisément exprimable

$$y = \varphi(x).$$

Il restera à identifier cette fonction y de x représentant la déformation initiale avec la série, somme des solutions particulières. Il existe une méthode d'identification permettant, comme celle de Fourier pour le cas des cordes, la détermination des coefficients arbitraires des solutions particulières.

La série ainsi entièrement déterminée devra donc représenter le mouvement vibratoire de la verge vibrante. C'est bien en effet une solution générale de l'équation (1) que l'on a ainsi obtenue. Mais il nous paraît absolument illégitime d'attribuer une signification physique à *chacune des solutions particulières qui entrent dans la série*, lorsque cette solution particulière est *prise isolément*. Une telle solution isolée ne peut satisfaire à une déformation initiale de la verge physiquement réalisable, donc elle ne peut représenter un mode de vibration de celle-ci.

Or, ici comme pour les cordes, on a coutume de dire que ces solutions particulières représentent les sons propres des verges vibrantes. On ajoute même que si, dans les cordes, les sons propres sont harmoniques l'un de l'autre comme l'indiquent les expressions (4), il n'en est plus de même pour les verges, les périodes des termes sinusoïdaux successifs n'étant plus des divisions exactes de la période du premier terme. Ceci mène certains auteurs à conclure que les sons propres n'étant pas harmoniques ne peuvent exister simultanément et, par conséquent, qu'une verge ne peut rendre qu'un son rigoureusement sinusoïdal : l'un quelconque des sons propres théoriques.

Mais ces assertions n'ont aucune preuve, puisque, comme nous venons de le voir, on ne peut admettre rationnellement l'interprétation habituelle des solutions particulières.

Il est vrai que les vibrations des diapasons qui résonnent en donnant leurs sons fondamentaux paraissent sinusoïdales à l'expérience. Mais ceci s'explique aisément par l'effet des résistances passives et du frottement de l'air ambiant, causes dont les équations de vibrations font abstraction. La raison de ce fait n'est donc pas la forme pendulaire des solutions particulières.

A notre avis, il ne faut pas accorder *à priori* de signification physique aux solutions particulières.

Disons maintenant quelques mots d'un problème voisin de celui que nous venons d'examiner et où l'interprétation de la solution particulière paraît admissible *à priori,* mais ne l'est évidemment plus quand on y regarde de près. C'est le cas de la propagation le long d'une verge infiniment longue d'une vibration imposée en un de ses points.

B. *Propagation des vibrations dans les verges élastiques infiniment longues.* — Dans le cas des verges de longueur très grande, on peut intégrer rigoureusement l'équation du mouvement transversal propagé dans la verge. Or si l'on compare le résultat de cette intégration avec les lois de propagation qui résultent de l'emploi des solutions particulières, les deux interprétations différentes auxquelles on arrive pour le même phénomène paraissent difficiles à concilier. C'est ce que nous allons montrer.

La propagation le long d'une verge indéfinie obéit à la même équation aux dérivées partielles que la vibration des verges finies ; l'équation

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + a^2 \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 0, \qquad (1\text{BIS})$$

si l'on prend pour axe des x la direction de la verge supposée tout à fait droite.

Or l'expression

$$y = y_0 \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) \qquad (2\text{BIS})$$

satisfait à l'équation aux dérivées partielles (1BIS) pourvu que, posant $\lambda = VT$, l'on ait

$$V = \sqrt{\frac{2\pi a}{T}}.$$

On en conclut dans divers traités de physique, que si l'on imprime à l'élément de la verge se trouvant à l'origine un mouvement vibratoire forcé, représenté par l'équation

$$y = y_0 \sin \frac{2\pi t}{T}, \qquad (3\text{BIS})$$

ce mouvement se communiquera de proche en proche et sans altération le long de la verge, comme dans une corde indéfinie tendue. On doit faire cependant la réserve que la vitesse de propagation dépend ici de la période de la vibration.

Or, cette conclusion que la verge peut propager sans la déformer toute onde sinusoïdale, n'est pas légitime, car la condition à la limite $x=0$ (3 bis) qu'on a admise pour intégrer, est irréalisable expérimentalement.

On pourrait, la verge étant supposée au repos jusqu'à l'origine du temps $t=0$, considérer qu'à partir de $t=0$, on imprime à l'élément de la verge se trouvant à l'origine la vibration forcée

$$y = y_0 \sin \frac{2\pi t}{T};$$

mais si la condition limite ne spécifie pas que le mouvement a commencé pour $t=0$, l'intégration n'a plus aucun sens. Et en effet, cela reviendrait à dire que la vibration imprimée à l'origine l'est depuis le temps $t=-\infty$. On ne peut pas concevoir la signification physique d'une condition de cette espèce ; on ne peut donc pas songer à l'introduire dans le calcul pour en tirer des conséquences physiques concevables, et vérifiables.

Si éloigné antérieurement que soit l'instant initial par rapport à l'instant actuel auquel on considère le mouvement, on ne peut admettre que cet instant précède l'autre d'un temps infini.

Si en effet on désigne l'instant initial par $t=-\alpha$, α étant très grand mais fini, cela ne revient nullement à $t=-\infty$, même d'une manière approximative. Car confondre ces deux hypothèses relatives à l'instant où commence la vibration imposée à l'origine des coordonnées, c'est faire abstraction de tout le mouvement imprimé depuis $t=-\infty$ jusqu'à $t=-\alpha$, ce qui n'est certes pas permis.

D'ailleurs, l'intégration réelle de l'équation (1 bis) a été faite pour le cas des verges indéfinies. Une méthode pour résoudre ce problème a été donnée par M. Boussinesq. Or l'interprétation des intégrales obtenues par ce savant, possible dans un cas qu'on peut rapprocher de celui qui nous occupe, montre combien il est peu vraisemblable que l'expression (2 bis) soit une solution de l'équation (1 bis).

M. Boussinesq forme l'intégrale rigoureuse de l'équation (1), ou (1 bis) pour le cas des verges indéfinies, puis il applique sa formule à des exemples relativement simples (¹). Nous remarquons, parmi ces exemples, le suivant :

Une verge mince rectiligne est supposée s'étendre de $x = -\infty$ à $x = +\infty$.

On imprime au tronçon de la verge situé à l'origine, un déplacement instantané que l'on maintient pendant un temps 2ϵ très court, de $t = -\epsilon$ à $t = \epsilon$, après quoi le tronçon est ramené à l'origine.

On peut aussi imprimer une impulsion instantanée dans un sens à l'instant $t = -\epsilon$, puis une impulsion en sens inverse à l'époque $t = +\epsilon$.

M. Boussinesq considère encore d'autres modes d'ébranlement qui sont censés réalisés tous pendant un temps très court 2ϵ. Les intégrales deviennent aisées à interpréter dès qu'il s'est écoulé après la fin de l'ébranlement un temps beaucoup plus long que la durée même de l'ébranlement. A ce moment, la verge présente une infinité d'ondulations, notamment le long des x positifs, de 0 à ∞. Ces ondulations se propagent dans le sens positif en s'atténuant avec le temps, de sorte qu'en définitive, la verge ne propage le mouvement qu'*en le disséminant et en le rendant insensible*.

Or, au lieu d'un déplacement constant imprimé à l'origine et durant le temps 2ϵ, imprimons un déplacement sinusoïdal marqué par l'équation

$$y = k \sin mt ;$$

m étant très grand, l'ébranlement durera depuis $t = 0$ jusque $t = \frac{\pi}{m}$.

En ce cas, l'interprétation des intégrales de M. Boussinesq conduirait à des lois de propagation analogues à celles que nous venons de dire. Après un temps relativement grand par rapport à $\frac{\pi}{m}$, le mouvement qui se propage dans la verge est en train de se disséminer et de devenir insensible.

Si le déplacement forcé communiqué à l'origine comprenait

(¹) Voir Boussinesq, *Application des potentiels, etc.* Paris, Gauthier-Villars, 1885.

deux impulsions sinusoïdales inverses ; autrement dit, si ce déplacement était représenté par la même formule

$$y = k \sin mt \tag{1}$$

où t varierait non seulement de 0 à $\frac{\pi}{m}$ mais de 0 à $\frac{2\pi}{m}$, l'impulsion inverse de la première se propagerait aussi en se disséminant et devenant insensible. Et cela semble devoir se passer toujours de même pour un certain nombre d'impulsions successives alternées représentées par la formule (4). *Nous sommes loin de la propagation correspondant à la solution particulière* (2 bis), *onde sinusoïdale ne détruisant en la propageant aucun des caractères de la vibration simple.* Il n'y a rien d'étonnant à cette contradiction, puisque la solution particulière était à rejeter *à priori.*

C. *Remarque sur l'emploi des solutions particulières dans d'autres problèmes d'acoustique mathématique.* — Nous avons remarqué un autre problème de physique mathématique où la contradiction est à prévoir entre l'interprétation de la solution particulière et celle de l'intégrale générale rigoureuse, pour la même raison que dans la question précédente. Et de fait, dans ce problème, la contradiction paraît plus manifeste encore que dans le précédent entre la solution particulière et la solution générale. Il s'agit de l'intégration de l'équation des cordes vibrantes indéfinies tendues dans un milieu résistant.

Cette équation de la forme

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + k \frac{dy}{dt} = \alpha^2 \frac{d^2 y}{dx^2}, \tag{5}$$

se retrouve identique dans la théorie électromagnétique de la lumière où elle régit la propagation des ondes lumineuses dans un milieu imparfaitement isolant (1).

---

(1) Voir notre mémoire publié dans les Annales de la Société scient. de Bruxelles (t. XXVI, 2$^{\text{me}}$ partie) : *Sur certaines équations aux dérivées partielles de la physique mathématique.*

Or, des expressions de la forme

$$y = e^{-px} \cos n(\mathrm{V}t - qx) \qquad (6)$$

permettent d'intégrer l'équation (5). On en déduit que les vibrations se propagent dans les cordes tendues dans un milieu résistant en diminuant d'amplitude, mais en conservant leurs caractères. Tout cela cependant avec une réserve : quand la solution (6) satisfait à l'équation (5), les valeurs de p et de V ne sont plus arbitraires. La vitesse de propagation V notamment change avec la période de la vibration, elle est plus faible pour les vibrations lentes que pour les vibrations rapides, et sa limite supérieure pour les vibrations très rapides est α.

Remarquons que α (voir l'équat. 5) serait la valeur même de la vitesse de propagation si la corde était tendue dans le vide.

D'autre part, Laplace a donné l'intégration rigoureuse de l'équation (5). Dans notre mémoire ci-dessus mentionné, nous avons indiqué quelques conséquences de cette intégration (¹). Nous avions obtenu la conclusion que quand un mouvement quelconque, sinusoïdal ou non, commençait à l'origine où le repos avait régné jusque-là, la tête de l'onde se propage avec la vitesse constante α. Et cela, quelle que soit la période, rapide ou lente. Tout ceci semble contraire aux conséquences de la solution particulière (6) qu'on a indiquées ci-dessus.

D. *Conclusion.* — Nous venons de voir que les intégrales particulières de l'équation (1) contenant en facteur un sinus d'une fonction linéaire du temps, ne représentent très probablement pas les vibrations réelles des verges. C'est donc à tort que ces solutions particulières sont appelées sons propres. La verge peut avoir des sons propres, mais ceux-ci ne correspondent pas aux intégrales particulières.

La même critique s'applique à l'étude théorique des vibrations des plaques élastiques. La recherche théorique des sons propres d'une plaque est un intéressant problème de calcul fondé sur l'emploi des solutions particulières sinusoïdales ; mais il est cer-

---

(¹) Voir le chapitre deuxième du mémoire.

tain qu'on n'établira jamais la coïncidence entre ces sons propres théoriques et les sons propres réels que peut fournir l'expérience.

On emploie aussi les solutions particulières fonctions sinusoïdales du temps, dans la théorie des vibrations de l'air contenu dans des récipients de diverses formes, et mis en mouvement par résonance, nous parlons des résonnateurs à air. Or ici encore et toujours pour les mêmes raisons, nous ne pensons pas que ces solutions particulières correspondent aux vrais sons de résonance.

En résumé, *la théorie mathématique est impuissante à démontrer qu'il existe un seul corps sonore vibrant rigoureusement suivant la loi sinusoïdale.* Quant à l'expérience, elle se borne à peu près, dans cet ordre d'idées, aux graphiques obtenus par l'inscription des sons des gros diapasons. Ces graphiques sont des sinusoïdes ou des courbes s'en rapprochant beaucoup ; mais ces effets sont dus, comme on l'a dit plus haut, aux frottements de l'air et aux résistances passives provenant de l'imparfaite élasticité du métal, effets qui tendent à rendre les vibrations sinusoïdales. Or ces causes sont absolument étrangères aux équations aux dérivées partielles dans lesquelles on n'en tient pas compte (¹). L'expérience ne peut donc pas être considérée comme confirmant la théorie mathématique.

(¹) A moins qu'on n'introduise un terme spécial exprimant l'effet du frottement comme pour le problème des cordes vibrantes dans un milieu résistant. Mais on ne le fait pas pour les corps sonores complexes comme les verges, les plaques, etc.

La valeur de la couche amylifère dans la tige

ET

la théorie stélaire de Van Tieghem

PAR

Victor GRÉGOIRE
professeur à l'Université de Louvain

Dans cette *communication préliminaire*, nous ne tenons compte que de la tige des Angiospermes. Pour définir, dans les limites de ce groupe, la théorie stélaire de Van Tieghem, il faut distinguer deux cas principaux : le cas où la tige possède soit une assise plissée unique, soit une assise amylifère unique, disposée plus ou moins en anneau continu, et le cas où chaque faisceau possède une gaine isolée, plissée ou amylifère. Nous caractériserons le premier type par la dénomination de *cercle* plissé ou amylifère, et nous réserverons au second type l'expression de *gaines* plissées ou amylifères.

Le premier type représente la *monostélie* de Van Tieghem : on sait que cet auteur conçoit la tige monostélique comme constituée de trois *régions anatomiques*, possédant une valeur morphologique propre : 1° l'épiderme ; 2° le cylindre cortical, dont l'assise la plus interne, souvent différenciée en cercle plissé ou amylifère, est l'homologue de l'endoderme de la racine et mérite le même nom ; 3° le cylindre central, comprenant les faisceaux et le parenchyme dans lequel ils plongent, les faisceaux et le parenchyme central étant ainsi deux éléments constitutifs d'une unité anatomique supérieure, le cylindre central ou la *stèle*. Dans cette conception, le parenchyme cortical et le parenchyme central ne sont donc pas, comme le pensait Sachs, deux portions d'un même parenchyme général, mais ce sont deux parenchymes de valeur morphologique différente. Par conséquent, le cercle plissé et le cercle amylifère possèdent eux-mêmes la valeur d'une assise morphologique et ils ne représentent pas simplement, comme dans la conception de

Sachs, une couche d'un parenchyme général caractérisée par une différenciation spéciale.

Traduite en termes phylogénétiques, la conception stélaire des tiges monostéliques comporte une origine différente pour le parenchyme central et pour le parenchyme cortical. Ce serait la protostèle primitive, massive, dépourvue de moëlle et entourée déjà de parenchyme cortical, qui aurait donné naissance à la fois aux faisceaux isolés et au parenchyme central.

Dans le second type, Van Tieghem considère les gaines isolées, plissées ou amylifères comme homologues du cercle endodermique : au même titre que ce dernier, elles constituent, d'après lui, la limite interne du parenchyme cortical. Aussi l'auteur admet-il que, dans ces cas, le parenchyme de la tige est, jusqu'au centre, tout entier cortical. Il n'y aurait donc pas de stèle dans de pareilles tiges et l'auteur les appela *astéliques*.

Strasburger (¹), tout en adoptant les conceptions de Van Tieghem sur les régions anatomiques de la tige monostélique, apporte cependant un changement important à l'interprétation du type astélique, auquel il propose de donner le nom de « schizostélie ». Il admet en effet, contrairement à Van Tieghem, que le parenchyme central des tiges à gaines isolées, est homologue du parenchyme central des tiges monostéliques. Il ne considère donc pas les *gaines* amylifères ou plissées comme homologues des *cercles* plissés ou amylifères. Aussi en réservant le nom d'endoderme aux assises plissées, il propose le nom de phléoterme pour désigner la couche limite interne du cylindre cortical, aussi bien dans les tiges schizostéliques que dans les tiges monostéliques.

Schoute, dans sa thèse sur la théorie stélaire (²), adopte les conceptions de Strasburger touchant l'interprétation de la schizostélie et se sépare en ce point de Van Tieghem. Il maintient néanmoins la signification morphologique de la stèle.

La question de la valeur de la théorie stélaire peut être examinée au triple point de vue de l'ontogénèse, de la phylogénèse et de

---

(¹) Strasburger, *Ueber den Bau und die Verrichtung der Leitungsbahnen in den Pflanzen*. Iena, 1891.

(²) Schoute, *Die Stelär-Theorie*. Iena, 1902.

l'anatomie comparée. C'est uniquement à ce dernier point de vue que nous nous plaçons dans cette note préliminaire.

Notons avant tout que, pour établir la vérité de la conception stélaire, il serait nécessaire de montrer que, dans le cas de monostélie, le cercle plissé ou amylifère possède lui-même une valeur anatomique, c'est-à-dire, qu'il est, essentiellement, la couche-limite interne de la région corticale et qu'il ne représente pas simplement une couche d'un parenchyme général qui aurait acquis des caractères histologiques spéciaux ; il faudrait montrer que ce cercle n'est pas simplement une *assise physiologique* mais bien une *assise morphologique*. Or, pour trancher cette question à la lumière de l'anatomie comparée, il ne suffit pas d'établir une statistique des cas où l'on observe un anneau plissé ou amylifère. Il faut comparer les *dispositions* présentées, dans les diverses plantes, par ces couches et voir si ces dispositions sont telles qu'elles obligent ou du moins qu'elles autorisent à considérer les cercles amylifères ou plissés comme des assises morphologiques.

Nous avons entrepris cette étude comparative, mais en nous bornant jusque maintenant à l'examen des couches amylifères, parce qu'elles représentent la disposition qu'on rencontre plus fréquemment dans les tiges aériennes. Nos observations ont porté déjà sur un bon nombre de plantes ; bien qu'*encore incomplètes,* elles nous permettent cependant d'énoncer cette conclusion : la couche amylifère, même lorsqu'elle est en forme de cercle, ne présente pas de titres justifiant son élévation au rang de couche morphologique ; au contraire, considérée au point de vue précis de l'anatomie comparée, elle apparaît plutôt comme une couche spécialement différenciée d'un parenchyme général (¹).

Cette conclusion ressort pour nous de deux points principaux : la *localisation* du tissu amylifère dans la structure générale de la tige ; les *caractères* propres de ce tissu lui-même.

I. Au sujet du premier de ces points, nous procéderons en deux étapes. Nous montrerons d'abord que, de l'étude des *localisations*

(¹) Nous ne nous arrêtons pas dans cette note à l'examen de la bibliographie. Notons toutefois que la théorie stélaire a été récemment encore combattue par plusieurs auteurs (entre autres : Jeffrey, Fischer, Farmer et Hill, Brebner, Solms-Laubach, etc.).

diverses de l'assise amylifère (en comprenant sous ce nom aussi bien les cercles que les gaines) et de l'étude des *conditions* dans lesquelles se présentent ces divers types de localisation, il résulte que les « cercles amylifères », d'un côté, et les « gaines amylifères », de l'autre, représentent deux cas, non essentiellement différents, d'une même structure, *deux modalités d'un même trait d'organisation de la tige*, de même, pour ainsi dire, que la disposition des fibres en anneau continu ou en calottes supraleptomiennes ne représente non plus que deux modalités d'un même trait d'organisation ; et que, de plus, la réalisation de l'une ou de l'autre de ces deux modalités du tissu amylifère dépend du mode de distribution, dans la tige, des structures conductrices ou squelettiques.

Voici en effet comment on peut synthétiser les diverses localisations du tissu amylifère dans la *tige :*

1) Les cas où on observe un *cercle amylifère* se ramènent aux types suivants :

a) Lorsque, quelle que soit la distribution des faisceaux, il existe, à une certaine distance des faisceaux eux-mêmes, un cercle continu de fibres ; le cercle amylifère se trouve alors au contact immédiat du cercle fibreux, en dehors de celui-ci (exemples : l'*Aristolochia* et de nombreuses tiges, tant Monocotylées que Dicotylées) ;

b) Lorsque, le tissu scléreux se trouvant disposé en gaines autour de chaque faisceau, il se produit une confluence des gaines scléreuses, en sorte que les faisceaux se trouvent englobés dans un anneau scléreux continu. Ce dernier est alors bordé vers l'extérieur par un cercle amylifère (ex. : beaucoup de Monocotylées, entre autres l'axe floral de *Yucca*, dans ses parties complètement différenciées) ;

c) Lorsque, les fibres ne se trouvant pas disposées en anneau, mais seulement en calottes supraleptomiennes, il se produit une sclérification plus ou moins forte de quelques assises tangentielles des rayons médullaires situées entre les faisceaux voisins, en sorte que ceux-ci sont rattachés les uns aux autres par des tractus de tissu scléreux (ex. : *Clematis paniculata*). Le cercle amylifère suit alors les arcs fibreux et borde, à l'extérieur, la partie sclérifiée des rayons médullaires ;

d) Lorsque, les fibres se trouvant disposées non pas en anneau mais en arcs supraleptomiens, il existe entre les faisceaux voisins soit des tractus tangentiels de procambium (1) soit du parenchyme dans lequel se dessinent bientôt des arceaux de cambium interfasciculaire ; en d'autres termes, lorsque la tige, ne possédant pas d'anneau fibreux continu, montre d'autre part un anneau cambial continu (ex. : de très nombreuses Dicotylées). On remarque d'ailleurs, disons-le en passant, que, dans les Dicotylées possédant un anneau de fibres, l'anneau cambial se dessine plus tardivement (ex. : *Cucurbita, Aristolochia)* (2).

2) Au contraire, lorsque, d'une part, il n'y a pas d'anneau continu de fibres mais seulement des calottes supraleptomiennes, ou des gaines scléreuses enveloppant chaque faisceau ; lorsque, d'autre part, les faisceaux ne sont rattachés les uns aux autres ni par des portions scléreuses des rayons médullaires ni par des tractus de procambium ni par un parenchyme précurseur de cambium interfasciculaire, mais que chacun d'eux est enveloppé de toute part par du parenchyme destiné à demeurer parenchyme, dans ces cas, on n'observe jamais de cercle amylifère, mais toujours simplement des gaines amylifères (ex. : *Chelidonium majus, Ranunculus repens, Zea Mais*, etc.).

En résumé, l'étude comparée des différentes localisations de l'assise amylifère nous enseigne que l'on ne trouve un *cercle amylifère* que dans les cas où la tige possède, sous forme d'anneau continu, une structure autre, soit conductrice, soit squelettique, avec laquelle le tissu amylifère est en relation et que, d'autre part, en l'absence de structure conductrice ou squelettique continue, on ne trouve que des gaines amylifères.

Or, cela ne peut s'expliquer, pensons-nous, qu'en admettant la conclusion annoncée plus haut, c'est-à-dire en considérant cercle et gaines comme deux modalités de tissu amylifère dont la réalisation dépend de la disposition, circulaire ou en massifs isolés, des structures conductrices ou squelettiques.

Cette conclusion se trouve confirmée solidement par l'étude de certains cas qui offrent, pour ainsi dire, des transitions entre cercle amylifère et gaines amylifères.

---

(1) Voir, pour l'emploi de cette dénomination : Haberlandt, *Physiologische Pflanzenanatomie*, 1904, p. 559.

(2) Voy. De Bary, *Vergleichende Anatomie der Vegetationsorgane der Phanerogamen und Farne*, 1877, p. 479.

a) Au sein d'un même genre, on peut rencontrer, dans différentes espèces, les deux sortes d'assise amylifère, les cercles et les gaines: or, cette variété est en rapport avec la distribution variable des tissus squelettiques dans ces différentes tiges. C'est ainsi que le *Ranunculus repens* montre des gaines amylifères, tandis que le *Ranunculus chœrophyllos*, d'après les figures de Marié (¹), possède un cercle amylifère. Or, tandis que le *Ranunculus repens* contient des faisceaux « fibroconducteurs » isolés, séparés les uns des autres par du parenchyme ordinaire, le *Ranunculus chœrophyllos* possède, d'après les figures de Marié, des bandes tangentielles de tissu scléreux reliant les faisceaux voisins.

b) Il y a plus : dans une même tige aérienne, on rencontre, en passant graduellement d'un niveau à l'autre, des dispositions qui font une *transition ménagée* entre gaines isolées et cercle continu, et cela, encore une fois, en relation avec le développement divers du tissu squelettique. Dans l'axe floral de *Yucca*, on voit à un niveau supérieur, les faisceaux épars entourés chacun d'une gaine scléreuse mais restant encore séparés les uns des autres par du parenchyme ; à un niveau inférieur, le sclérenchyme s'étant considérablement développé arrive à se continuer d'un faisceau à l'autre et forme un massif unique dans lequel plongent les faisceaux. Or, au premier niveau, on constate que les faisceaux de la rangée extérieure ou, plus souvent, les faisceaux de deux ou de plusieurs des rangées extérieures, possèdent chacun leur *gaine* amylifère ; au second niveau, on constate un *cercle* amylifère, enveloppant l'anneau scléreux ; dans les niveaux intermédiaires, marqués par la sclérification de plus en plus avancée du tissu interfasciculaire, on observe tous les modes de localisation amylifère transitionnels entre gaines isolées et cercle. La sclérification progressant de l'intérieur de la tige vers l'extérieur, on voit pour ainsi dire, le tissu amylifère diminuer de plus en plus sur les flancs des faisceaux jusqu'à ce que, refoulé complètement vers l'extérieur, il constitue un cercle continu.

Ces différentes formes de transition, surtout la dernière, montrent bien, nous paraît-il, que gaines et cercle sont deux modalités d'un même trait d'organisation, dont la réalisation dans une

---

(¹) Marié, *Structure des Renonculacées*, Ann. Sc. Nat. Bot., 1885.

tige ou dans un tronçon de tige dépend de la distribution des structures conductrices et squelettiques.

Il nous reste maintenant, dans une seconde étape de notre argumentation, à montrer que, en présence de ces constatations, le cercle amylifère ne présente pas de titres justifiant son élévation au rang d'une assise morphologique.

Rappelons d'abord que Strasburger (¹), en s'appuyant sur la variété présentée, d'après Marié, par la seule section Hecatonia du genre *Ranunculus*, a pu établir, en toute rigueur, que, contrairement à l'opinion de Van Tieghem, le parenchyme central des *Ranunculus* à gaines — plissées ou amylifères, — est homologue du parenchyme central des *Ranunculus* à cercle plissé ou amylifère. Il en résulte que la présence de gaines amylifères autour de chaque faisceau fibroconducteur ne suffit pas pour autoriser la conclusion que tout le parenchyme situé en dehors de ces gaines serait cortical ; il en résulte, en d'autres termes, que les gaines ne constituent pas une limite morphologique. Or, dirons-nous maintenant, ce que l'on doit affirmer des gaines, il faut l'étendre aux cercles eux-mêmes ; car ceux-ci, nous venons de le voir, ne sont qu'une modalité de l'assise amylifère, au même titre que les gaines elles-mêmes, la réalisation d'un type plutôt que de l'autre ne dépendant que de la disposition présentée par les tissus conducteurs ou squelettiques. Le cercle amylifère, par lui-même, ne se présente donc pas non plus comme une limite morphologique et sa présence, même si on la constate dans un très grand nombre de tiges, ne constitue en aucune façon un argument pour conclure que le parenchyme situé en dehors de ce cercle est d'une autre valeur morphologique que le parenchyme situé en dedans de lui. De même que les gaines amylifères apparaissent comme des couches d'un parenchyme général qui ont acquis une différenciation particulière, ainsi en est-il aussi des cercles amylifères.

II. Si l'on analyse maintenant, non plus les localisations du tissu amylifère dans l'ensemble de la tige, mais les caractères propres de ce tissu, on verra qu'ils ne correspondent pas non plus à ceux d'une couche morphologique. Nous nous bornons ici à une constatation que l'on peut faire dans *beaucoup de cas*.

(¹) ***Leitungsbahnen***, p. 311.

Dans les tiges qui, comme l'*Aristolochia Clematitis,* possèdent un anneau de fibres bien régulier, il est vrai que le cercle amylifère se montre lui-même comme une assise unique très régulière. Mais il n'en est pas de même si on examine des tiges qui, comme l'*Akebia quinata*, possèdent des calottes fibreuses supraleptomiennes fortement arquées. On voit alors que le tissu amylifère n'est formé d'une assise unique que sur le bord des parties les plus extérieures des arcs fibreux, mais que, dans l'enfoncement qui sépare deux arcs fibreux voisins, l'amidon se trouve situé dans plusieurs assises cellulaires et non pas seulement dans celle qui borde immédiatement les fibres. Dans ce cas, il n'y a donc *aucun moyen* de tracer *une couche amylifère*, limite interne d'un cylindre cortical.

L'explication la plus plausible de ces aspects est la suivante : l'amidon se dépose dans le parenchyme qui borde les fibres : au contact des portions les plus extérieures des arcs fibreux, l'amidon ne se dépose que dans une seule assise, parce que, en ces niveaux, le parenchyme amylifère vient buter contre les couches de parenchyme chlorophyllien. Au contraire, dans les enfoncements entre arcs fibreux voisins, l'amidon peut se déposer dans un plus grand nombre de couches.

Quoi qu'il en soit, le tissu amylifère, dans de nombreux cas, ne présente pas les caractères d' « *une* couche morphologique ».

Nous concluons que, considéré au point de vue de l'anatomie comparée, le tissu amylifère apparaît non pas comme une assise morphologique mais comme une assise physiologique, et que par conséquent, il ne fournit aucun appui à la théorie stélaire.

Nous poursuivons nos recherches sur un grand nombre de tiges et aussi sur des feuilles et nous étudions, au même point de vue, les cercles et gaines plissés. Les figures paraîtront dans notre mémoire « in extenso ». Nous aurons aussi dans notre travail définitif, à examiner la véritable signification physiologique des assises amylifères, pour savoir si elles servent à la conduction, ou si elles sont en relation avec la formation des tissus squelettiques et conducteurs, ou bien enfin si elles jouent le rôle de statocystes dans la réception de l'excitation géotropique.

Notes sur la Flore du Katanga

PAR

É. DE WILDEMAN
Conservateur au Jardin botanique de l'État, Bruxelles

Depuis quelque temps le Katanga attire spécialement l'attention en Belgique, et c'est non seulement sur ses richesses minières que nous voyons insister, mais encore sur la possibilité de faire de cette région un centre de colonisation, dans le sens propre du mot, par l'introduction de l'agriculture.

M. Émile Tibbaut, membre de la Chambre des Représentants a, dans un article publié par L'AGRONOMIE TROPICALE, résumé diverses opinions sur la colonisation du Katanga (1) et exprimé les raisons qui le portaient à considérer la base de cette colonisation comme agricole. Dans cette étude, que nous citons simplement, M. Tibbaut a donné avec soin la littérature du sujet, déjà considérable chez nous ; puis il est revenu sur la même question au Congrès catholique de Malines, où lui et M. Ch. Hervy-Cousin ont en particulier repris le sujet, tous deux étant d'accord sur l'importance de la colonisation agricole pour le Katanga, et nous ajouterons pour toutes les colonies. Où nous n'acceptons pas tous les arguments de ces auteurs, tout en applaudissant à leurs conclusions, c'est quand ils prétendent arriver à coloniser rapidement en poussant au premier rang l'élevage du bétail.

M. Ch. Hervy-Cousin nous dit (2) : « La première étape de toute colonisation de ce genre consiste dans l'élevage ; c'est une nécessité primordiale. Le gros bétail est nécessaire pour l'alimentation des colons ; les chevaux, les ânes, etc. sont indispensables aux travaux des champs et de la ferme. Il importe donc de constituer de prime abord un cheptel de tout premier ordre. »

---

(1) Ém. Tibbaut, *Colonisation du Katanga* (L'AGRONOMIE TROPICALE, n° 8, p. 113-136, et n° 9, p. 137-152).

(2) *Faut-il conseiller l'établissement des colons dans les parties habitables du Congo* (Congrès catholique de Malines, VIe section, Bruxelles, 1909).

Mais, avant de déclarer cette nécessité, M. Hervy-Cousin écrivait : « Dans cette œuvre [colonisation du Katanga] moins que dans toute autre on ne peut improviser ni s'aventurer à l'aveuglette. Il y faut une préparation minutieuse du sol à l'immigration du blanc. »

Nous devons donc conclure qu'avant cette étape, que l'auteur qualifie de première — avant de créer le cheptel — il faut préparer le terrain pour recevoir le bétail. Il ne faut pas se le dissimuler, l'élevage du bétail n'est pas chose facile en pays neuf ; il est même encore parfois assez difficile dans des pays relativement très avancés, tel, par exemple, le Brésil, où un de nos concitoyens, M. H. Puttemans, professeur à l'École polytechnique de Saint-Paul, a pu faire la remarque suivante à propos d'élevage et d'engrais : « Vu les inconvénients connexes de l'augmentation du bétail, il paraît donc préférable de renoncer, dans la majorité des cas, à cette solution, pour adopter celle des engrais verts complétés ou non par les engrais chimiques. »

Ce n'est pas le moment de discuter la manière dont devrait être dirigée la mise en valeur du sol du Katanga par l'agriculture. Avec M. Hervy-Cousin nous dirons qu'il serait tout à fait désastreux d'envoyer là-bas des familles de paysans belges et de les abandonner à leur inexpérience, même si le sol se trouve être totalement préparé à l'immigration du blanc.

Si le sol a vraiment besoin de cette préparation — ce dont plus personne ne semble douter actuellement — le colon, lui, a aussi besoin d'une préparation, sous peine de voir son temps en grande partie perdu dans des essais malheureux.

Nous sommes de l'avis de M. R. Vauthier qui voudrait voir des missions s'organiser pour aller étudier le terrain, et comme lui, nous voudrions voir la direction de ces missions confiée à des hommes ayant fait des études supérieures : médecins, agronomes, ingénieurs, accompagnés d'ouvriers spécialistes d'élite.

Tous auraient intérêt à passer par des écoles spéciales, car c'est par une éducation scientifique, technique et pratique que nos futurs coloniaux acquerront les bases nécessaires à la colonisation durable [1].

Certes nous devons suivre le développement du mouvement agricole dans les colonies anglaises qui touchent au sud du Katanga, mais il nous faut aussi tourner nos regards vers l'est et examiner ce que font nos voisins d'outre Tanganyka ; là aussi nous trouvons des conditions très comparables à celles du Katanga, et nous verrons que la grosse question de la colonisation de l'Est africain-allemand, par des colons européens, est vivement étudiée, mais que, jusqu'à ce jour, on n'a pas osé se prononcer sur la méthode qu'il faut employer pour mettre la région en valeur. Sera-ce par l'installation de fermes réduites, de petites exploitations exigeant un capital restreint, ou par de grandes ou moyennes exploitations nécessitant l'immobilisation de capitaux plus considérables [2] ?

Il y a d'ailleurs peut-être simplement là question de mots ; c'est par des chiffres qu'il faudrait fixer l'étendue et l'importance des exploitations. Nous croyons que les petites exploitations, telles qu'on les comprend chez nous, sont désirables, mais nous pensons qu'elles ne sont guère possibles dans les conditions économiques actuelles.

Si les Allemands ne sont pas encore tombés d'accord sur les moyens de réaliser le peuplement de l'Est africain, par leurs concitoyens, tous sont d'accord sur la nécessité d'avoir, pour toutes les branches de la colonisation, des dirigeants au courant des derniers progrès de la science. Pour l'agriculture, plus peut-être que pour les autres branches, ils ont fait des progrès immenses dans ces dernières années, et leurs belles écoles théoriques et pratiques montrent que, dans le domaine colonial, ils veulent suivre la voie ouverte à leur industrie par leurs écoles industrielles spéciales dont l'éloge n'est plus à faire.

---

[1] É. De Wildeman. *De l'Enseignement colonial dans les divers degrés de l'Enseignement général* (Congrès international d'expansion économique mondiale. Mons, 1905, section I).

[2] Consultez à ce sujet les rapports officiels de S. E. Dernburg et le Bulletin de Colonisation comparée, 1909, n° 9, p. 418 ; Rathgen, *Les nègres et la civilisation européenne* (Revue de l'Université de Bruxelles, mai-juin, 1909).

L'agriculture demande à être assise sur les recherches de botanique pure et, pour les branches de cette science, celle qui a le plus d'importance est la géographie botanique, prise dans son sens large, non seulement au point de vue de la distribution des formes mais encore à celui de l'étude de leurs manières d'être vis-à-vis des éléments naturels et vis-à-vis de leurs congénères.

Que savons-nous de la flore du Katanga? bien peu de choses, et c'est cependant sur elle que nous devrions nous baser pour pouvoir dire avec certitude que la comparaison du Katanga avec la Rhodésie, faite si souvent dans ces derniers temps, est fondée.

Les seules indications floristiques un peu étendues que nous possédions sur le Katanga nous ont été fournies par les récoltes du Ct Verdick (1), à qui le Ct Lemaire, lors de son passage dans cette région, avait remis le soin d'étudier la flore du pays. Outre les quelques renseignements recueillis ainsi dans les environs de Lukafu, on peut trouver des données éparses sur les plantes indigènes et sur les cultures, soit dans les travaux du colonel Descamps et du Ct Lemaire, soit dans les études que nous-mêmes avons publiées sur la flore du Katanga.

Lors de son retour du Katanga, le Ct Lemaire nous communiqua un fort joli album dans lequel il avait fait dessiner par M. Dardenne un certain nombre de plantes rencontrées pendant le voyage et dont malheureusement la Mission n'avait pas conservé d'échantillons. Malgré cette absence de matériaux, nous avons cependant pu déterminer quelques plantes dont l'énumération est restée jusqu'à ce jour inédite. Quelques noms que nous avions fournis au Ct Lemaire furent cependant publiés par lui dans son *Journal de voyage*, où l'on pourra trouver d'ailleurs de nombreux renseignements sur la végétation en général, mais beaucoup de ces notes sont accompagnées de dénominations scientifiques que nous n'avons pu vérifier et que nous devons par conséquent considérer comme encore douteuses pour la flore régionale.

Nous avons cru qu'il pouvait être intéressant de faire connaître cette contribution à la flore du Katanga. Sa publication engagera peut-être des voyageurs à nous documenter sur cette question, car, ainsi que l'a dit avec infiniment de raison M. le prof. H. Jumelle, lors de l'inauguration à Marseille de l'Exposition des caoutchoucs et guttas des Colonies françaises : « Les déterminations botaniques ont un intérêt non seulement théorique, mais pratique, trop souvent injustement méconnu ». M. Jumelle insistait également sur ce fait : « Ce n'est que lorsque les noms scientifiques ont été établis qu'on est en état de tracer la répartition et d'indiquer l'extension plus ou moins grande de chaque espèce (¹) ... »

---

(1) É. De Wildeman, *Études sur la Flore du Katanga*, 1 vol. in-4°, 1902-1903, 240 pp., XLVI pl. (ANNALES DU MUSÉE DU CONGO).

Pour ne pas allonger inutilement le texte, nous ne signalerons point, dans la liste suivante, la littérature botanique ; le lecteur s'intéressant à cette partie du sujet ou qui désire des renseignements complémentaires sur les plantes citées, principalement au point de vue de leur distribution, voudra bien se reporter à nos *Études sur la Flore du Katanga* (²), ou à celles que nous avons publiées sur la Flore du Bas et du Moyen-Congo,et dont les données ont été reprises récemment dans le *Sylloge Florae Congolanae.*

CAPPARIDACEAE

Pedicellaria pentaphylla *(L.) Schrank ;* Ch. Lemaire, *Mission scient. du Katanga, Journal de route,* p. 82.

Rivière Kitope, 1898 (Cᵗ Lemaire).

Observ. — La plante porte le nom de « Loubanga ».

Dans la région du Katanga, cette plante, utilisée parfois comme légume, a été indiquée uniquement dans la région de Picato par le colonel Descamps. Cette plante est probablement répandue dans la région, comme d'ailleurs elle doit l'être dans tout notre Congo.

Le Cᵗ Lemaire rapporte au sujet de cette plante : « Capparidacée, dont les feuilles s'emploient dans la soupe et en épinards ; elles sont très tendres et suffisamment savoureuses, tenant un peu du cresson. C'est un des meilleurs légumes qu'il nous a été donné de manger ; il devrait se trouver dans tous les jardins de nos stations. »

Nous nous permettons d'insister ici sur ces mots du Cᵗ Lemaire,

---

(¹) Cf. É. De Wildeman, *Sciences biologiques et colonisation*. Bruxelles, 1909.

(²) É. De Wildeman, *loc. cit.*

car nous estimons qu'il y a grand intérêt à cultiver les légumes indigènes, peut-être autant que d'introduire de nos légumes d'Europe ; ces derniers sont difficiles à multiplier, et à conserver sous de bonnes formes, tandis qu'avec un peu de soins on pourrait améliorer les légumes indigènes et obtenir des races qui remplaceraient peut-être avec avantage les plantes d'Europe, souvent d'ailleurs elles-mêmes d'origine étrangère.

Polanisia hirta *(Klotzsch) Pax.*

Kabeça, décembre 1898 (Cᵗ Lemaire).

Observ. — Croît en touffes de 60 cm. à 1 mètre et porte le nom de « Muchinga ».

Les indigènes s'en servent comme légume ; il est également estimé des blancs.

Dans la région du Katanga ce type a été recueilli jusqu'à ce jour uniquement par le R. P. Debeerst ; la plante est sans aucun doute répandue là, comme elle doit l'être dans d'autres régions du Congo.

DIPTEROCARPACEAE

Vatica sp.

Entre le Lualala et le Lubudi, 26 juillet 1899 (Cᵗ Lemaire).

Observ. — La présence de ce genre au plein cœur de l'Afrique est des plus intéressante, d'autant plus que l'unique espèce du genre connue jusqu'à ce jour dans l'Angola appartenait à la section *Isauxis* caractérisée par le calice fructifère à segments égaux. La plante figurée en jeunes fruits dans l'*Album de l'Expédition scientifique du Katanga* devrait plutôt se rapporter à la section *Euvatica,* les lobes sont nettement inégaux, trois grands et deux plus petits. Malheureusement M. le Cᵗ Lemaire ne nous a pas rapporté d'échantillons desséchés, mais dans la collection du Cᵗ Verdick, nous avons trouvé deux plantes, d'aspect à première vue identique, l'une étant accompagnée de fruits dont les lobes du calice accrescent s'étaient également développés, l'autre n'étant pas accompagnée de fruits. Mais un examen plus approfondi a fait voir des différences dans la disposition des fleurs, dans la grandeur des éléments floraux et surtout dans les étamines. Dans la plante récoltée sous les nᵒˢ 374, février 1900, et nᵒ 442, avril 1900, à Lukafu par le Cᵗ Verdick, et qui se rapporte tout à fait à la planche de *V. africana* Welw., var. *hypoleuca* Welw. (Sertum angolense, p. 17, pl. V, fig. 12), les étamines sont à connectif nettement apiculé, comme le veut la diagnose générique.

Mais dans l'autre plante récoltée sous les n^{os} 486, avril 1900, et 548, juillet 1900, les étamines ne sont pas munies d'apicule à leur sommet.

Le fruit dessiné par M. Dardenne se rapporte-t-il à cette espèce ?

Reste à savoir s'il faut séparer génériquement les *Vatica* africains des *Vatica* asiatiques et faire passer les premiers dans le genre *Monotes* comme l'avait fait A. de Candolle *(Prod. regn. veget.*, XVI, 2 [1868], p. 624) ? Il est difficile de se prononcer à ce sujet, nous suivrons pour le moment la Flore d'Afrique tropicale de Olmes (vol. I, p. 172) et admettrons le genre *Vatica*. Il faut cependant faire remarquer qu'il règne encore assez d'obscurité quant aux caractères spécifiques de l'espèce citée par Oliver, puisque d'après lui les anthères pourraient être « pointues ou subapiculées » (description spécifique), ou à connectif cuspidé ou simplement aigu dans le bouton (description générique).

MALVACEAE

Abutilon Cabrae *De Wildeman* et *Th. Dur.*

Environs de Lukafu, septembre 1899, n° 128 et, juillet 1900, n° 552 (C^{t} Verdick).

Observ. — Cette plante a également été récoltée à Albertville, par le Cap. Hecq, et à Pala, par le R. P. Debeerst.

Hibiscus Debeerstii *De Wildeman* et *Th. Dur.*

Kisabe, 5 octobre 1898 (C^{t} Lemaire).

Observ. — Cette plante qui paraît non utilisée — peut-être est-elle employée en guise d'épinards, comme beaucoup de ses congénères — est jusqu'à ce jour spéciale au Katanga ; elle a été trouvée d'abord par le R. P. Debeerst à Pala, puis par le Cap. Hecq à Albertville.

LEGUMINOSACEAE

Erythrina tomentosa *R. Br.*

Bords de la Rivière M'Bisa (C^{t} Lemaire).

Observ. — Cette plante est, au dire du voyageur, répandue dans tout le pays où elle forme de petits arbres couverts à certains moments de magnifiques bouquets de fleurs rouge-vif, qui sont d'un effet superbe. Malheureusement la détermination sur la vue de figures analytiques faites par un dessinateur non prévenu est sujette à caution. La plante existe, il est vrai, dans l'est, mais les *Erythrina* rencontrés par le C^{t} Lemaire, pourraient appartenir à l'une ou l'autre des espèces affines et celles-ci sont nombreuses.

Physostigma mesoponticum *Taub.* (BERICHTE DER DEUTSCH. BOT. GESELLSCH., XII, 1894, p. 81).

Village de Kazembe N'Tenda sur la Kulechi, 20 août 1899, (C^{t} Lemaire).

Observ. — Forme des buissons de 40 à 60 cm. de hauteur, couverts de fleurs alors que l'on n'y voit pas de feuilles ou que celles-ci sont à peine développées. L'Expédition l'a rencontrée à partir du Lac Nyassa, on la trouve sur le bord de toutes les routes; partout où l'on a fait des défrichements, les jolies fleurs roses de ce *Physostigma* apparaissent. Les échantillons étudiés par Taubert provenaient de la région située entre le Lac Victoria et le Tanganika et des environs de Tabora dans Unyamwesi. Cette plante existe donc dans une vaste zone de l'Afrique centrale. Elle porte dans les environs de Lukafu le nom indigène de « Kinteta » d'après le C^{t} Verdick.

Nous possédons ainsi dans la Flore du Congo les deux espèces qui composent le genre, car le *P. venenosum* Balf. ou fève de Calabar a été récolté dans le Bas-Congo par le Fr. J. Gillet, S. J. et par ses collaborateurs.

Il nous sera permis d'attirer ici l'attention des lecteurs sur quelques caractères de ces deux espèces et spécialement sur les divergences d'opinion des auteurs qui les ont étudiées.

La caractéristique des deux espèces du genre est de posséder à l'extrémité du style une sorte de crête. Si l'on compare la figure de cette crête telle qu'elle a été figurée dans Bentley et Trimen *Medic. plants*, pl. 80, fig. 2 et 3, dans l'*Histoire des plantes de Baillon*, II, p. 206, fig. 154, d'une part, et dans le travail de Taubert (*loc. cit. supra* fig. 4), d'autre part, on verra de nombreuses différences. En effet la figure des *Medicinal plants* qui nous paraît la meilleure nous montre une crête peu allongée et très haute; c'est bien ce que nous avons observé dans un échantillon récolté à Kisantu en 1901, par M. Vanden Brempt (coll. J. Gillet, n° 2001). En outre, l'extrémité du style présente une sorte d'appendice velu, qui tranche par sa couleur foncée sur le reste du style et de l'appendice. La figure publiée par Baillon montre déjà une crête plus allongée et moins haute ; quant à celle des « Berichte » de la Société allemande de botanique, elle n'a plus rien de commun avec celle de Bentley et Trimen, car elle présente une crête très allongée, peu élevée et ondulée. On peut se demander si vraiment cette dernière figure a été prise sur une plante spécifiquement la même que celle figurée par les auteurs anglais et s'il n'y a pas dans l'Afrique occidentale une troisième espèce du genre *Physostigma*. Nous serions assez tenté de le croire, car parmi les matériaux qui nous ont été envoyés du Congo (env. de Kisantu, n° 1255, en 1900) se trouvent des fragments d'une plante munis de fruits et de feuilles et qui ne cadrent pas par tous leurs caractères avec le *P. venenosum*. C'est ainsi que les feuilles sont à nervures latérales plus nombreuses, munies de poils épars sur les deux faces, surtout à l'état jeune, et acquièrent par la dessiccation une teinte noire qui ne semble pas être prise par le *P. venenosum* type. En outre le fruit que nous possédons, et dont la graine est très comparable à la « fève de Calabar », est creusé de fentes transversales nombreuses, profondes qui, communiquent un singulier aspect à ce fruit. Le R. P. Hendrickx, S. J. a récolté à N'Dembo, un échantillon fort incomplet de *Physostigma* dont le fruit, jeune il est vrai, ne présente point de ces sillons. Il reste donc là encore des points à éclaircir.

MYRTACEAE

Napoleona imperialis *P. Beauv.*

Environs de Ka-Sokela, 23 août 1899 (Cᵗ Lemaire).

Observ. — Cette jolie plante introduite depuis longtemps dans les cultures d'Europe, se présente au Katanga en touffes de 25 à 30 cm. de haut ; elle n'y avait pas encore été signalée.

TURNERACEAE

Wormskioldia lobata *Urb.*

Kabeça, janvier 1899 (Cᵗ Lemaire).

Observ. — Plante de 40 cm. de hauteur environ. Cette plante avait été signalée dans la région du Tanganika, par le colonel Descamps.

CUCURBITACEAE

Lagenaria vulgaris *Ser.*

Bassin de la Loufira, mai 1898 (C^t Lemaire).

Observ. — La plante est très répandue dans la région et le fruit, qui prend souvent des formes bizarres, y sert à fabriquer des pipes.

Momordica charantia *L.*

Var. **abbreviata** *Ser.*

Ia-Limba, 12 août 1899 (C^t Lemaire).

Observ. — N'avait pas été signalé dans la région.

Luffa cylindrica *(L.) Roem.*

Boma de Kissambale, février 1899 (C^t Lemaire).

Observ. — Le fruit non comestible porte le nom de « Matanga ». Les soldats indigènes qui ont été à la côte l'emploient, après destruction de la pulpe, comme brosse pour les usages de la toilette.

La plante est très répandue dans toute la région, mais les indigènes ne semblent y attacher aucune importance.

Cette cucurbitacée, indiscutablement commune en Afrique centrale, n'avait pas été signalée dans la région du Katanga.

Cucurbita maxima *Duch.*

Kabeça, décembre 1898 (C^t Lemaire).

Observ. — Nom indigène : « N'Katouwe ».

Le fruit est comestible, la plante souvent cultivée par l'indigène ; elle semble se présenter sous de nombreuses formes non encore étudiées, elle n'était d'ailleurs pas encore signalée dans la région.

Cucurbita Pepo *L.*

Kabeça, 1898 (C^t Lemaire).

Observ. — Semble répandu dans toute la région, où il n'avait pas été signalé.

FICOIDEACEAE

Gisekia pharnaceoides *L.*

Kabeça, janvier 1899 (C^t Lemaire).

Observ.—Cette petite plante, dont les tiges couchées s'enracinent aux nœuds, est abondante dans tout le Katanga et sur les bords du lac Moero ; nous n'avons point vu d'échantillons provenant de ces régions. Il est probable que cette petite plante est répandue dans toute l'Afrique où elle passe souvent inaperçue.

Gynura cernua *(L.) Benth.*

Var. **coerulea** *(Hoffm.) De Wild.* et *Th. Dur.*

Kisabe, 5 octobre 1898 (Ct Lemaire).

Observ. — Cette petite composée, qui doit être répandue en Afrique centrale, a également été signalée dans la région du Katanga, par le Ct Verdick.

Pleiotaxis pulcherrima *Steetz.*

Kabeça, janvier 1899 (Ct Lemaire).

Observ. — La belle figure coloriée, qui a été faite sur place par M. Dardenne, nous montre une fleur d'un beau rouge vermillon. Tous les auteurs décrivent les fleurs de cette plante comme d'un rouge pourpre. Les échantillons que nous avons reçus du Ct Verdick montrent nettement que cette couleur pourprée ne se produit qu'après coup et par la dessiccation. Cette plante paraît répandue dans la région et, comme beaucoup d'espèces du genre, localisée dans les brousses au sud de l'Équateur.

APOCYNACEAE

Diplorrhynchus sp.

Bords de la Lufira, 23 juillet 1899 en fruits et 23 septembre 1899 en fleurs (Ct Lemaire).

Observ. — Cette plante, dont nous ne possédons malheureusement que des dessins trop incomplets pour juger des caractères spécifiques, porte le nom de « Mobo-undji » ; elle paraît assez répandue dans le pays, mais se rencontre en général à l'état isolé ; dans l'enveloppe dure qui entoure quatre graines ailées, il y a une grande quantité de latex qui donne une substance ayant quelque analogie avec le caoutchouc, mais n'en possédant pas toutes les propriétés. Ce serait donc chose des plus utiles de rechercher cette plante pour que l'étude scientifique et économique pût en être faite avec soin, car la résine plus ou moins caoutchoutifère obtenue par la coagulation du latex pourrait peut-être trouver son emploi dans l'industrie.

ASCLEPIADACEAE

Margaretta Corneti *A. Dewèvre.*

Kakoma, 21 septembre 1898 (C^t Lemaire).

Observ. — Cette espèce décrite par A. Dewèvre a été recueillie également au Katanga par le C^t Verdick ; le type avait été trouvé par M. Cornet.

BORAGINACEAE

Heliotropium ovalifolium *Forsk.*

Kabeça, décembre 1898 (C^t Lemaire).

Observ. — Forme des touffes de 40 cm. environ de haut. La plante a été jusqu'à ce jour récoltée uniquement, dans notre Colonie, au Katanga, où le C^t Verdick la signala à Lukafu.

BIGNONIACEAE

Kigelia aethiopica *(Lam.) Decne.* ; Ch. Lemaire, *Mission scient. du Katanga, Journal de route,* p. 77.

Environs de M'pueto, 24 septembre 1898 (C^t Lemaire).

Observ. — Les fruits si curieux de cet arbre avaient frappé les membres de la Mission scientifique du Katanga. On confond souvent dans le pays ce *Kigelia* avec le Baobab, mais un examen même superficiel fait vite reconnaître que la plante dont nous avons vu les dessins et les échantillons desséchés n'a rien de commun avec le Baobab.

Ce *Kigelia* existe dans toute la région du Katanga, généralement en pieds isolés ; on le rencontre assez souvent le long des rivières.

Il porte, dans les environs de Lukafu, le nom indigène « Kitwungele ».

PEDALIACEAE

Sesamum macranthum *Oliv.*

Kabeça, janvier 1899 (C^t Lemaire).

Observ. — Croît en touffes de 1,50 à 2 mètres, dans la brousse, à proximité des villages ou d'anciens villages, mais ne semble cependant pas être cultivé par les indigènes.

Il a été trouvé dans diverses localités de la région, mais n'a jamais été signalé comme très répandu.

VERBENACEAE

Lantana salviifolia *Jacq.*

Kabeça, décembre 1898 (C^t^ Lemaire).

Observ. — La plante atteint 1 mètre de hauteur. Elle paraît répandue au Katanga, comme elle doit l'être d'ailleurs dans d'autres régions congolaises.

URTICACEAE

Dorstenia Debeerstii *De Wild.* et *Th. Dur.* ; Ch. Lemaire, *Mission scient. du Katanga, Journal de route,* p. 86, pl. face, p. 50.

Riv. Kiperibié, entre le Tanganika et Moliro à 1500 mètres d'altitude, 1^er^ octobre 1898 (C^t^ Lemaire).

Observ. — Cette petite plante que M. le C^t^ Lemaire avait dénommée le « Muguet du Katanga », ne paraît pas être employée par l'indigène ; elle est cependant très répandue. Lorsque nous en avons donné la description, nous ne connaissions pas la partie souterraine, c'est une sorte de rhizome subglobuleux d'où partent, vers la base des racines, du sommet une petite tige dressée qui possède quelques fleurs et sur laquelle les feuilles se développent plus tard. D'après les observations du C^t^ Lemaire, les fleurs entourées primitivement de 3 bractées, rayonnant autour du disque, posséderaient ultérieurement et sur le même pied de très nombreuses bractées courtes, formant une couronne autour du disque central. Cette particularité intéressante mériterait d'être étudiée à nouveau, car les inflorescences d'une même espèce pourraient appartenir à deux subdivisions d'un même genre.

C'est sur une plante du Haut-Marungu (Tanganika), recueillie par le R. P. Debeerst, que nous avons décrit cette espèce.

MUSACEAE

Musa *sp.*

Kisabe, 4 octobre 1898 (C^t^ Lemaire).

Observ. — Ce *Musa,* dont l'Expédition du Katanga n'a rapporté qu'un croquis incomplet, est des plus intéressants. Il porte au village de Kisabe le nom indigène « Capoundou » et est sauvage dans la région. Il n'atteint que 1,50 à 2 mètres de haut et porte l'inflorescence au sommet de sa tige. A la base de cette inflorescence il y a des feuilles réduites, bractéiformes, plus longues que l'inflorescence jeune. Nous n'avons point vu de fruits. Il serait très désirable d'obtenir de cette plante des matériaux d'étude permettant la description.

Cette étude est d'ailleurs de grand intérêt, car on sait que les bananiers sont actuellement le point de mire de beaucoup d'entreprises commerciales ; tout dans ces plantes, ou du moins dans la plupart d'entre elles et surtout dans celles à fruits comestibles, est utile.

Comme nous l'avons déjà dit fréquemment, une enquête détaillée sur les espèces, variétés et formes de bananiers congolais, sur leurs divers usages sur place, serait du plus haut intérêt.

TACCACEAE

Tacca pinnatifida *L. f.*

Kabeça, 1898 (C^t Lemaire).

Observ. — Nom indigène : « Kameme ».

Plante indigène assez importante, dont les noirs semblent ignorer les usages ; elle n'a pas été signalée au Katanga.

AMARYLLIDACEAE

Buphane disticha *(C. f.) Herb.*

Haemanthus Lemairei De Wild. nom. nud. Lemaire, *Miss. scient., Katanga, Journal de route,* pl. face, p. 80.

Vallée de la Tchoma, 27 septembre 1898 (C^t Lemaire).

Observ. — Paraît répandu dans la partie sud de notre Congo et étend sa dispersion vers les possessions portugaises.

LILIACEAE

Gloriosa virescens *Lindl.*

Kabeça, janvier 1899 (C^t Lemaire).

Observ. — La plante atteint environ 60 cm. de haut dans cette région, où elle est répandue.

DEUX PARTICULARITÉS
DU
GLACIAIRE ANCIEN DE LA COMBE DES PRÉS (JURA)

PAR

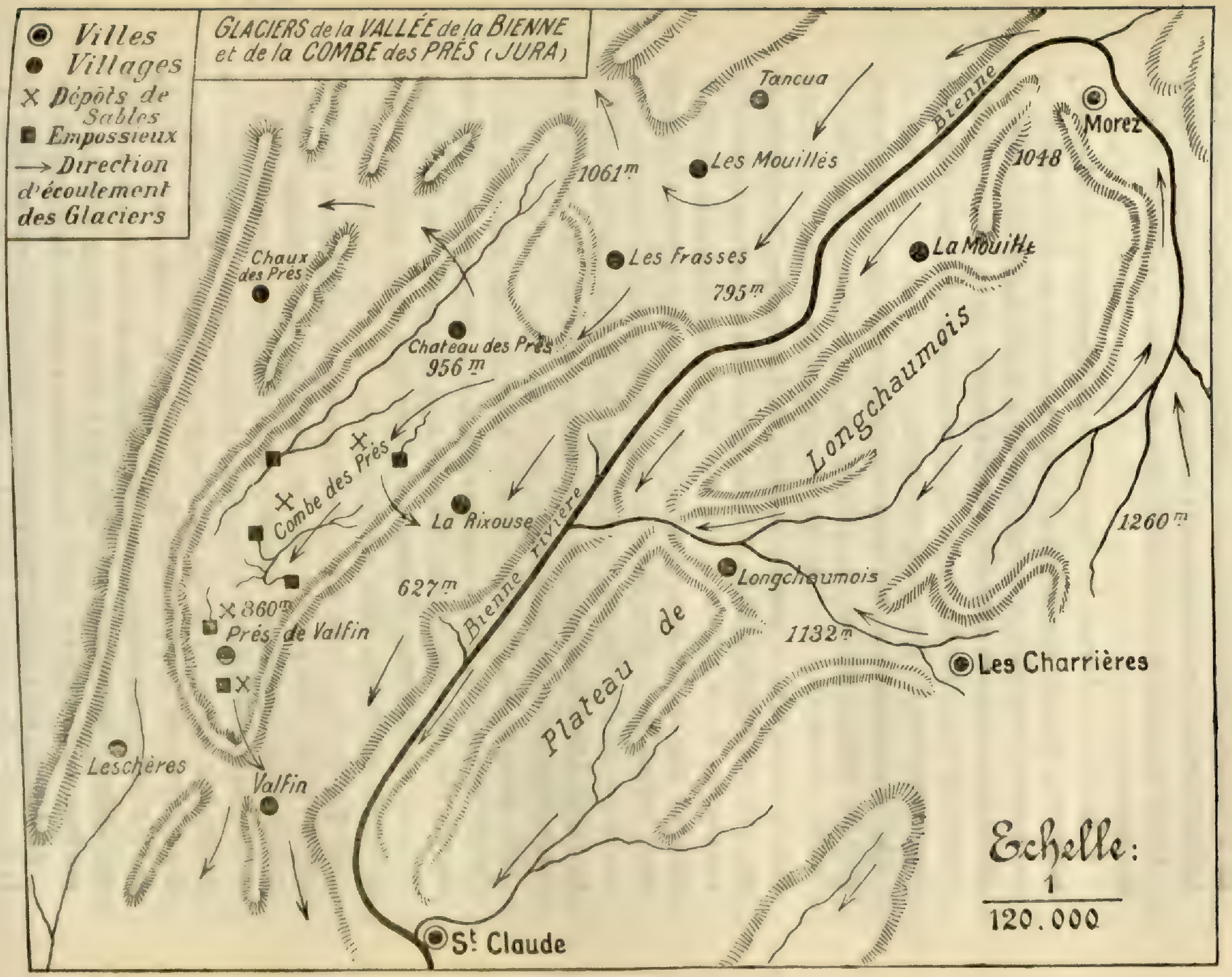
M. BOURGEAT

La Combe des Prés, dans le Jura méridional, est un des types les plus parfaits de ces vallées en forme de berceau qui sont limitées partout par des arêtes plus élevées, et où les eaux ne trouvent d'autre voie d'écoulement que les entonnoirs souterrains, que l'on désigne du nom d'*empossieux* dans le pays. Elle est située à 8 kilomètres au nord-ouest de St-Claude, et présente une longueur d'un peu moins de 10 kilomètres sur une largeur de 2 1/2 kilom. au plus. Son altitude est comprise entre 1060 au nord-ouest et près de 860 mètres au sud-ouest, c'est-à-dire, du côté de St-Claude. C'est un anticlinal ouvert ; une véritable boutonnière, au fond de laquelle on voit un peu de bajocien et de bathonien, beaucoup de marnes oxfordiennes en superposition sur ces derniers terrains, et dont les épaulements sont constitués par des calcaires du jurassique supérieur.

A l'époque de la grande extension des glaciers, elle fut, comme je l'ai montré en 1883 (¹), envahie et remplie par une branche du grand glacier de la Bienne qui descendait par Morez, Tancua et les Mouillés et qui déborda vers l'ouest par le col des Frasses. Ce glacier a laissé de nombreux dépôts morainiques dans la Combe et sur les cols qui en entaillent les arêtes du côté de la Bienne. On peut même constater que de ce glacier, né de celui de la Bienne près des Frasses, redescendaient plus au sud-est vers le glacier générateur, des glaciers particulaires nés par suite du trop plein

---

(¹) Annales de la Société scientifique.



GLACIERS de la VALLÉE de la BIENNE et de la COMBE des PRÉS (JURA)

◉ Villes
● Villages
✕ Dépôts de Sables
■ Empossieux
⟶ Direction d'écoulement des Glaciers
Tancua
Les Mouillés
1061m
Les Frasses
795m
Bienne
Morez
1048
La Mouille
Longchaumois
Chaux des Prés
Chateau des Prés
956m
Combe des Prés
La Rixouse
Bienne rivière
627m
1260m
Longchaumois
1132m
Les Charrières
360m
Prés de Valfin
Plateau de
Leschères
Valfin
St Claude
Echelle: 1/120.000

de la Combe. Ceux-ci ont laissé de belles moraines latérales et de belles stries sur les calcaires au voisinage de la Rixouse et de Valfin.

Les deux particularités que je me propose de signaler ici sont les suivantes.

1° Lorsqu'on observe les dépôts morainiques de la Combe, on y remarque d'abord des blocs de Néocomien et de Portlandien, ce qui accuse que le glacier venait bien de la haute vallée de la Bienne, où ces deux terrains sont largement étendus. On y trouve ensuite et surtout une grande masse de marnes oxfordiennes triturées, dans lesquelles les blocs sont engagés.

Qu'on les observe au voisinage de Château des Prés, c'est-à-dire, près du point d'arrivée du glacier, ou au voisinage des Prés de Valfin, c'est-à-dire, à l'extrémité opposée de la Combe, on leur trouve à peu près la *même* composition. Les proportions relatives de calcaires exotiques et de marnes oxfordiennes restent à peu près constantes. Il en est de *même* des dépôts morainiques qui descendent vers la Rixouse et vers Valfin, et qui sont dus, comme nous venons de le dire, au trop plein de la vallée. Par contre, en amont du col des Frasses, surtout vers les Mouilles et Tancua, les moraines latérales du glacier de la Bienne n'offrent presque pas de traces de marnes oxfordiennes.

Ces marnes du glaciaire dans la Combe viennent donc de la Combe elle-même. Mais, comme elles sont à peu près aussi abondantes près de l'arrivée du glacier, vers Château des Prés, que vers sa terminaison, il faut admettre que c'est près du lieu d'arrivée surtout qu'elles ont été prises.

Le glacier de la Combe a donc *creusé* son lit. C'est là un premier fait à retenir qui prouve que les glaciers, dans certains cas du moins, sont capables de produire un véritable creusement.

Lorsqu'on recherche la zone où ce creusement a eu lieu, on la trouve sans peine à l'est de Château des Prés du côté des Frasses. Il y a là en effet des pâturages fort pauvres où les bancs inférieurs de l'Oxfordien se montrent à nu, dépouillés de marnes plus meubles qui ailleurs les recouvrent. Rien qu'à les voir, on a l'idée que quelque large rabot a passé par dessus et produit la dénudation.

Seulement les couches en question s'inclinent vers la vallée de la Bienne ; elles sont en contre-bas par rapport à l'Oxfordien de

Château des Prés. Le glacier les remontait donc en contrepente pour arriver à la Combe.

C'est là un creusement effectué dans des conditions toutes contraires à celles que suppose un éminent savant, M. Haug, dans son traité de Géologie.

Ce géologue écrit en effet : « Le surcreusement ne se produit pas en un point quelconque du profil en long d'une vallée précédement occupée par un glacier. Les concavités se rencontrent en général immédiatement en aval d'une forte rupture de pente, par conséquent en des points où la vitesse du glacier atteignait son maximum, en même temps que son épaisseur subissait une augmentation appréciable. La réunion de plusieurs glaciers en un seul a également eu pour effet d'augmenter le pouvoir d'érosion de la masse totale ; car, la largeur du lit se trouvant réduite, l'épaisseur et la vitesse subissent en aval du confluent une augmentation considérable (¹). »

Ici, c'est quand le glacier *s'épanche,* qu'il *diminue d'épaisseur* et que la contrepente lui fait subir une *diminution de vitesse,* qu'il devient un agent de surcreusement du fond.

2° La seconde particularité que présentent les dépôts glaciaires de la Combe qui nous occupent, c'est que dans leur intervalle, surtout dans la partie la plus basse au voisinage des Prés de Valfin, on trouve des argiles fines et des sables presque purs. Les argiles fines sont à peine stratifiées. Elles occupent des fonds de cuvette entre les dépôts morainiques et s'étendent presque horizontalement sur les assises infléchies de l'Oxfordien. Elles sont assez pauvres en calcaire, et l'on a pu les exploiter pour la fabrication de tuiles.

Les sables présentent le plus souvent une stratification en lentille qui est surtout visible dans un gisement situé entre les Prés de la Rixouse et les Prés de Valfin. Ils se fondent peu à peu dans les moraines en prenant un grain plus fort et en se salissant d'argile. Ils ne paraissent avoir aucune relation avec les petits cours d'eau de la Combe qui vont actuellement se perdre dans les empossieux.

Quelle en est l'origine et quelle est celle des argiles fines ?

(¹) Tome 1er, pages 459 et 460.

Il me semble qu'elle est due pour les uns et pour les autres à la même cause : l'existence de petits lacs au-dessus de la masse glaciaire.

J'ai dit en commençant que la Combe était une vallée en forme de berceau, sans autre écoulement pour ses eaux que les entonnoirs ou empossieux. Or, à l'époque glaciaire, ces empossieux devaient être fermés par l'eau congelée à leur orifice. Le fait se reproduit encore de nos jours par les hivers froids, si bien qu'au moment de la fonte des neiges, il se forme sur ces orifices de véritables lacs jusqu'au moment où le bouchon de glace est fondu. A l'époque glaciaire l'eau de fusion superficielle, ne trouvant pas d'issue, était contrainte d'imbiber la glace et de s'étaler dans les dépressions de la surface. Vers elle convergeaient tous les petits cours d'eau supraglaciaires, qui lavaient les moraines et entraînaient dans les cuvettes lacustres l'argile fine provenant du lavage. Les sables plus lourds que l'argile ne pouvaient aller aussi loin et restaient sur les bords, en se reliant aux moraines par des blocs de plus en plus grossiers et de moins en moins stratifiés. Ils seraient donc des dépôts fluviaux-glaciaires superficiels et se trouveraient localisés aux endroits du glacier où le ruissellement était plus intense. C'est pour cela que, si l'on observe un de ces fonds de cuvette couvert d'argile fine, ce n'est pas sur tous ses bords, mais en quelques points seulement que l'on découvre les sables.

Je me suis limité à ces deux particularités ; mais elles ne sont pas les seules. J'aurai probablement plus tard à en signaler d'autres. Si j'ai choisi celles-ci, c'est pour montrer qu'il n'en est pas toujours des glaciers des vallées fermées comme des glaciers des vallées à pente continue, au-dessous desquelles l'eau de fusion trouve un écoulement facile. Il ne suffit donc pas, pour résoudre la question si complexe du glaciaire, de l'étudier actuellement dans les vallées des Alpes ; il est nécessaire encore de noter des indices laissés par les glaciers anciens et de chercher dans d'autres régions que les Alpes, comme au Groenland par exemple, l'explication de ces indices.

NOTICES

DE

MANUSCRITS DE LA BIBLIOTHÈQUE ROYALE DE BELGIQUE

SE RAPPORTANT AUX SCIENCES NATURELLES

PAR

J. VAN DEN GHEYN, S. J.

I

Note sur un manuscrit entomologique (xvi^e^ siècle)

Il y aura bientôt cinq ans (¹), j'ai présenté à la troisième section de la Société scientifique de Bruxelles une courte notice sur un ancien manuscrit de sciences naturelles.

Cette note visait à faire voir que la botanique, au xv^e^ siècle, avait encore de grands progrès à réaliser avant d'arriver à l'exacte représentation de la nature.

C'est encore une œuvre du même genre que je me propose de faire connaître.

Elle n'a point complètement passé inaperçue jusqu'à ce jour, et, comme nous le dirons, la bibliographie allemande en a gardé quelque trace. Mais comme le volume appartient aujourd'hui à notre Bibliothèque royale (section des manuscrits, n° II. 4980), il ne sera pas inutile d'attirer l'attention sur cet album de papillons.

Ce volume, de format oblong ($0^m,14 \times 0^m,168$), renferme 500 figures coloriées sur 50 feuillets de parchemin glacé ; il date du xvi^e^ siècle.

(¹) Annales de la Société scientifique de Bruxelles, t. XXIX (1905), session de mai, pp. 229-231.

Œuvre hautement artistique et témoignant d'une habileté de pinceau peu commune, ces miniatures sont à signaler aux naturalistes pour leur remarquable exactitude d'exécution et leur coloris d'un naturel pris sur le vif. Autant les figures du manuscrit mentionné jadis sont purement schématiques, autant celles-ci sont précises. Nos procédés ordinaires de reproduction des objets n'ont rien produit qui leur est supérieur.

A certain moment, nous avons pensé que l'intérêt pour notre pays du nouveau manuscrit n° II. 4980 de la Bibliothèque royale de Belgique se doublait encore d'un autre élément.

En effet, le volume était donné pour l'œuvre d'un Anversois, de Georges Hoefnaegel (1545-1606). Un extrait imprimé de catalogue, accolé f. I, dit que cet album est un des quatre volumes de miniatures, consacrées aux quatre règnes de la nature, que le maître exécuta pour l'empereur Rodolphe, qui lui paya 1000 couronnes d'or par volume (1).

Mais en étudiant de plus près le manuscrit, je n'ai pas tardé à concevoir les doutes les plus sérieux sur son identité avec l'œuvre de Georges Hoefnagel.

On possède, en effet, de cette dernière une description fort détaillée que Wilhelm Engelmann en fit, lorsqu'en 1861 les quatre volumes du peintre anversois, jusque-là possession de Charles-Auguste von Brentano, furent offerts en vente par R. Weigel à Leipzig (¹). Cette description complète se trouve dans la *Bibliotheca entomologica* du Dʳ Hermann Hagen (²).

---

(1) Sur Georges Hoefnagel, voir Sandrart, *Teutsche Akademie*, Nürnberg, 1675, p. 300 ; Nagler, *Neues allgemeines Künstler-Lexikon*, t. VI, Munich, 1838, p. 214 ; Éd. Fétis, dans BULLETIN DE L'ACADÉMIE ROYALE DE BRUXELLES, t. XXI (1854), part. 2, pp. 978-1012 ; la traduction allemande du *Livre des peintres de Carl van Mander*, par Hanss Floerke, Munich, 1906 ; *Kunstgeschichtliche Studien der Galeriestudien*, IV. Folge, herausgegeben von Th. von Frimmel, pp. 72-81, 423-24 et Dr Alfred von Wurzbach, *Niederländische Künstler-Lexikon*, t. II, pp. 694-95. La spécialité de peintre d'histoire naturelle ne sortit pas de la famille. Jacques Hoefnagel, fils de Georges, est connu pour avoir publié des estampes d'histoire naturelle. On cite surtout deux recueils : *Archetypa studiaque Patris Georgii Hoefnagelii Iacobus F. genio duce ab ipso sculpta*, Francofurti, 1592, quarante-huit tableaux en quatre parties et *Diversae insectarum volatilium icones ad vivum depictae per celeberrimum pictorem D. I. Hoefnagel*, Amsterdam, 1630. Ce dernier recueil forme seize planches.

Le prétendu manuscrit d'Hoefnagel a été aussi comparé avec les estampes que son fils Jacques assure avoir été faites d'après les esquisses de son père. Or cette étude comparative est plutôt défavorable à l'opinion qui attribue la confection de notre volume à Georges Hoefnagel.

Mais nous pensons que le volume récemment acquis par la Bibliothèque royale de Belgique est celui que Nagler en 1838 (³) signale aux mains d'un particulier. Depuis cette époque ballotté chez divers possesseurs privés (⁴), le volume aboutit enfin, pour la plus grande utilité de la science, à un dépôt public.

S'il ne fait pas, à notre avis, partie des quatre volumes exécutés par Georges Hoefnagel pour l'empereur Rodolphe, ce n'en est pas moins une œuvre remarquable, qui pourrait aussi avoir été exécutée par le peintre anversois. Par la perfection du dessin et du coloris, par la rigoureuse exactitude de la reproduction, artistes et naturalistes s'y intéresseront également.

II

Les portulans de la Bibliothèque royale de Belgique

Les anciens portulans manuscrits sont, pour l'histoire des progrès de la géographie, à juste titre recherchés et les bibliothèques qui en possèdent, les rangent parmi leurs *cimelia* (⁵). D'autant plus que ces documents sont devenus rares et qu'on ne les trouve dans les différents dépôts publics qu'en nombre restreint.

(¹) *R. Weigel's Kunst Auctions-Catalog vom 28 October*, p. 272, nº 2220.

(²) T. I, p. 370.

(³) *Op. cit.*

(⁴) La notice imprimée dont nous avons parlé et qui se trouve dans le volume, dit qu'il provient de la célèbre collection Klinkosch à Vienne. Le volume lui-même ne fournit d'autre indication de provenance que les initiales non déchiffrées *C. W*, surmontées d'une couronne.

(⁵) C'était, naguère encore, le titre que M. J. Crivellari donnait à son travail sur les portulans de la Bibliothèque communale de Vérone, *Alcuni cimeli della cartografia medievale esistente a Verona*, Firenze, 1903.

Jusqu'à ce jour ceux que renferme la Bibliothèque royale de Belgique, n'ont pas attiré l'attention ; aussi bien l'acquisition qu'on en fit est récente.

Ces portulans sont au nombre de trois ; l'un est signé par Bartolomeo Olivès, l'autre par Freducci, le troisième par Bartolomeo Laso. Un mot sur chacun d'eux.

1° PORTULAN DE BARTOLOMEO OLIVÈS

Le volume coté n° II. 4622, à la section des manuscrits de la Bibliothèque royale de Belgique, contient quatre feuillets de portulans ou cartes nautiques. Écrites sur parchemin, ces cartes ont pour dimensions $0^{m},36 \times 0^{m},51$.

La première feuille est signée : *Bartolome Holives Mallorquin en el castillo del Salvador en Messina, anno 1572.*

Ce nom d'*Holives*, plus généralement orthographié *Olives,* est bien connu dans l'histoire de la cartographie au XVIᵉ siècle. Je me contente de renvoyer au grand ouvrage de Nordenskiöld, *Periplus* (traduction anglaise de F.-A. Bathes, Stockholm, 1897, p. 165) (1). Le célèbre explorateur y cite trois membres de la famille Olivès : Bartolomeo, dont il connaît neuf cartes, de 1532 à 1585 ; Jaume, avec cinq cartes de 1557 à 1565 (2), et Domingo, dont il publie un portulan, daté de 1568 (*Periplus,* pl. XXIX).

A propos de la mention *en el castillo del Salvador en Messina* qui se trouve sur le portulan de la Bibliothèque royale de Belgique et que l'on relève sur toutes les cartes de Bartolomeo Olivès, Nordenskiöld croit qu'il a existé au château du Sauveur à Messine, pendant de longues années, une fabrique de portulans (3).

---

(1) Cf. *Studi Bibliografici-Biografici* d'Uzielli, Roma, 1875, pp. 368-369.

(2) J. Crivellari, dans le travail que nous avons cité, signale à la Bibliothèque communale de Vérone, un portulan de Jaume Olivès. Daté de 1559, ce document a pu être en 1903 mentionné par M. Albert Tiberghien (REVUE DES BIBLIOTHÈQUES ET DES ARCHIVES DE BELGIQUE, t. I, p. 259) comme l'œuvre la plus ancienne du cartographe catalan. Mais, cette année même, dans son récent catalogue à prix marqués (Amsterdam, 1910), M. Frederik Müller offre, p. 25, n° 134, pour 400 florins, un portulan, daté de 1550, écrit et enluminé par Jaume Olivès. Du même auteur, M. Hiersemann, dans son *Catalogue* n° 339, n° 51, met en vente pour 7500 marcs, un *Atlas marinus* de 1563.

(3) *Periplus,* p. 65.

Sur le premier feuillet de la carte nautique que la Bibliothèque royale de Belgique possède de Bartolomeo Olivès, sont représentées la côte orientale de l'Espagne, celles de l'Afrique du Nord, de l'Italie sur la Méditerranée et sur l'Adriatique, et enfin celles d'Illyrie.

La seconde carte contient les régions de la Méditerranée à partir de la Sicile, c'est-à-dire la suite de l'Afrique septentrionale, l'Égypte, puis, en remontant vers le nord-est, la Syrie, l'Asie Mineure, l'Archipel, la Grèce et les ports de la Mer Noire.

Sur la troisième carte se voient tous les ports du 62° au 31° de latitude, l'Irlande, l'Écosse, l'Angleterre, la France et les côtes occidentales de la Péninsule Ibérique. A remarquer que l'Écosse et l'Angleterre sont encore séparées par un détroit.

La quatrième carte donne le portulan de la côte du Portugal et de l'Afrique du 45° au 15° de latitude.

Sur chacun des feuillets est dessinée trois fois la rose des vents, avec les initiales G. M. P. L. O. S.

La carte de Domingo Olivès (1568) publiée par Nordenskiöld (¹) fournit l'explication de ces initiales. Elles sont les premières lettres des noms des vents qui suivent : *Greco, Mezogiono, Ponente, Levante, Sillocho,* mais la lettre *O* n'est pas expliquée et *M* peut être aussi l'initiale de *Maistralle* et *L* celle également de *Lebecho,* ces noms différents étant aussi en usage.

Les dimensions de nos cartes sont $0^{m},36 \times 0^{m},51$. On sait que les degrés de latitude chez Bartolomeo Olivès s'évaluent à 74,6 kilomètres (²).

A constater que l'Angleterre et l'Écosse sont encore fort déformées ; on n'a guère tenu compte de la projection. A la hauteur de la Clyde et de la Forth, l'Écosse et l'Angleterre sont figurées comme séparées par un chenal, qui s'étend sur toute leur longueur (³). C'est le cas ordinaire de tous les portulans du XVI^e siècle.

2° PORTULAN DE FREDUCCI

Une autre carte nautique de la Bibliothèque royale de Belgique porte la signature *Jhesus (IHS) Maria Uirgo. Angelo De Conte Freducci d'Ancona nel anno 1547.*

(¹) *Periplus,* pl. XIX.
(²) *Ibid.,* p. 55.
(³) *Ibid.,* p. 94.

Angelo Freducci n'est pas non plus un inconnu dans l'histoire de la cartographie. De lui personnellement Nordenskiöld cite deux portulans datés de 1566, à Mantoue (Bibliothèque nationale) et à Rome (Bibliothèque Casanatensis). Mais, comme les Olivès, les Freducci ont constitué toute une famille de cartographes et l'on signale de leurs divers membres seize cartes connues (1). Nous sommes convaincu que ce chiffre peut être augmenté.

Sur parchemin, le portulan de Freducci conservé à la Bibliothèque royale de Belgique et coté à la section des manuscrits, n° II. 292, a $0^m,52 \times 0^m,74$. Tous les ports de la mer du Nord, avec l'Angleterre et l'Irlande entièrement figurées, l'Océan Atlantique, avec les côtes d'Afrique jusqu'aux Canaries, celles de la Méditerranée, de l'Adriatique et de la mer Noire y sont indiqués.

Le dessin et l'écriture sont assez grossiers, et ce portulan n'a pas le fini d'exécution que présentent les précédents. A signaler pourtant un certain nombre de dessins, qui, pour schématiques qu'ils sont, ne laissent pas d'être curieux ; ce sont des vues de Venise, de Babylone et du mont Sinaï, ayant au sommet le couvent de Sainte-Catherine. Les localités principales sont tracées en rouge, les îles coloriées et les possessions vénitiennes marquées en or.

Il n'y a guère d'autres particularités à relever sur le portulan de Freducci.

3° PORTULAN DE BARTOLOMEO LASO

Le troisième portulan de la Bibliothèque, coté n° II. 2706, est aussi sur parchemin. Il a $0^m,535$ de hauteur et $0^m,75$ de largeur.

Non daté, il est, croyons-nous permis d'affirmer d'après certains indices, plus ancien que les précédents et porte la signature *Bartolomeo Laso*. Nous n'avons, nulle part, relevé trace de ce nom dans les annales de la cartographie.

Le portulan est fort développé : au nord, il s'étend jusqu'à l'extrémité de la Norvège où il mentionne le *Mare congelatum*. Au nord-ouest, nous relevons l'*Islanda*, le *Frislanda*, le *Grunnlanda*, la *Tera de Laurador*, c'est-à-dire le Labrador. Au sud, les côtes vont en Afrique jusqu'au 19° de latitude. A l'est, le *Pontus-Euxinus* marque la délimitation extrême.

---

(1) Nordenskiöld, *op. cit.*, p. 64.

Dans quatre cartouches, à encadrement bleu et rouge, est marquée l'échelle, tantôt *Leguas despanâ* (var. *Despanha*) et *Milhas de levante.* La carte est ornée d'une grande rose des vents et de trois petites.

Seize armoiries coloriées indiquent les divers pays. Des montagnes et de verts palmiers désignés par l'inscription *Clari montes Africe* sillonnent, en Afrique, tout l'espace compris entre le Cap Bojador et le Nil. Deux dessins seulement, celui de la forteresse portugaise près du golfe de Santiago et Jérusalem, avec le Calvaire et les trois croix au sommet.

C'est avec le portulan de Georges Calapade (1552), bien que celui-ci soit beaucoup plus artistique (1), que le travail de Bartolomeo Laso offre le plus de ressemblance. Là aussi se voient les armoiries des pays et des banderoles absolument similaires.

Une remarque générale sur les portulans de la Bibliothèque royale de Belgique. Tous appartiennent au type du portulan catalan normal. C'est, du reste, le cas de presque toutes les cartes nautiques du XIV^{e} au XVII^{e} siècle. On en a la preuve dans le fait que l'échelle des distances n'est pas donnée en latin ou en italien, mais que c'est la *legua* ou lieue d'Espagne qui est en usage. Au surplus, la langue dont il est fait emploi pour noter les noms des ports est un dialecte de la côte d'Espagne qui servait aux navigateurs en général.

D'ailleurs, maintenant que les portulans de la Bibliothèque royale de Belgique sont signalés à l'attention des érudits, car jusqu'à ce jour, ils étaient peu connus, nous sommes convaincu que chacun, à son point de vue, y relèvera d'autres détails intéressants.

---

(1) Nordenskiöld, *Periplus*, pl. XXV et XXVI.

PUBLICATIONS DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE

ANNALES DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE DE BRUXELLES, t. I à t. XXXIII, 1875 à 1909. Chaque vol. in-8° de 400 à 600 pages fr. **20 00**

TABLE ANALYTIQUE des vingt-cinq premiers volumes des ANNALES DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE (1875-1901). Un vol. in-8° de 250 pages (1904), en vente au prix de . . . . fr. **3 00**

REVUE DES QUESTIONS SCIENTIFIQUES. Première série, 1877 à 1891. Trente volumes. Seconde série, 1892 à 1901. Vingt volumes. Troisième série, commencée en 1902. Les deux volumes annuels, de 700 pages in-8° chacun . . . . fr. **20 00**

TABLE ANALYTIQUE des cinquante premiers volumes de la REVUE DES QUESTIONS SCIENTIFIQUES (1877-1901). Un vol. in-8° de XII-168 pages, petit texte (1904), en vente au prix de 5 fr. ; pour les abonnés . . fr. **2 00**

Ph. Gilbert. Mémoire sur l'application de la méthode de Lagrange à divers problèmes de mouvement relatif. Deuxième édition (1889). Un vol. in-8° de 150 pages . . . . fr. **7 50**

DISCUSSION SUR LE FŒTICIDE MÉDICAL. Brochure in-8° de 38 pages (1904) . . . . fr. **1 00**

LA CRISE DU LIBRE-ÉCHANGE EN ANGLETERRE. Rapports de MM. G. Blondel, Ch. Dejace, A. Viallate, Emm. de Meester, P. de Laveleye, Ed. Vandersmissen. Brochure in-8° de 121 pages (1905) . . fr. **2 00**

LES PORTS ET LEUR FONCTION ÉCONOMIQUE : **T. I.** Introduction, Éd. Van der Smissen. I. La Fonction économique des Ports dans l'Antiquité grecque, H. Francotte. II. Bruges au Moyen âge, G. Eeckhout. III. Barry, H. Laporte. IV. Beira, Ch. Morisseaux. V. Liverpool, P. de Rousiers. VI. Anvers, E. Dubois et M. Theunissen. VII. Les Ports et la vie économique en France et en Allemagne, G. Blondel. Un vol. in-8° de 183 pages, figures et plans. (Épuisé.) **T. II.** VIII. Londres, G. Eeckhout. IX. Délos, A. Roersch. X. Rotterdam, J. Charles. XI. Gènes au Moyen âge, J. Hanquet. XII. Marseille, G. Blondel. Un vol. in-8° de 123 pages, figures et plans. Prix : 3 francs. **T. III.** XIII. Le Port moderne de Gènes, M. Theunissen. XIV. Ostende. L.-Th. Leger. XV. Jaffa, P. Gendebien. XVI. Lisbonne, Ch. Morisseaux. XVII. Le Havre, G. Blondel. XVIII. Hambourg, P. de Rousiers et J. Charles. XIX. Rio-de-Janeiro, F. Georlette. XX. Han-Kow. A. Vanderstichel. Prix : 3 francs. **T. IV.** XXI. Barcelone et Bilbao, J. Charles. XXII. Buenos-Aires, M. Theunissen. XXIII. Brême, J. Charles. XXIV. New-York, Paul Hagemans. XXV. Le Port de Pouzzoles dans l'Antiquité, d'après un livre récent, Alphonse Roersch. XXVI. Shanghaï, A. A. Fauvel. XXVII. Zeebrugge, J. Nyssens-Hart. Un vol. in-8° de 184 pages, figures et plans. Prix : 3 francs. **T. V**, sous presse.

SUR QUELQUES POINTS DE MORALE SEXUELLE DANS SES RAPPORTS AVEC LA MÉDECINE. Rapport de M. le Dr X. Francotte. Brochure in-8 de 48 pages (1907). . . . . fr. **0 75**

DE LA DÉPOPULATION PAR L'INFÉCONDITÉ VOULUE. Rapport de M. le Dr Henri Desplats, et discussion. Brochure in-8° de 29 pages (Épuisé).

REVUE DES QUESTIONS SCIENTIFIQUES

PUBLIÉE PAR

LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE DE BRUXELLES

TROISIÈME SÉRIE

Cette revue de haute vulgarisation, fondée en 1877 par la Société scientifique de Bruxelles, se compose actuellement de deux séries : la **première série** comprend 30 volumes (1877-1891) ; la **deuxième**, 20 volumes (1892-1901). La livraison de janvier 1902 a inauguré la **troisième série**.

La revue paraît en livraisons trimestrielles de 352 pages, à la fin de janvier, d'avril, de juillet et d'octobre. Chaque livraison renferme trois parties principales.

La **première partie** se compose d'**Articles originaux**, où sont traités les sujets les plus variés se rapportant à l'ensemble des sciences mathématiques, physiques, naturelles, sociales, etc.

La **deuxième partie** consiste en une **Bibliographie scientifique**, où l'on trouve un compte rendu détaillé et l'analyse critique des principaux ouvrages scientifiques récemment parus.

La **troisième partie** consiste en une **Revue des Revues et des Publications périodiques**, où des écrivains spéciaux résument ce qui paraît de plus intéressant dans les archives scientifiques et littéraires de notre temps.

Chaque livraison contient ordinairement aussi un ou plusieurs articles de **Variétés**.

CONDITIONS D'ABONNEMENT

Le prix d'abonnement à la Revue des Questions scientifiques est de **20 francs** par an. Les membres de la Société scientifique de Bruxelles ont droit à une réduction de **25** % ; le prix de leur abonnement est donc de **15 francs** par an.

Table analytique des cinquante premiers volumes de la Revue. Un vol. du format de la Revue de XII-168 pages. Prix : 5 francs ; pour les abonnés, 2 francs.

Des volumes isolés seront fournis aux nouveaux abonnés à des conditions très avantageuses.

S'adresser pour tout ce qui concerne la **Rédaction** *et l'***Administration** *au secrétariat de la Société scientifique, 11, rue des Récollets, Louvain.*

Une Notice sur la Société scientifique, son but, ses travaux, est envoyée gratuitement à ceux qui en font la demande au secrétariat.

Louvain. — Imp. F. & R. Ceuterick, rue Vital Decoster, 60.

ANNALES

DE LA

SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE

DE BRUXELLES

TRENTE-QUATRIÈME ANNÉE, 1909-1910
TROISIÈME ET QUATRIÈME FASCICULES

LOUVAIN
SECRÉTARIAT DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE
(J. THIRION)
11, RUE DES RÉCOLLETS, 11

1910

TABLE DES MATIÈRES

PREMIÈRE PARTIE

DOCUMENTS ET COMPTES RENDUS

PAGES

Sessions des 5, 6 et 7 avril 1910, à Bruxelles. — Séances des Sections.

Première Section 227

Deuxième — 233

Troisième — 248

Quatrième — 261

Cinquième — 293

Sixième — 293

Assemblées générales 296

SECONDE PARTIE

MÉMOIRES

Sur quelques caractères lithologiques du marbre noir de Dinant, par M. F. Kaisin 199

Les antiquités préhistoriques aux Musées de Vienne et de Budapest, par M. l'abbé J. Claerhout 212

Démonstration nouvelle d'un théorème fondamental de la théorie des covariants des formes binaires, par M. Ch.-J. de la Vallée Poussin. 223

Sur le calcul du pouvoir refroidissant des courants fluides, par M. l'abbé Th. Annycke 230

Application de la théorie des erreurs de l'auteur à la compensation des coordonnées des sommets dans les levés topographiques, par M. P.-J.-Éd. Goedseels. 257

La population du Limbourg, par M. l'abbé J. Claerhout 288

Sur quelques systèmes de quadriques réglées par M. J. Neuberg . . 308

Le volume des Annales de la Société scientifique paraît en 4 fascicules trimestriels ; il coûte 20 francs pour les personnes qui ne sont pas membres.

S'adresser pour tout ce qui concerne la **Rédaction** de la Revue et des Annales, et l'**Administration** de ces deux publications et de la *Société scientifique*, au Secrétariat, 11, rue des Récollets, Louvain.

Adresse du secrétaire général : **M. Paul Mansion,**
6, quai des Dominicains, Gand.

SESSION DES 5, 6 ET 7 AVRIL 1910

A BRUXELLES

SÉANCES DES SECTIONS

Première section

Mardi, 5 avril 1910. — La Section procède au renouvellement de son bureau. Sont nommés :

Président :	M. J. NEUBERG.
Vice-Présidents :	M. CH.-J. DE LA VALLÉE POUSSIN. le R. P. BOSMANS, S. J.
Secrétaire :	M. H. DUTORDOIR.

La Section décide la mise au concours de la question suivante :

« Soient $p_1, p_2, \dots, p_6$, les coordonnées d'une droite mobile dans l'espace. On demande l'étude de l'équation

$$A_1 p_1 + A_2 p_2 + \dots + A_6 p_6 = 0$$

dans laquelle les coefficients $A_1, A_2, \dots, A_6$ sont : 1° des fonctions du premier degré ; 2° des fonctions du second degré des coordonnées z_1, z_2, z_3, z_4 d'un point mobile. »

M. Neuberg fait une communication *Sur quelques systèmes d'hyperboloïdes*. Cette communication sera insérée dans la seconde partie des ANNALES.

M. de Monge expose ses idées *Sur la théorie mécanique du vol à voile*. Cet exposé est suivi d'une discussion à laquelle prennent part MM. de la Vallée Poussin et de Béthune.

M. Casteels fait une communication *Sur une restitution de priorité en faveur d'un auteur anglais, de Morgan ;* en voici un résumé :

Le 5 avril 1880, Joseph Carnoy présenta, à la première Section de la Société, un mémoire intitulé : *Propriétés descriptives nouvelles des sections coniques.* Ses recherches l'avaient conduit à la détermination simultanée et générale de trois points nouveaux d'une conique donnée par cinq points, ceux-ci constituant avec les trois premiers les huit sommets de deux quadrilatères inscrits à la courbe.

Récemment, nos recherches concernant certaines propriétés descriptives des coniques nous conduisaient également à la construction simultanée de trois points nouveaux ; mais, fait singulier, nous aboutissions, non aux deux quadrilatères de Carnoy, mais à un octogone. Au début nous accordions peu d'attention à ce fait, les deux constructions semblant avoir leur base dans deux principes tout à fait différents. Mais, M. de la Vallée Poussin ayant attiré à nouveau notre attention là-dessus, nous avons examiné de plus près les théorèmes de Carnoy et cette fois-ci il ne nous a pas fallu longtemps pour avoir la clef du mystère : nousavons établi, en effet, que les deux constructions découlent d'un même principe connu, qui, lui-même, n'est qu'un cas particulier d'un principe beaucoup plus général. Dans la session d'avril de l'an dernier, M. le professeur Verriest a exposé nos recherches dans cet ordre d'idées et il a, notamment, indiqué les constructions menant à l'octogone et au système de deux quadrilatères inscrits (Voir Annales, 33e année, 1re partie, pp. 169-173).

En commençant notre étude, nous avions borné nos recherches bibliographiques à la période s'étendant de l'année 1880, date de la publication des notes de Carnoy, jusqu'à nos jours, aucune mention de travaux antérieurs n'ayant été faite, ni par Carnoy, ni par les deux rapporteurs, MM. Mansion et Le Paige. Mais, quelques mois après la communication de M. Verriest, nous trouvions qu'un mathématicien anglais, de Morgan, s'était déjà servi, dès l'année 1867, du principe auquel nous avons fait allusion tantôt, pour résoudre les problèmes indiqués ci-dessus. Ses résultats ont paru dans les Proceedings of the London Mathematical Society, vol. 11, pp. 26-29, sous le titre : *On the Conic Octogram.*

Ce titre, malheureusement, ne répond pas complètement aux matières traitées dans l'article ; il n'indique pas d'une façon très claire que l'auteur y traite le cas du système de deux quadrilatères. Aussi ne faut-il pas s'étonner de ce que ni Carnoy, ni les deux rapporteurs n'aient porté leur attention du côté de l'article du savant anglais. Nous ajouterons que, pour un lecteur non prévenu, il n'était pas du tout facile de retrouver le principe du système de deux quadrilatères dans la formule très compliquée du professeur belge.

Celui-ci a certainement toujours ignoré l'existence du « double tétragramme », puisque, dans la dernière édition de son *Cours de Géométrie analytique,* il expose encore « ses » théorèmes, sans citer de Morgan. D'ailleurs, il y a quelques années à peine, l'un de ses élèves, M. Alliaume, a fait paraître dans l'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE une démonstration purement géométrique des théorèmes en question, et personne, parmi les lecteurs de cette publication pourtant si répandue, n'a protesté en faveur de l'auteur anglais. Il faut donc croire que l'article de ce dernier avait passé totalement inaperçu.

Un mot encore du petit mémoire de Carnoy. Ce mémoire n'est pas sans mérites ; l'éminent professeur a établi ses constructions indépendamment de l'auteur anglais, et cela, en appliquant un théorème qui ne fait intervenir que les coniques, alors que de Morgan a recours à la théorie des courbes d'ordre supérieur. Enfin, Carnoy déduit de son théorème fondamental une relation très curieuse (*) entre six points quelconques d'une conique, relation qui est différente de celle de Pascal, tout en offrant le même caractère de généralité.

Le savant anglais, lui, n'a su tirer aucun profit de ses belles constructions ; bien plus, nous estimons que certaines de ses affirmations sont erronées et que, en tous cas, elles demandent à être examinées avec plus de soin qu'il n'y en a mis. L'auteur était

---

(*) Cette relation dérive du double tétragramme ; il en est une seconde, découlant de l'octogramme, et même une troisième, tirée du décagramme, dont l'auteur anglais nie l'existence...

En ce qui concerne les dénominations *octogramme*, *double tétragramme*, *décagramme*, etc., voir l'article de de Morgan. Il s'agit ici de ce que l'auteur appelle le *2n-gramme inverse.*

sur la voie la plus directe menant à une généralisation du théorème de Pascal, dans le domaine des coniques ; il ne s'y est pas engagé, ou plutôt il s'y est engagé, mais, sur le point d'aboutir au « décagramme », il l'a abandonné en *affirmant* qu'il était impossible de continuer, à cause de l'apparition de certains points particuliers qu'il appelle « adjoints », et auxquels, suivant nous, il attribue un rôle trop prépondérant.

Avant de connaître l'article de de Morgan, nous avions déjà entrepris des recherches relatives au décagramme et même au dodécagramme. Nous les avons reprises récemment, tout en examinant la question à un point de vue un peu plus général. Nous avons réussi à formuler un théorème plus précis, plus général et surtout plus pratique que celui qui sert de point de départ aux constructions de de Morgan. Ce théorème donne assez commodément le décagramme, mais il conduira plus difficilement au dodécagramme ; quoi qu'il en soit, si ce dernier existe réellement, les constructions doivent être très compliquées. Au delà du dodécagramme, les constructions géométriques deviennent impossibles.

Nous comptons revenir prochainement sur ces questions.

MM. Neuberg et Verriest sont nommés commissaires pour l'examen du travail complet de M. Casteels.

Mercredi 6 avril 1910. — M. Mansion communique une note intitulée : *Démonstration de la loi des grands nombres de Poisson :*

Dans cette note, nous simplifions et nous complétons trois notes antérieures publiées sur le même sujet, dans les BULLETINS DE L'ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE, 3^e série, 1893, t. XXV, n° 1, pp. 11-13 ; dans les ANNALES DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE DE BRUXELLES, 1904, t. XXVIII, 1re partie, pp. 72-77 ; dans le BULLETIN DE LA CLASSE DES SCIENCES DE L'ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE, 1910, pp. 158-160.

1. *Lemme fondamental.* Soient

$$p + q = p_1 + q_1 = \cdots = p_s + q_s = 1,$$

des quantités positives, $p, q, p_1, q_1, \ldots, p_s, q_s$; $k, k_1, \ldots, k_s$ des nombres entiers qui peuvent être d'ailleurs égaux à l'unité, et dont la somme est μ. Posons

$$1=(p+q)^k (p_1+q_1)^{k_1}\dots(p_s+q_s)^{k_s}=A_0+A_1+\cdots+A_\mu,$$
$$P_r=A_0+A_1+\cdots+A_r,$$

A_l désignant la somme de tous les termes du produit où entrent $\mu-l$ facteurs $p, p_1, \dots, p_\mu$, l facteurs $q, q_1, \dots, q_\mu$.

Comme le remarque Laplace, dans la *Théorie analytique des probabilités* (n° 38, p. 421 de la troisième édition, 1820), P_r est la probabilité que sur μ épreuves, un événement E arrivera au moins r fois, si la probabilité simple de cet événement, pendant ces μ épreuves, prend k fois la valeur p, k_1 fois la valeur $p_1, \dots$, k_s fois la valeur p_s.

Lemme. *La probabilité* P_r *croît en même temps que chacune des probabilités* $p, p_1, \dots, p_s$.

1° En effet, il est évidemment moins probable que l'événement E arrive au moins r fois sur μ épreuves, quand la probabilité simple de cet événement est $p, p_1, \dots, p_s$, que si cette probabilité simple est plus grande pour une ou plusieurs de ces épreuves.

2° On peut le démontrer analytiquement comme il suit : Posons

$$(p+q)^{k-1}(p_1+q_1)^{k_1}\dots(p_s+q_s)^{k_s}=B_0+B_1+\cdots+B_{\mu-1},$$

les B ayant un sens analogue aux A. On aura

$$A_0+A_1+\cdots+A_\mu=(p+q)(B_0+B_1+\cdots+B_{\mu-1}),$$
$$P_r=A_0+A_1+\cdots+A_r=p(B_0+B_1+\cdots+B_r)$$
$$+q(B_0+B_1+\cdots+B_{r-1}).$$

Donnons à p, en dehors de la parenthèse, un accroissement positif δ, de manière que q décroisse de δ. La quantité P_r deviendra

$$(p+\delta)(B_0+B_1+\cdots+B_r)+(q-\delta)(B_0+B_1+\cdots+B_{r-1})$$
$$=P_r+B_r\delta>P_r.$$

On verrait de même que P_r croît en même temps que $p_1, \dots, p_s$.

3° On peut aussi démontrer que P_r croît si l'on fait croître simultanément tous les p_i dans un facteur $(p_i+q_i)^{k_i}$, par exemple, tous les p dans $(p+q)^k$. Posons

$$(p_1 + q_1)^{k_1} \dots (p_s + q_s)^{k_s} = \mathrm{H}_0 + \mathrm{H}_1 + \cdots + \mathrm{H}_{\mu - k},$$

les H ayant encore un sens analogue aux A. Désignons suivant l'usage par C_k^i le coefficient $[1.2 \dots k : (1.2 \dots i) \times (1.2 \dots k - i)]$ du binôme. On a

$$\mathrm{A}_0 + \mathrm{A}_1 + \cdots + \mathrm{A}_\mu = (p + q)^k (\mathrm{H}_0 + \mathrm{H}_1 + \cdots + \mathrm{H}_{\mu - k})$$

et, si r est égal ou inférieur à $\mu - k$ et supérieur à k,

$$\mathrm{P}_r = p^k (\mathrm{H}_0 + \mathrm{H}_1 + \cdots + \mathrm{H}_r) + \mathrm{C}_k^1 p^{k-1} q (\mathrm{H}_0 + \mathrm{H}_1 + \cdots + \mathrm{H}_{r-1})$$
$$+ \mathrm{C}_k^2 p^{k-2} q^2 (\mathrm{H}_0 + \mathrm{H}_1 + \cdots + \mathrm{H}_{r-2}) + \cdots + q^k (\mathrm{H}_0 + \mathrm{H}_1 + \cdots + \mathrm{H}_{r-k}).$$

On trouve pour la dérivée de P_r par rapport à p, après quelques réductions, la quantité positive

$$k p^{k-1} \mathrm{H}_r + (k - 1) \mathrm{C}_k^1 p^{k-2} q \, \mathrm{H}_{r-1} + \cdots + k q^{k-1} \mathrm{H}_{r-k+1},$$

ce qui prouve le théorème.

La démonstration précédente subsiste si $\mu - k < r$ ou si r est égal ou inférieur à k ; il suffit simplement de supposer nulles une ou plusieurs des quantités H_r, H_{r-1}, etc.

Il est utile d'observer que la démonstration donnée dans ce 3° n'est pas nécessaire ; celle du 2° suffit : on peut faire varier un à un les nombres p qui entrent dans $(p + q)^k$.

II. *Loi des grands nombres.* Soient $p_m = 1 - q_m$, $p_\mathrm{M} = 1 - q_\mathrm{M}$ la plus petite et la plus grande des valeurs des probabilités $p, p_1, \dots, p_s$ de l'événement E, l_m une quantité inférieure à p_m, l_M une quantité inférieure à p_M. La probabilité que, sur μ épreuves, l'événement E arrivera un nombre de fois compris entre $\mu p_m - \mu l_m$ et $\mu p_\mathrm{M} + \mu l_\mathrm{M}$, inclusivement si ces nombres sont entiers, sera égale à $1 - \mathrm{P}_r - \mathrm{Q}_t$; r est le plus grand entier inférieur à $\mu p_\mathrm{M} + \mu l_\mathrm{M}$, t le plus grand entier inférieur à $\mu p_m - \mu l_m$; P_r est formé comme il a été dit à propos du lemme ; Q_t est une expression analogue à P_r, donnant la probabilité que l'événement contraire à E arrivera au moins t fois en μ épreuves.

D'après le lemme, P_r est inférieur à l'expression analogue P'_r obtenue en remplaçant dans P_r, $p, p_1, \dots, p_s$ par p_M, $q, q_1, \dots, q_s$ par q_M, et *à fortiori* inférieur à $\varphi(\mu, p_\mathrm{M}, l_\mathrm{M})$ si $1 - \varphi(\mu, p_\mathrm{M}, l_\mathrm{M})$

est la probabilité donnée par le théorème de Bernoulli qu'un événement de probabilité constante p_M arrivera en μ épreuves un nombre de fois compris entre $\mu p_M - \mu l_M$ et $\mu p_M + \mu l_M$. De même, Q_t est inférieur à l'expression analogue Q'_t obtenue en remplaçant $p, p_1, \ldots, p_s$ par p_m, $q, q_1, \ldots, q_s$ par q_m, et *à fortiori* à l'expression $\varphi(\mu, p_m, l_m)$, si $1 - \varphi(\mu, p_m, l_m)$ est la probabilité donnée par le théorème de Bernoulli qu'un événement de probabilité constante p_m arrivera en μ épreuves, un nombre de fois compris entre $\mu p_m - \mu l_m$ et $\mu p_m + \mu l_m$.

Donc enfin

$$1 - P_r - Q_t > 1 - P'_r - Q'_t > 1 - \varphi(\mu, p_M, l_M) - \varphi(\mu, p_m, l_m).$$

Les expressions φ ont pour limite zéro, quand μ croît indéfiniment. L'intervalle $(\mu p_m - \mu l_m, \mu p_M + l)_M$ surpasse toujours $(\mu p_m, \mu p_M)$.

Les inégalités précédentes contiennent *la loi des grands nombres* sous forme précise.

M. de la Vallée Poussin fait part à la Section d'un travail *Sur quelques points de la théorie des covariants.* Ce mémoire sera inséré dans la seconde partie des ANNALES.

Le R. P. F. Willaert analyse un mémoire présenté par M. Goedseels et intitulé : *Application de la théorie des erreurs de l'auteur, à la compensation des coordonnées des sommets des polygones et des traverses topographiques.* Cette communication donne lieu à une discussion à laquelle prennent part MM. Mansion, Fabry, le R. P. Willaert.

La Section décide l'impression du mémoire de M. Goedseels dans la seconde partie des ANNALES.

Seconde section

Mardi 5 avril 1910. — La Section procède au renouvellement de son bureau. Sont élus :

Président : M. G. VAN DER MENSBRUGGHE.
Vice-Présidents : le R. P. SCHAFFERS, S. J.
M. A. DE HEMPTINNE.
Secrétaire : le R. P. LUCAS, S. J.

La seconde et la troisième Section se réunissent pour entendre une communication de M. L. Fabry sur *Le tremblement de Provence et la théorie des tremblements de terre.* Cette communication est publiée dans la Revue des Questions scientifiques, livraison du 20 juillet 1910.

Devant la seconde Section sont alors exposées les communications suivantes :

Cause probable d'un accident singulier sur l'Escaut, à Anvers, par M. G. Van der Mensbrugghe.

Voici la description d'un accident mystérieux qui s'est produit le 13 ou le 14 octobre 1905 sur l'Escaut à Anvers (*) :

Au moment où les marées étaient très fortes, trois grands steamers, l'*Asiatic Prince,* l'*Adour* et le *Léva* se trouvaient au milieu de l'Escaut en face de la ville, lorsque soudain on les vit virer de bord, courir l'un sur l'autre et s'entrechoquer avec une grande violence. Tous trois reçurent des avaries assez considérables : l'*Asiatic Prince* eut un grand nombre de tôles enfoncées, l'*Adour* le bordage tout à fait démoli, enfin ce dernier balayant le pont du *Lista* le rasa complètement et endommagea la superstructure.

Pour découvrir la cause de ce singulier accident, je dois supposer que les trois navires étaient rangés suivant la direction perpendiculaire à celle du courant ; dans ces conditions, qui ne sont pas nettement indiquées plus haut, il me paraît certain qu'entre les flancs de deux steamers voisins, la vitesse de la marée était plus grande qu'au large. Or on sait depuis longtemps que la pression de l'eau agit avec d'autant moins d'énergie sur la surface d'un solide plongé que la vitesse du liquide le long de cette surface est plus marquée.

A l'appui de l'explication que je propose, j'ai fait l'expérience suivante. Soit un grand vase présentant une large ouverture *ab* dans laquelle est fixé un tube *acdb* (fig. 1) ; suspendons dans le vase deux lames de verre ou en bois AB, A'B' portées par des fils *o*A, *o'*A' fixés en *o* et *o'* ; faisons en sorte que l'intervalle entre les deux lames soit un peu moindre que la largeur *ab* du tube fixe et

---

(*) Voir le n° du 14 octobre 1905 du journal Le Patriote.

que les positions de ces lames soient symétriques par rapport à l'axe de ce dernier.

Fermons alors l'ouverture *cd* afin de pouvoir remplir complètement le vase d'eau, et quand le liquide est revenu au repos, débouchons *cd*. Il est clair qu'entre les deux lames l'écoulement sera plus rapide que sur les faces tournées vers les parois du vase. Car le fond de celui-ci doit évidemment gêner le libre mouvement du liquide ; aussi voit-on les lames se rapprocher et même se coller l'une contre l'autre, si la longueur des fils de suspension est suffisante.

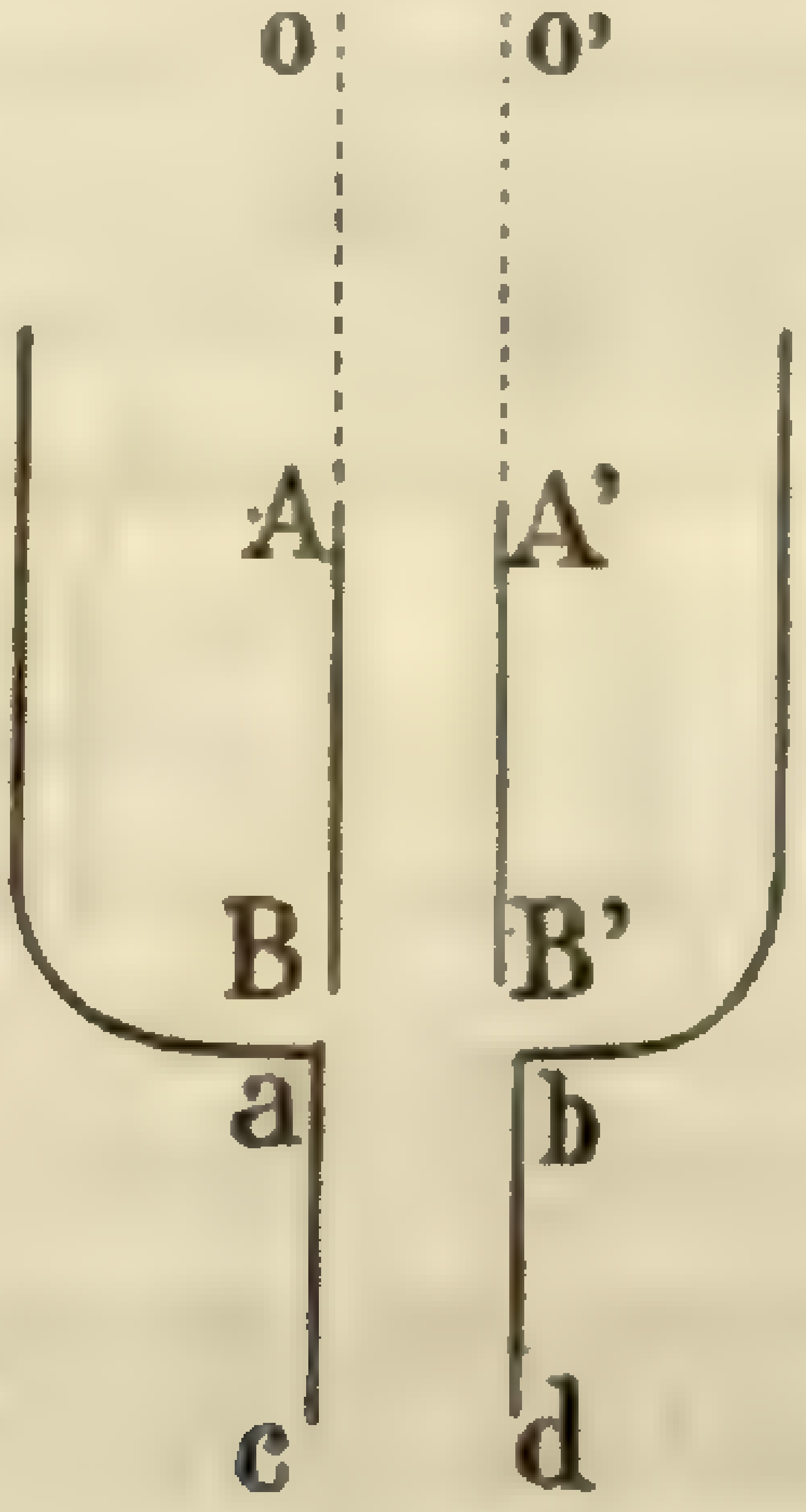


FIG. 1.

A ce propos, il est intéressant de chercher la raison pour laquelle les liquides en mouvement ne transmettent pas la pression latéralement, sauf quand ils rencontrent des obstacles à leur déplacement. Et d'abord il est évident que toute pression exercée par un liquide contre un solide exige comme condition nécessaire un rapprochement des particules d'autant plus marqué que la pression agissante est plus forte. C'est pourquoi il n'est pas permis de déclarer que la constitution de l'eau est la même à un mètre ou à dix mètres de profondeur ; sans doute la diminution de volume est très faible, mais les réactions élastiques produites par cette diminution peuvent être très considérables.

D'un autre côté, lorsque la vitesse d'un liquide s'accroît comme c'est le cas d'une veine liquide abandonnée à l'action de la pesanteur et sans doute aussi dans les fortes marées, les particules constituantes sont forcées de s'écarter entre elles, très peu il est vrai, mais assez pour produire des effets inattendus et cependant tout à fait caractéristiques. Dans ces conditions, il se manifeste une propriété à laquelle on n'avait nullement égard jusque dans ces derniers temps, je veux parler de l'élasticité de traction dont j'ai fait connaître depuis plus de dix ans de nombreuses applications. S'il en est réellement ainsi, on comprend sans peine qu'un liquide à l'état de traction ne peut exercer une pression contre un corps solide, puisque lui-même a une forte tendance à occuper un volume moindre. C'est cette tendance que j'ai pu rendre manifeste dans bien des expériences demeurées longtemps mystérieuses.

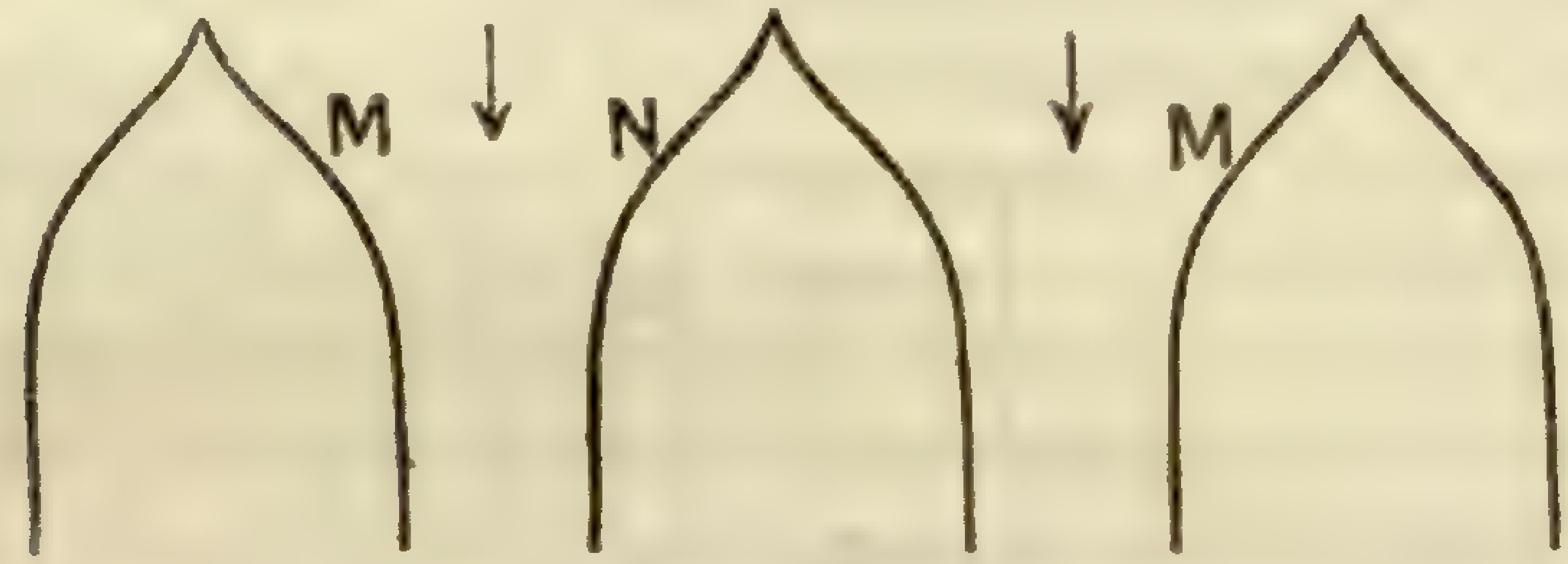


Fig. 2.

Revenons maintenant au cas des trois navires alignés sur l'Escaut. Imaginons, sous le niveau du fleuve, un plan horizontal qui coupe les proues de deux steamers voisins suivant les courbes M, N (fig. 2). M se rapportant à l'un des navires de côté, et N au steamer occupant la position intermédiaire ; un coup d'œil jeté sur la figure suffit pour faire voir que l'eau comprise entre les flancs des deux vaisseaux doit prendre nécessairement une vitesse croissante avant d'atteindre le passage laissé libre entre M et N ; par conséquent, la pression exercée par unité de surface sur le flanc tourné vers le large sera plus grande que celle relative au flanc tourné vers le steamer placé entre les deux autres ; de plus, la différence des pressions supportées par les deux flancs augmentera rapidement avec la différence des vitesses du liquide le long de ces mêmes flancs. Or, si l'on réfléchit à la somme de toutes les différences des pressions subies par les surfaces totales des deux flancs du navire M, on comprend sans peine que celui-ci doit être poussé avec violence contre le navire intermédiaire. Pour des raisons identiques, le troisième navire doit être lancé contre celui du milieu ; il n'y a donc rien d'étonnant à ce que les chocs inévitables aient causé d'aussi grands dégâts.

D'après ce qui précède, les capitaines agiraient prudemment en n'alignant pas leurs navires à une faible distance entre eux sur une ligne perpendiculaire à la direction du courant de l'Escaut ; pour éviter tout accident, il suffit de les amener en contact pendant que le mouvement de l'eau est peu prononcé, et de les attacher avec soin pour les empêcher de s'entrechoquer.

En définitive, l'accident dont il s'agit est dû à ce que la pression de l'eau contre les corps solides se transmet avec d'autant plus de difficulté que la vitesse du liquide le long de ces corps est plus grande. Il en est du reste de même de la pression des gaz contre les solides. On connaît depuis longtemps le phénomène fort singulier qui a été constaté pour la première fois par Griffitz, ingénieur des mines de Fourchambault, sur un réservoir d'air de la machine soufflante d'un haut fourneau : si de l'air fortement comprimé jaillit par une ouverture pratiquée dans une surface plane, et qu'on présente au courant un disque quelconque, le corps, repoussé d'abord par le choc du gaz, est attiré au contraire lorsqu'il a été rapproché à peu de distance de l'orifice. Alors l'air s'échappe entre la surface inférieure du disque et celle de l'orifice ; de cette manière, la pression extérieure contre la plaque devient bientôt capable de vaincre le choc du gaz et dès lors l'équilibre peut s'établir.

Sur les auréoles observées autour des conducteurs à haute tension, par le R. P. Schaffers, S. J.

Ayant rencontré dans l'Électricien (15 janvier 1910, p. 33, article de A. R. Garnier) un tableau de potentiels de décharge par auréole sur des conducteurs industriels, tableau dont l'origine n'est malheureusement pas indiquée, l'auteur a essayé d'en tirer quelques conclusions théoriques.

Voici d'abord ce tableau. Il donne, en kilovolts, les différences de potentiel *efficaces* qui caractérisent le début du phénomène. Pour avoir les minimums réels, ces chiffres doivent donc être multipliés par $\sqrt{2}$.

Distances des fils en cm.	Diamètre des fils en millimètres			
	3	5	12	25
25	23	39	64	161
50	26,5	46	78	230
100	30	53	92	300
250	34,5	62	110	390
500	39	69	124	460

Évidemment, les plus élevées de ces valeurs ne méritent qu'une confiance relative, aucune méthode connue ne permettant de les mesurer avec quelque précision. Au reste, en construisant les courbes correspondantes, on s'aperçoit immédiatement qu'elles présentent des irrégularités notables.

On sait que la capacité par unité de longueur, dans le cas de deux fils cylindriques parallèles de rayon r distants de D, vaut $\frac{1}{4 \log \frac{D}{r}}$, log désignant les logarithmes népériens.

La charge sur une longueur l s'exprime donc par

$$Q = \frac{lV}{4 \log \frac{D}{r}}.$$

Si la longueur l est grande, on peut appliquer au cylindre le théorème de Gauss, en négligeant le flux des extrémités, ce qui donne pour le flux moyen par unité de surface latérale $\frac{4\pi Q}{2\pi r l}$. Or, ce dernier flux est numériquement égal à la valeur du champ φ sur la surface.

On a donc finalement $\varphi = \frac{V}{2r \log \frac{D}{r}}$.

Appliqué aux données de l'Électricien, ce calcul fournit les résultats suivants, en unités électrostatiques.

Distances des fils en cm.	Diamètre des fils en millimètres			
	3	**5**	**12**	**25**
25	71	80	68	102,3
50	71,4	82,3	70	118,6
100	72,8	83,7	71	133,3
250	73,3	85,3	72,3	129,6
500	74	83,4	72,9	142,8

Calculons encore la chute de potentiel sur une distance finie, 0,025 cm. par exemple, dans le voisinage immédiat des conducteurs. Il suffit pour cela d'intégrer $\varphi = -\frac{dV}{dr}$ entre les limites correspondantes à cette distance.

Mettons φ sous la forme $\frac{2Q}{rl}$, la charge Q étant constante dans le problème actuel. Il vient

$$V_1 - V_2 = \frac{2Q}{e} \log \frac{r_2}{r_1},$$

r_1 étant le rayon du fil et V_1 son potentiel, r_2 le rayon augmenté de la distance 0,025 cm et V_2 le potentiel correspondant.

Remplaçant Q par sa valeur, on obtient

$$V_1 - V_2 = \frac{V_1 \log \frac{r_2}{r_1}}{2 \log \frac{D}{r_1}}.$$

D'où le tableau suivant des valeurs de $V_1 - V_2$ en volts.

Distances des fils en cm.	Diamètre des fils en millimètres			
	3	**5**	**12**	**25**
25	517	590,6	493	760
50	525	591.4	506	883
100	510	603	524	968
250	535	611	523	1039
500	582	617	526	1086

De la comparaison de ces chiffres, il semble résulter

1° Que sur un fil donné la décharge par auréole commence toujours pour une même valeur du champ, quelle que soit sa distance aux fils voisins.

2° Que la chute de potentiel dans le premier quart de millimètre au voisinage du fil est toujours la même pour un fil donné au moment de l'établissement de l'auréole.

3° Que ces mêmes grandeurs (champ et chute de potentiel dans le premier quart de mm.) sont indépendantes du diamètre du fil. Les écarts notables observés sur le fil de 25 mm. en particulier semblent dépendre des erreurs révélées dans les mesures des potentiels par les irrégularités signalées au début.

4° Quant aux valeurs absolues, elles sont certainement trop faibles. En effet, on s'est servi, pour les calculer, de la valeur *moyenne* du champ autour des fils, la seule dont le calcul soit abordable. Cette valeur est celle qui conviendrait à un fil placé dans un cylindre concentrique. Mais entre deux fils les lignes de force sont plus serrées suivant la direction qui les joint, et le champ plus intense. Le gradient, par conséquent, y est aussi plus fort.

Il n'y a donc aucune conclusion à tirer du fait que nous trouvons précisément la chute anodique minima (530 volts) sur une distance invariable comme conditionnant l'apparition de l'auréole. En réalité, les valeurs du potentiel doivent être supérieures. D'ailleurs, le courant étant alternatif, c'est la valeur de la chute cathodique, qui est plus petite (340 volts), qui devrait déterminer la décharge. Il semble donc qu'en tout cas, à la pression atmosphérique, les différences de potentiel doivent être supérieures à la chute cathodique, contrairement à ce qu'on observe dans le vide.

Ce qui est plus remarquable, c'est que la distance pour laquelle on trouve toujours une même chute de potentiel est de un quart de mm. Elle resterait sans doute du même ordre après les corrections exposées plus haut. Or, J. J. Thomson (*) penche à admettre, pour de tout autres raisons, que l'épaisseur de la gaine cathodique lumineuse, en d'autres termes la distance à la cathode du commencement de l'espace sombre de Crookes, a pour valeur 0,25

(*) ***Conduction of Electricity through Gases***, p. 449.

à 0,4 mm. dans un vide modéré. Elle serait donc la même sous la pression atmosphérique. C'est un résultat nouveau, important, s'il se confirme, pour l'explication de la décharge dans la théorie électronique.

En terminant, le P. Schaffers insiste sur le caractère provisoire des énonciations contenues dans cette note préliminaire. Il se propose de reprendre toute la question en faisant les mesures sur des fils placés dans un cylindre coaxial. Dans ces conditions, le champ peut être soumis à un calcul rigoureux, et son étude promet des résultats bien plus précis que celle des décharges sur pointes à laquelle on s'est borné jusqu'à présent. Les premiers essais indiquent que le champ à la surface du fil n'est pas indépendant du rayon de celui-ci, contrairement à la 3e conclusion provisoire, mais que c'est bien à des distances de l'ordre du quart de mm. que se rencontre dans tous les cas une chute de potentiel constante.

Expériences sur l'inertie de la matière dans le mouvement relatif, par M. Delemer.

1. Cette note a pour but de présenter un aperçu sur l'étude expérimentale des propriétés d'inertie de la matière dans les cas de mouvements relatifs. On n'aborde ce genre de questions que dans les traités de mécanique rationnelle où l'on se borne à des exposés théoriques qui consistent d'ordinaire dans la démonstration du théorème de Coriolis sur la force centrifuge composée. On développe, il est vrai, dans ces mêmes traités les applications de ce célèbre théorème à deux problèmes d'un grand intérêt physique : déterminer 1° le mouvement du pendule de Foucault, 2° celui d'un corps qui, tombant de l'ouverture au fond d'un puits de mine très profond, se trouve dévié vers l'est à cause de la rotation de la Terre. Mais ce sont là des expériences difficilement réalisables et, de plus, qui n'ont pas pour but direct la démonstration des propriétés des forces d'inertie ; on ne se sert de ces expériences que pour prouver la rotation de la Terre.

Or, on peut réaliser des expériences très simples se rapportant directement à l'étude des forces d'inertie, permettant en conséquence de vulgariser les notions de ces forces d'inertie et notamment celle de la force centrifuge composée.

2. L'une des plus simples de ces expériences consiste à faire

rouler une bille lourde sur une surface plane ou courbe en rotation.

Si la surface ne présente pas d'aspérités, mais une courbure régulière, le mouvement est bien continu et la trajectoire relative est parcourue sous l'action des forces d'inertie. La bille étant de substance très dense et peu déformable (bille en acier), l'influence du frottement doit être très faible.

J'ai fait l'expérience avec une surface plane et aussi avec une surface courbe. La surface plane était obtenue à l'aide d'une feuille de zinc bien dressée d'environ quarante centimètres de longueur sur vingt de largeur. Ce rectangle était incliné par rapport au plan du sol et tournait autour d'un axe vertical perpendiculaire à son grand côté. On avait fixé sur la surface du zinc une feuille de papier glacé enduite de noir de fumée de manière que la bille lancée pût inscrire elle-même sa trajectoire.

Comme surfaces courbes j'ai employé successivement deux surfaces cylindriques circulaires, l'une des deux placée de manière que son axe de figure fût perpendiculaire à l'axe de rotation.

Or, lorsque la vitesse devient assez rapide, la bille d'abord en repos relatif, retenue contre la pesanteur par une pièce en saillie placée en un point de la surface assez voisin de l'axe de rotation, se met en mouvement relatif sous l'action de la force centrifuge ordinaire (*) qui tend de plus en plus à l'éloigner de l'axe de l'appareil alors que la force centrifuge composée recourbe à chaque instant la trajectoire. On sait que cette force est toujours dirigée normalement à la vitesse relative v et à l'axe de la rotation du système entraîné ; sa valeur numérique est égale au double produit de la vitesse v par la vitesse angulaire ω de la rotation d'entraînement et par le sinus de l'angle α de la vitesse v et de l'axe.

Dans le cas du roulement sur un plan, la trajectoire relative s'étudie par les mathématiques. On trouve en intégrant les équations différentielles du problème que les courbes décrites par la bille sur le plan doivent être, suivant la pente de celui-ci, des courbes filant à l'infini avec une très faible courbure, ou des

---

(*) Le sens de la rotation doit être tel que la bille soit obligée au départ de monter sur la surface ; autrement, l'expérience ne serait pas possible.

spirales tournant autour du point de départ de la bille pris pour origine du mouvement.

Ces dernières sont relatives aux faibles pentes du plan, lorsque l'angle de pente i satisfait à l'inégalité

$$\cos^2 i > \frac{1}{9}.$$

Dans les limites du mouvement réalisable par l'expérience, les graphiques semblent donner des résultats assez conformes à ceux de la solution mathématique du problème. La figure 1 montre les tracés graphiques faits par la bille pour des pentes assez faibles du plan. Une comparaison précise des graphiques avec les courbes théoriques est impossible, car l'intégration des équations différentielles du problème introduit des constantes arbitraires qu'on ne peut déterminer numériquement (*).

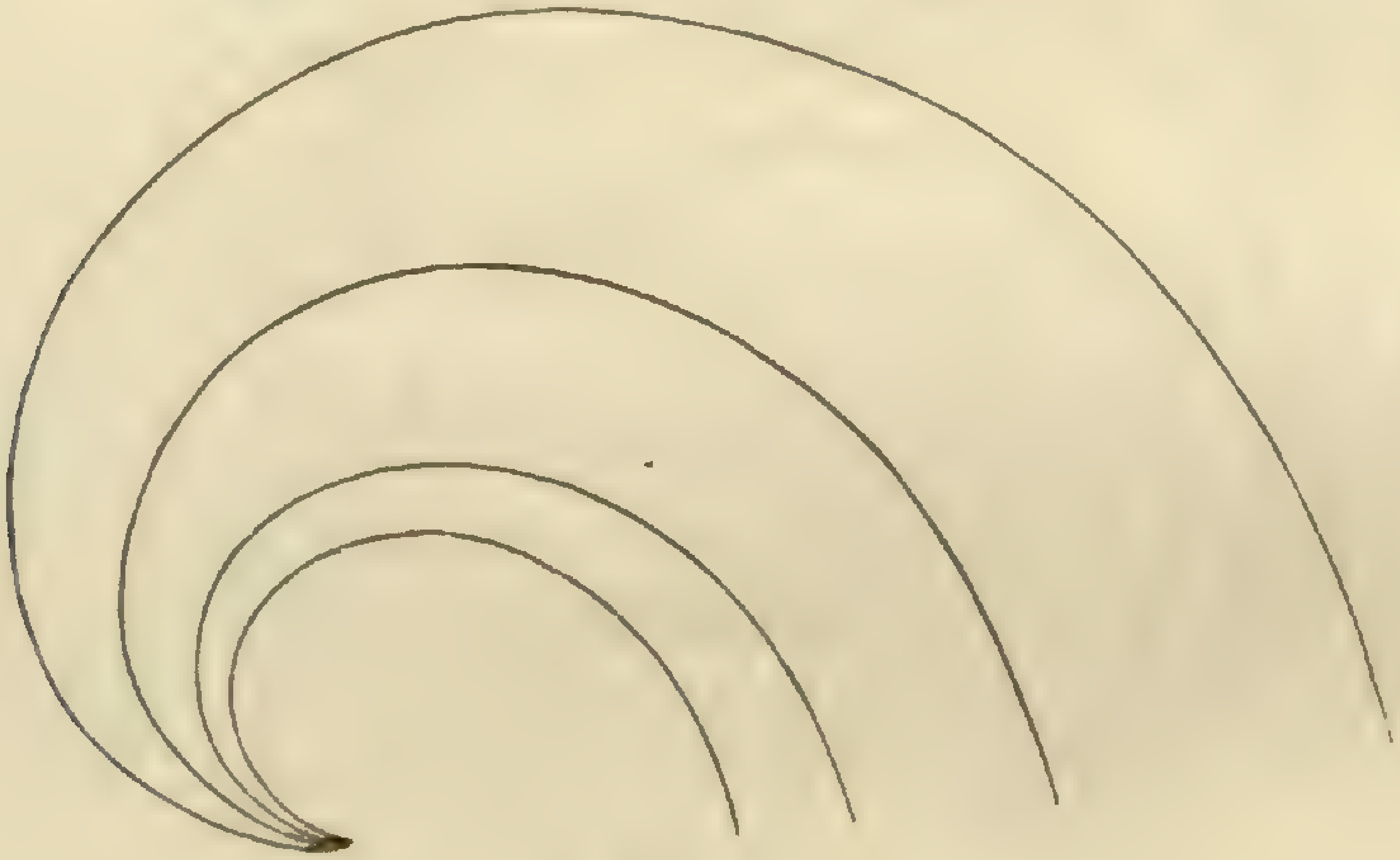


FIG. 1.

Si l'on remplace le plan en rotation par une surface cylindrique concave à axe horizontal, les trajectoires de la bille sur la surface diffèrent de celles de l'expérience précédente d'autant plus que le

---

(*) Nous avons ici dans un problème pourtant bien simple un exemple de la difficulté extrême qu'il y a à passer des solutions analytiques de la physique mathématique aux valeurs numériques des fonctions à déterminer. Il y a bien d'autres cas où la solution du problème de physique mathématique n'a d'intérêt qu'au point de vue de l'analyse, aucune interprétation physique des calculs n'étant possible.

rayon du cylindre est plus petit. La figure 2 est la reproduction de commencements de trajectoires obtenus en tracés graphiques pour ce cas par le procédé qu'on a expliqué ci-dessus.

On peut remarquer sur ces graphiques qu'après le premier quart de spire, le rayon vecteur allant du point de départ à un point quelconque de la courbe augmente moins vite que dans le cas du mouvement sur un plan. Il paraît même probable que si la surface cylindrique était de rayon de courbure moindre que celle qui m'a servi à faire l'expérience on pourrait avoir des courbes dans lesquelles le mobile se rapprocherait du point de départ avant d'avoir décrit une demi-spire autour de celui-ci.

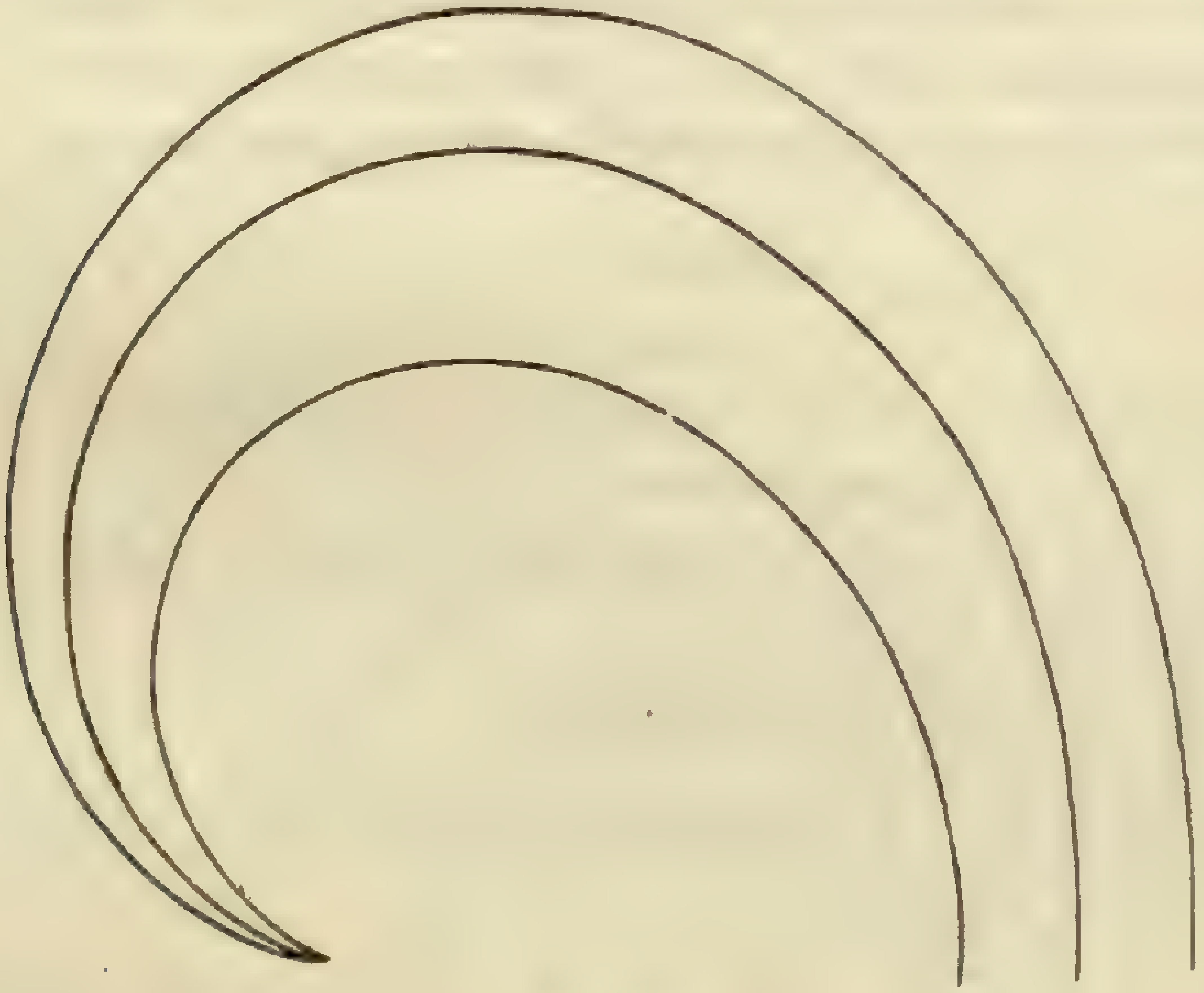


FIG. 2.

3. Le dispositif précédent montre l'effet de la force centrifuge composée dans un mouvement relatif, mais cet effet ne s'y produit pas indépendamment de tout autre. La trajectoire relative de la bille est en effet décrite dans cette expérience sous l'action des deux forces d'inertie, centrifuge ordinaire et centrifuge composée. Or, il est aisé d'imaginer un mécanisme dans lequel les forces centrifuges composées produisent à elles seules un mouvement déterminé.

Voici le projet d'un appareil qu'on pourrait construire dans ce but.

Soit (figure 3) un train épicycloïdal à engrenages coniques dont la roue R reste fixe. L'arbre $\overline{AB}$, perpendiculaire à l'axe $\overline{AA'}$ de la roue R, sera entraîné en rotation autour de cet axe à l'aide d'une manivelle par exemple. On pourra considérer cet arbre $\overline{AB}$ qui tourne uniformément comme un premier système matériel S en mouvement absolu.

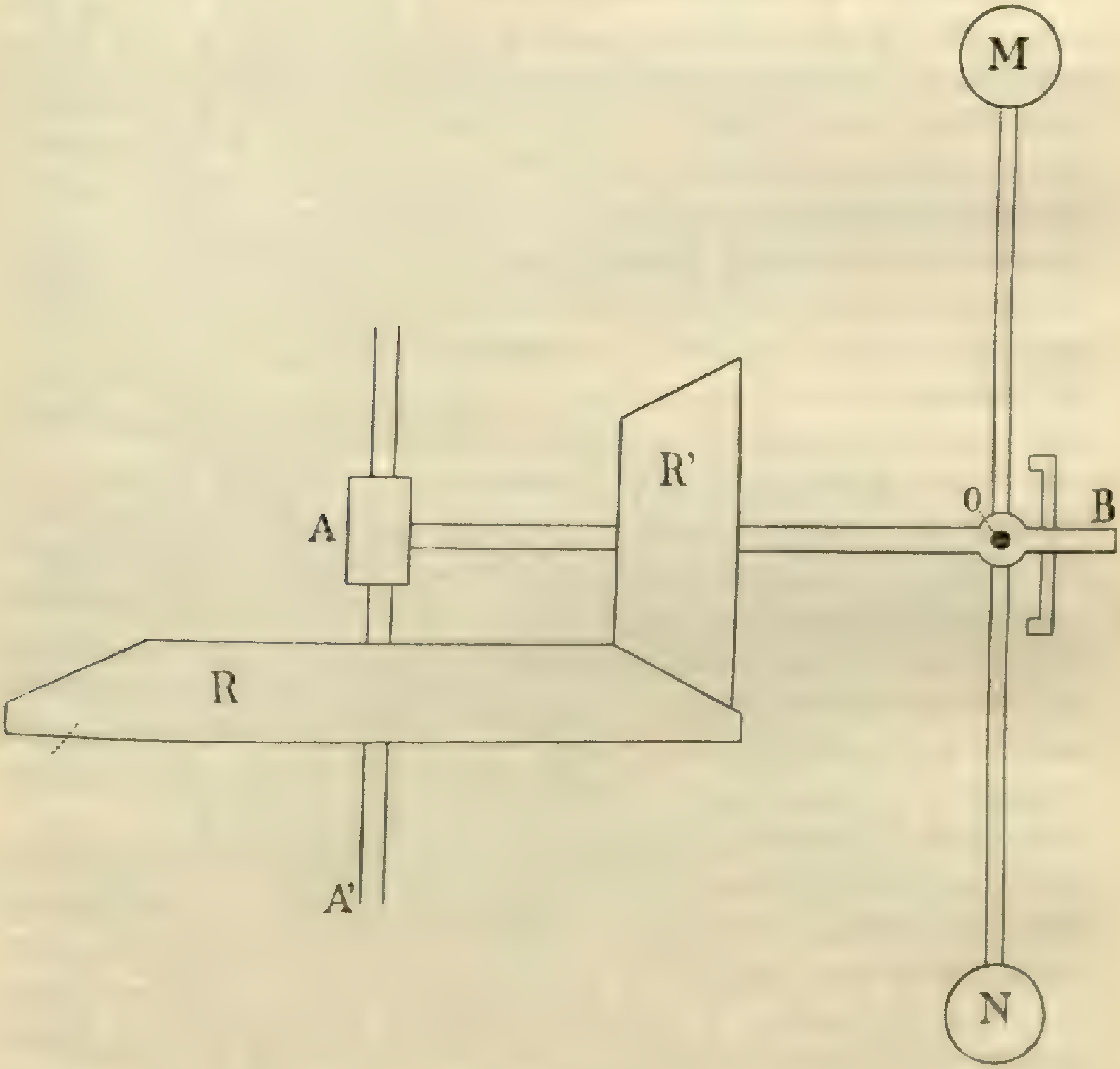


Fig. 3.

Un second système S' en mouvement relatif par rapport à S sera constitué par la roue R' qui, tournant autour de $\overline{AB}$, prend un mouvement épicycloïdal. La tige $\overline{MN}$, portant à ses extrémités deux masses égales M et N, est entraînée avec la roue R' et fait par conséquent partie du système S'. Cependant cette tige est laissée libre d'osciller autour d'un arbre O perpendiculaire à l'arbre $\overline{AB}$ et entraîné aussi dans le mouvement épicycloïdal autour de $\overline{AB}$.

En vertu de la première rotation autour de $\overline{AA'}$, les forces centrifuges tendent à écarter à chaque instant les masses M et N de l'axe $\overline{AA'}$. Comme ces masses sont égales, les forces centrifuges se détruisent mutuellement à cause de la rigidité de la tige.

D'autre part la rotation relative de la tige autour de l'axe $\overline{AB}$ ne tendrait, si elle était seule, qu'à écarter les boules M et N l'une de l'autre à cause de l'inertie de ces boules. La réaction de la tige inextensible détruit l'effet de ces forces. Si donc le mouvement qu'on vient de décrire ne mettait en jeu d'autres forces d'inertie que les précédentes, la tige MN, bien que libre d'osciller, resterait, pendant le mouvement, perpendiculaire à l'arbre AB. Mais comme la rotation autour de $\overline{AB}$ est un mouvement relatif, nous voyons intervenir l'action des forces centrifuges composées. Ces forces, si les dimensions de l'appareil sont convenablement choisies, pourront produire pendant le mouvement les effets suivants :

1° Tendre à écarter de $\overline{AA'}$ celle des deux masses M ou N qui, à l'instant considéré, est au-dessus de AB ; 2° tendre à rapprocher de $\overline{AA'}$ la masse qui est au-dessous de $\overline{AB}$ (*) ; ces deux forces ajoutent donc leurs effets pour déplacer la tige.

Il est aisé de voir que, à cause du maniement continu de l'appareil, les forces centrifuges composées pourront provoquer un mouvement oscillatoire de la tige $\overline{MN}$ autour de son axe O, mouvement de période égale à la durée de la rotation de R'.

On peut diminuer l'amplitude de ces oscillations par de petits buttoirs α et β disposés comme l'indique la figure. Dans ces conditions, si les oscillations de la tige ne sont pas bien observables à cause de la vitesse de l'appareil, le bruit régulier de la tige oscillante heurtant les buttoirs à chaque oscillation témoignera de l'effet des forces centrifuges composées.

M. Delemer donne lecture du rapport suivant sur un mémoire présenté par M. l'abbé Annycke et intitulé : *Pouvoir refroidissant des fluides*.

(*) Tels seront les sens des forces centrifuges composées si la rotation est directe pour un observateur ayant l'œil sur l'axe $\overline{A'A}$, au-dessus de l'appareil et regardant celui-ci.

On peut énoncer comme suit le problème que s'est proposé l'auteur :

« Une masse de fluide indéfinie se déplace en glissant avec une vitesse uniforme sur une paroi plane également indéfinie. Or, sauf une bande très longue à bords parallèles faisant partie de cette paroi plane, la paroi est à la même température que le fluide. La bande, elle, présente un excès de température T°, entretenu par des sources chaudes, et pouvant d'ailleurs varier d'un bord à l'autre de la bande. Le courant fluide rencontre la bande transversalement à son déplacement. Le fluide est conducteur et emporte aussi par convection la chaleur fournie par la bande. Il s'agit de déterminer la température θ° aux divers points de l'espace où se déplace le fluide quand, le régime permanent étant atteint, la température restera constante en tout point fixe de cet espace.

M. Boussinesq avait indiqué l'équation aux dérivées partielles qui régit le problème, et, en avril 1908, M. É. Picard dans une note des Comptes rendus de l'Académie des Sciences avait montré comment on peut intégrer les équations indéfinie et définie du problème, en appliquant les méthodes de Freedholm. Or, M. l'abbé Annycke a tenté de résoudre complètement le problème en suivant la voie tracée par M. Picard. Il emploie le changement de variables indiqué par M. Picard et cherche à déterminer la nouvelle variable v remplaçant la température θ.

Dans ces conditions, la fonction qui doit donner v, ayant été formée par la méthode indiquée, satisfait aisément à l'équation aux dérivées partielles du problème, mais on ne peut faire prendre à cette fonction les valeurs voulues aux limites, car elle devient infinie sur les bords de la bande chaude.

M. Annycke tourne élégamment la difficulté en se donnant une condition limite différant extrêmement peu de la condition limite réelle et à laquelle il devient possible de satisfaire. Ensuite il résout le problème analytiquement sans toutefois pouvoir de là passer aux valeurs numériques de la température. A ce point de vue, le rapporteur serait heureux que M. Annycke pût achever son travail : ce serait un beau résultat pour la physique mathématique.

Chemin faisant, M. Annycke a l'occasion de démontrer les propriétés importantes de certaines fonctions introduites dans le calcul. Ces propriétés n'avaient été qu'indiquées par M. Picard.

Disons encore que pour exprimer la solution analytique du problème, M. Annycke a substitué à la forme de Freedholm, un développement en série dans lequel les coefficients des différents termes sont déterminés par approximations successives. Ce procédé donne une expression de la solution plus élégante.

Enfin l'auteur du mémoire examiné fait allusion à une note de M. Lichtenstein parue dans les Comptes rendus de l'Académie des Sciences. Cette note paraît se rapporter à la difficulté que nous avons signalée plus haut et qui a préoccupé M. Annycke ; celui-ci a donc cru devoir montrer que les résultats de M. Lichtenstein ne s'appliquent pas au présent problème.

En résumé, il y a lieu de conclure, nous semble-t-il, que M. Annycke ayant développé complètement la solution analytique de cet intéressant problème, son mémoire mérite d'être imprimé dans les Annales de la Société.

Le second rapporteur, le R. P. Schaffers, S. J., se rallie aux conclusions de M. Delemer. La Section vote l'impression du mémoire de M. Annycke dans la seconde partie des Annales.

La section maintient les deux questions de concours suivantes :

1. On demande des expériences nouvelles sur le timbre et notamment sur le timbre des voyelles chantées, en tenant compte des recherches antérieures sur cet objet.

2. On demande des recherches nouvelles sur l'existence possible d'états allotropiques soit de l'H, soit de l'Az, soit du Cl (Voir la communication de M. de Hemptinne, le 28 avril 1908).

Troisième section

Mardi 5 avril 1910. — La Section décide le maintien au concours des deux questions proposées les années précédentes :

a) Étude des caoutchoucs africains ;

b) Monographie géographique de la Campine.

La Section émet les vœux suivants :

a) Que le règlement arrêté par le Conseil *pour l'encouragement des recherches scientifiques* détermine la date à laquelle les rapports sur les mémoires de concours doivent être soumis aux sections intéressées ;

b) Que l'art. 5 des *Statuts* de la Société soit modifié et libellé comme suit : La Société est dirigée par un Conseil pour la formation duquel chaque Section désigne quatre membres. Leur mandat est de quatre années et est renouvelable.

Tous les ans, à la session de Pâques, les Sections désignent le membre soumis à réélection.

En cas de décès ou de démission d'un des membres qu'elle a choisis, la Section intéressée lui donne un successeur pour achever son mandat.

Art. 5$^{\text{bis}}$. Il est constitué au sein du Conseil, et d'après les indications de celui-ci, un Bureau composé d'un président, de deux vice-présidents, d'un secrétaire général et d'un trésorier.

Un secrétaire-adjoint est choisi soit au sein du Conseil, soit en dehors de celui-ci.

Art. 5$^{\text{ter}}$. Détermination des fonctions *a*) du secrétaire général, *b*) du secrétaire-adjoint.

Sur la proposition du R. P. Van den Gheyn, les membres proposent l'insertion aux ANNALES du mémoire de M. l'abbé Claerhout sur *La population du Limbourg*.

M. L. Fabry entretient la Section du *Tremblement de terre de Provence* (11 juin 1909) et examine à cette occasion les diverses théories qui ont été émises sur les tremblements de terre. Cette communication a paru dans la REVUE DES QUESTIONS SCIENTIFIQUES, livraison du 20 juillet 1910.

Le secrétaire donne lecture de la lettre ci-dessous qui lui a été adressée par M. Fabre :

MONSIEUR,

Devenu à peu près aveugle au point de ne pouvoir ni lire, ni écrire, accablé d'ailleurs par les misères du grand âge, je ne peux plus aujourd'hui vous adresser l'opuscule entomologique dont nos vieilles relations m'avaient fait une douce habitude. A mon vif regret, je suis obligé de prendre ma retraite.

Agréez, Monsieur, l'expression de mes meilleurs sentiments.

Votre tout dévoué,
(S$^{\text{é}}$) J.-H. FABRE.

Sérignan (Vaucluse), 15 mars 1910.

La Section exprime ses vifs regrets de la pénible situation où l'un de ses membres les plus éminents est acculé ; elle rend un juste tribut d'hommages à la part brillante que M. Fabre a prise à ses travaux, et envoie un salut confraternel et l'expression de sa gratitude au vaillant, qui est resté sur la brèche jusqu'à ce que l'âge et les infirmités aient eu raison de son énergie.

Mercredi 6 avril 1910. — M. A. Proost expose les considérations suivantes *Sur l'utilité des cartes agrogéologiques*.

Dans les diverses sessions de la *Société scientifique* de Bruxelles, j'ai signalé le vif intérêt que présente, pour l'agronome comme pour le géologue, l'étude des régions littorales des départements du Var et des Alpes Maritimes, où l'on rencontre des roches plus ou moins désagrégées appartenant à tous les étages géologiques, depuis les massifs granitiques et porphyriques injectés dans le terrain secondaire jusqu'au terrain quaternaire. En remontant, par exemple, les vallées du Var, de la Vésubie et du Paillon, on passe à travers des plissements nombreux des calcaires et des marnes jurassiques et crétacés, de grès et de schistes rouges et verts appartenant aux terrains permien ou triasique et où l'on trouve des filons d'arsenic, de plomb, de manganèse, de fer, etc., qui ont attiré depuis longtemps l'attention des savants de la région (*).

Depuis Antibes jusque Saint-Raphaël, on voit affleurer, tout le long du littoral de la Méditerranée, des roches primitives aux couleurs variées, des porphyres rouges ou bleuâtres, des gneiss et des micaschistes, des trachytes et des roches basaltiques contenant des cristaux nombreux de feldspath et de mica à base de *potasse*, de ***soude***, de ***chaux*** et de ***magnésie***.

Toutes ces roches, en se décomposant au contact de l'air, ont donné naissance à de grandes variétés de *sols arables*, dont les *horticulteurs* du littoral ont appris parfois à connaître empiriquement les propriétés fertilisantes particulières, notamment pour ce qui concerne la culture des palmiers, des mimosas, des œillets, des roses et des primeurs. Nous avons fait analyser plu-

---

(*) Voir Revue des Questions scientifiques, octobre 1905 : *Une herborisation sur la Côte d'Azur.*

sieurs échantillons de ces roches et de ces terres aux laboratoires de Gand et de Louvain, notamment la terre rouge de Villefranche et de Monaco — si favorable à la culture des œillets — qu'on voit transporter en paniers à dos d'homme sur les flancs des rochers arides de la Corniche, qui se transforment ainsi rapidement en véritables jardins suspendus au-dessus de la mer.

M. J. Poskin, professeur à Gembloux, et M. Nyssens, directeur du laboratoire de l'État à Gand, ont bien voulu nous aider depuis longtemps à poursuivre l'étude de la géogénie des sols arables, par des analyses comparées des sols et sous-sols, belges et étrangers.

Soit dit en passant, j'ai le plaisir de vous annoncer que plusieurs diagrammes et cartes agrogéologiques élaborés avec leur concours et celui des professeurs de diverses écoles régionales, figureront à l'Exposition universelle de Bruxelles. On y verra figurer notamment le diagramme de la terre à fleur, issue des roches rouges de la Méditerranée, dont M. Nyssens a fait, à ma demande, une analyse approfondie et dont j'ai déterminé la géogénie à la *Société scientifique de Bruxelles*, en 1901 (Voir Annales, session d'avril).

Toutes les roches que nous avons énumérées plus bas donnent naissance, nous le répétons, à des terres différentes, parfois très riches en éléments fertilisants minéraux. Un géologue qui connaît bien leur origine peut souvent prédire aux horticulteurs les résultats de leurs essais, s'il se fait aider des conseils d'un agronome exercé à l'analyse du sol par la plante et les engrais chimiques.

C'est ce que nous avons pu constater cette année *de visu* en accompagnant dans diverses cultures du littoral un agronome distingué, professeur départemental du Var et des Alpes Maritimes. M. Belle a créé dans le haut Var une laiterie coopérative qui alimente la ville de Nice de lait pur, de beurre et d'œufs frais, et qui a enrichi plusieurs villages pauvres, perdus dans la montagne, où l'élève du bétail et les cultures fourragères prennent une grande extension.

On peut y voir, notamment depuis peu, de superbes sainfoins obtenus dans des marnes bleues ou noires que l'on croyait stériles et qui sont fort riches en potasse.

Dans un opuscule intitulé : *Excursions au pays des primeurs,*

M. Belle décrit excellemment les résultats merveilleux obtenus par la culture rationnelle, *fondée sur la connaissance du sol et du climat,* dans les environs d'Avignon, dans ces garigues couvertes de cailloux, brûlées du soleil et stérilisées par le mistral. Grâce à l'irrigation, combinée avec la création des abris naturels et à l'emploi judicieux des engrais à dominante de potasse, on voit se transformer à vue d'œil ces déserts en luxuriantes cultures horticoles qui alimentent régulièrement les halles de Paris.

Il constate, comme nous, que « la fertilité naturelle est, en général, sous la dépendance de *l'origine* des terres. Les multiples analyses effectuées jusqu'à ce jour dans les milieux les plus divers en témoignent surabondamment, dit-il. *Les contours des cartes agronomiques se confondent le plus souvent avec les contours des formations géologiques. Il suffit, en principe, d'un nombre limité d'analyses sur des échantillons prélevés judicieusement, pour connaître la richesse des sols de même origine dans un milieu donné* (page 7). »

C'est ce que nous n'avons cessé de répéter, d'accord avec M. Stainier, M. de Lapparent et M. Van den Broeck, à la Commission de la Carte agronomique, comme ailleurs.

Ces expériences fécondes en résultats pratiques confirment absolument la théorie que nous n'avons cessé de soutenir dans le sein de cette Commission et que nos contradicteurs ne réussiront pas à renverser parce qu'elle repose sur des observations rigoureuses et nombreuses fournies aujourd'hui par les agronomes de tous les pays, à savoir qu'il importe avant tout au cultivateur de bien connaître *le sol et le sous-sol* des champs qu'il travaille et qu'il faut mettre dans ce but à sa disposition des cartes agrogéologiques qui le renseignent avec toute la précision *possible* sur la nature et l'origine de sa terre.

Quand on a critiqué la méthode que nous préconisons, on a toujours oublié de tenir compte des résultats *pratiques* déjà obtenus dans diverses régions de la Belgique, comme de l'étranger, pour affirmer, *à priori*, « qu'il est impossible, dans l'état actuel de nos connaissances, de publier de bonnes cartes agronomiques (*), qu'on ne pourra atteindre ce but que lorsque l'on aura

---

(*) En 1894, à l'Exposition universelle d'Anvers, nous avons exposé déjà une série de cartes fort bien faites, avec le concours de nos agronomes, par les découvert des méthodes d'analyses parfaites qui permettront de fixer exactement les coefficients de fertilisation de chaque élément ». N'est-ce pas le cas de dire que *le mieux est ici comme ailleurs l'ennemi du bien* et qu'il est toujours dangereux de s'inscrire en faux contre l'expérience acquise ? Car on ne peut pas discuter les bons résultats obtenus depuis 25 ans par les renseignements fournis par ces écoles et par nos laboratoires de l'État dans toutes les régions agricoles de la Belgique et particulièrement dans celles où l'on a figuré sur les cartes, dont nous préconisons l'emploi, les données fournies par *l'analyse comparée du sol et de la plante.*

Nous avons eu, d'ailleurs, la satisfaction de voir, l'an dernier, le Congrès d'Agro-géologie de Budapest, confirmer notre manière de voir par plusieurs votes, et des vœux analogues ont été émis, au mois de décembre dernier, à l'assemblée générale des délégués de l'Institut international de Rome (Voir *Comptes rendus* qui viennent de paraître).

Cette communication donne lieu à un échange de vues entre l'auteur, MM. Armand, C^{te} de Limburg-Stirum et De Wildeman.

M. l'abbé Claerhout s'occupe, en deux communications, de l'*Origine du nom de Wenduyne*, et des *Antiquités préhistoriques aux Musées de Vienne et de Budapest* ; voici le texte de la première de ces communications ; la seconde paraîtra dans la seconde partie des ANNALES.

LE NOM DE WENDUYNE (*).

Quelle est l'origine du nom de Wenduyne, vocable à l'aspect celtique, dont nous avons longtemps recherché le sens ?

---

collèges de Mont-sur-Marchienne, Virton, Carlsbourg, Dinant, Hasselt, etc. (Voir la REVUE DES QUESTIONS SCIENTIFIQUES de Bruxelles, avril 1895 : *L'exposition collective de l'enseignement agricole à l'Exposition d'Anvers de 1904*).

(*) Bibliographie : H. d'Arbois de Jubainville, *Les premiers habitants de l'Europe*. Deux tomes, Paris, 1889.

A. de Loë, *Fouilles de la Panne*. Dans BULLETIN DES MUSÉES ROYAUX, 1908, p. 35.

E. Förstemann, *Altdeutsches Namenbuch. Erster Band : Personennamen.*

Nous pensons qu'il signifie *dune blanche*.

Le nom serait donc dû à l'aspect du lieu, et un rapprochement analogue se reflète dans le nom de *Wissant* (*), *wit zand*, les « sables blancs » de la dune, et dans le nom de *Blankenberghe,* le « monticule blanc » des dunes.

Le terme *Wen* est la forme actuelle du radical celtique *vindos* (**), qui signifie *blanc* et que nous rencontrons, sous diverses formes, dans les vocables suivants :

Le gaulois *Vindobona* (***), le hameau blanc, de *vindos, blanc,* et *bon, vicus,* un mot, dont l'étymologie est obscure. Taylor le regarde comme le « bon endroit », du latin *bonus* (****). D'autres philologues le rattachent à d'autres racines indogermaniques, sans élucider la question.

Le gaulois *Pennovindos* (5), *l'homme à la tête blanche.* L'existence de ce mot celtique est attestée par la légende monétaire celtique ΠΕΝΝΟ-ΟΥΙΝΔΟΣ. Le nom d'homme s'est transformé en nom de lieu : ce lieu, c'est le fundus de l'homme à la tête blanche ; c'est le nom primitif de *Pavant* (Aisne), appelé *Penvennum* au moyen âge ; le terme *vennum* offre déjà quelque ressemblance avec la forme belge *Wen.*

Le gaulois *Vindomagos* (6), appelé *Finilmag,* au IXᵉ siècle, vocable traduit par *Album campum*. C'est le nom ancien de *Finvoy.*

Nordhausen 1856; *Zweiter Band : Ortsnamen,* Nordhausen, 1859.

H. Jellinghaus, *Die westfälischen Ortsnamen nach ihren Grundwörtern.* Kiel und Leipzig, 1896.

G. Kurth, *La Frontière linguistique en Belgique et dans le Nord de la France,* tome I, Bruxelles, 1896 ; tome II, Bruxelles, 1898.

Isaac Taylor, *Words and Places.* London, 1902.

J. Vercoullie, *Beknopt etymologisch woordenboek der nederlandsche taal.* Tweede uitgaaf, Gent, 1898.

Whitley Stokes, *Urkeltischer Sprachschatz.* Göttingen, 1894.

Nous ne citerons que le nom de l'auteur.

(*) Is. Taylor, p. 241.

(**) Whitley Stokes, p. 265.

(***) Whitley Stokes, p. 265.

(****) Is. Taylor, p. 322.

(5) D'Arbois de Jubainville, II, p. 294.

(6) D'Arbois de Jubainville, II, p. 268.

Le breton *vennisetli* (*), la vieillesse, l'âge blanc. Nous voyons encore le terme breton se rapprocher de la forme que le radical celtique a revêtue dans la toponymie west-flamande.

L'irlandais *find*, le kymrique *gwynn*, le breton *guenn* (**), avec lequel notre terme flamand offre le plus d'analogie.

Le nom du lieu dit *Wenrech* (***), du village d'Othée, que nous traduisons par « haie blanche ». Le terme bas-allemand *recke* (****), désigne une haie vive, qui entoure un champ : nous assimilons ce vocable au mot *Wenhagen* (^{5}), nom d'un lieu dit *westphalien*, situé aux environs d'Iserlohn.

Le nom du lieu dit *Wenhem* (^{6}), signalé en Westphalie, dans un document de 1314. C'est le *heim*, le lieu d'habitation, qui se fait remarquer par sa blancheur et qui est l'équivalent de *Withem* (^{7}), nom de plusieurs lieux dits en Westphalie et ailleurs. Ces régions ont été peuplées par les Celtes, avant d'être occupées par les Germains.

Le nom de *Wendon* (^{8}) en Essex et dans le Somerset. Taylor l'envisage, à tort, comme le nom d'un lieu, consacré au culte de Wodan ; il nous paraît identique à Wenduyne. *Don* est la forme sous laquelle se présente le mot *duin* dans les régions saxonnes, en Angleterre et en Westphalie. On n'en fournit pas une étymologie satisfaisante et on ne peut l'identifier avec le mot celtique *dunon, din* — qui ne signifie pas monticule, mais forteresse — comme le fait M. Vercoullie, dans son dictionnaire étymologique de la langue néerlandaise.

Le nom de *Wendin* (^{9}) : c'est le bourg blanc, le même nom que celui de *Weissenburg* (^{10}). La forme *Wenti*, dont on le fait

---

(*) Whitley, p. 294.

(**) Whitley Stokes, p. 265.

(***) G. Kurth, I, p. 178.

(****) Jellinghaus, p. 110.

(^{5}) Jellinghaus, p. 39.

(^{6}) Jellinghaus, p. 48.

(^{7}) Jellinghaus, p. 48.

(^{8}) Taylor, p. 219.

(^{9}) G. Kurth, p. 320.

(^{10}) Förstemann II, p. 1563.

dériver, ne peut être qu'une forme corrompue et inintelligible de ce vocable.

Le celtique était la langue des peuplades de la Belgique, depuis les premières invasions des Celtes que l'on peut dater de l'an 700, avant l'ère chrétienne ; les Belges venus après les Gaulois parlaient probablement un dialecte, qui a disparu avec l'empire romain : s'il avait survécu en quelque région de notre territoire, comme le parler celtique a survécu en Irlande, au pays de Galles et en Bretagne, il est probable que le terme *wen,* blanc, serait la forme belge du radical *vindos ;* le celtique belge n'a persisté que dans de rares noms de lieux et dans l'onomastique des cours d'eau.

Ce nom de *Wenduyne* projette une vive clarté sur l'histoire de notre côte. Quand la région poldérienne a émergé pour se peupler à l'époque néolithique, les dunes se sont formées, mais la séparation des régions habitées et des eaux, le rivage, était plus au large qu'à l'époque actuelle, depuis les temps néolithiques, jusqu'à la fin de l'époque romaine. Le fait est prouvé par les découvertes archéologiques que l'on peut faire sur la plage, à marée basse.

Pendant la durée de l'époque franque, la zone poldérienne a été envahie par les flots de la mer.

Cette invasion marine n'a pas produit partout les mêmes effets : à Caeskerke, nous avons relevé, dans une tourbière, une couche d'alluvions épaisse de 4 à 5 mètres, recouvrant le niveau primitif et tourbeux ; à Dudzeele, nous avons pu constater que le dépôt marin, superposé à la tourbe, contenant des antiquités romaines, n'avait qu'une épaisseur de quelques centimètres ; à Vlisseghem, notre savant collègue, M. le baron de Loë, a découvert des traces indéniables de colonisation franque, contemporaine de l'établissement des Francs dans la zone sablonneuse de la Flandre. Vlisseghem est d'ailleurs un nom franc : on connaît les radicaux *flad* (*), *fled, flid, flod,* qui signifient *éclat* et qui ont donné naissance à des noms de personnes. Comme le radical *flod* a donné *floz*, le radical *flid* a engendré le radical *fliz,* d'où dérive le nom patronymique de *Flissingen,* nom d'un lignage franc, fixé à Flessingue et à Vlisseghem.

(*) Förstemann, I, pp. 407 et 410.

Rien d'étonnant que, malgré les vicissitudes que la zone poldérienne a traversées, les dunes primitives, qui avaient probablement partout la largeur qu'elles ont encore actuellement à la Panne, n'aient pas été enlevées par l'invasion marine de la fin de l'époque romaine.

On ne peut admettre avec certains géologues que nos dunes soient de formation récente et contemporaines du dernier recul des vagues de la mer.

Deux faits prouvent leur ancienneté.

N'ont-elles pas conservé intacts les vestiges de la civilisation des Celtes et des Belgo-Romains, qui s'étaient établis au bord de la mer, dans les sites pittoresques, créés par les monticules sablonneux, les blanches collines qui jalonnent le cordon du littoral ?

Les emplacements occupés par ces tribus primitives sont là avec les foyers, les restes de l'industrie, les débris du mobilier des habitants qui se sont succédé dans ces stations, jusqu'à la fin de l'époque franque : leur révélation n'a pas été une des moins précieuses et des moins surprenantes conquêtes de l'archéologie contemporaine.

Voici quelques conclusions qui se dégagent des fouilles effectuées par M. le baron de Loë (*) :

« Les gisements que l'on rencontre dans les pannes interdunales situées entre la Panne et Bray Dunes, sont des gisements parfaitement en place. — Ils reposent sur le sol ancien constitué, sans doute, par un îlot de sable flandrien. — Les points où se rencontrent les stations n'ont pas été envahis par la mer, depuis trois ou quatre siècles au moins avant l'ère chrétienne. Sans doute, il y a eu érosion des dunes, ruptures et invasions de marée plus ou moins longues dans la plaine derrière celles-ci, mais pas d'envahissement total de la région... »

Le nom celtique de Wenduyne vient confirmer ces découvertes et les éclairer.

Il subsiste comme un monument historique, comme un document géologique, comme un témoin irrécusable des dunes primitives ; comme un souvenir impérissable de ces Morins, qui ont soumis les néolithiques de la plaine tourbeuse à leur domination,

---

(**) A. de Loë, p. 39.

pour se laisser subjuguer à leur tour par les maîtres du monde, dont les traces sont ensevelies sous les sables de la plage en face de l'antique Wenduyne.

M. le C^{te} Ad. de Limburg-Stirum entretient la Section d'une visite récente qu'il a faite aux *Musées de Bucarest.*

Jeudi 7 avril 1910. — La Section procède au renouvellement de son bureau. Sont nommés :

Président : le R. P. Bolsius, S. J.
Vice-Présidents : M. le baron Greindl.
M. le chanoine Grégoire.
Secrétaire : M. Van Ortroy.

La Section décide de faire une visite au *Musée colonial de Tervueren,* dans le courant de juin.

Le R. P. Van den Gheyn fait connaître aux membres quelques particularités de la *Carnegie Institution* de Washington. Cette communication a paru dans la REVUE DES QUESTIONS SCIENTIFIQUES, livraison d'avril 1910.

L'influence de l'enseignement des sciences naturelles dans la vie publique fait l'objet, de la part de M. H. Lebrun, d'une communication qui donne lieu à une longue discussion — celle-ci sera reprise à une prochaine séance — à laquelle ont pris part MM. De Wildeman, Proost, Mansion.

Une étude de M. le chanoine Bourgeat *Sur le facies du Givétien* est soumise à l'examen de deux commissaires : M. le professeur Kaisin, et M. le baron Greindl.

M. Fernand Meunier fait quelques remarques *Sur les Stratiomyidae de l'ambre de la Baltique.*

Dans ses remarquables recherches sur les diptères inclus dans cette résine, le Prof. H. Loew mentionne, en 1850, qu'il n'a jamais trouvé de notacanthe dans la reine des résines. En 1895, feu le D^r Helm, de Dantzig, a observé un spécimen de cette famille du genre Beris Latreille. Il est regrettable que Helm n'ait pas donné la diagnose de cette mouche, ni un dessin des antennes, des ailes et de l'écusson.

Notre collègue a décrit, en 1908, dans les ANNALES DE LA SOCIÉTÉ (*), le premier Stratiomyidae de succin.

Il se groupe avec les Hermetiinae Brauer. Par le chète bifide des antennes, le nouveau genre Hermetiella (H. bifurcata) se sépare de toutes les espèces connues.

C'est en classant plus de 700 inclusions de mouches de l'ambre que M. F. Meunier a eu la bonne fortune de rencontrer un autre genre de Stratiomyidae à troisième article des antennes de six divisions, avec le chète composé de deux articles.

Par l'ensemble des caractères, ce diptère appartient au genre Cacosis Walker dont les espèces ont les yeux entièrement nus. Les Pelagomyia ont ces organes pubescents et sont de moyenne taille; les Chrysochlora sont de grandes mouches avec le chète des antennes court. A ne considérer que la forme du corps, il est préférable de ranger ces métaboles parmi les Clitellarinae comme le fait l'éminent diptériste américain M. Williston (**) et non avec les Sargomorpha comme l'indique feu Brauer (***).

Notre collègue dit qu'au point de vue géographique l'étude des types inclus est très instructive. En effet, les Beris sont communs aux faunes paléarctique et néarctique, les Cacosis ont des espèces néotropicales et d'autres habitent les États-Unis ; quant au genre Hermetiella, il semble être spécial à la faune du succin de la Baltique.

M. Fernand Meunier a soin de dire que les documents connus sont trop peu nombreux pour apprécier les liens de parenté des notacanthes fossiles avec les espèces des régions fauniques actuelles.

M. Fernand Meunier fait quelques remarques concernant *Un nouveau Paléodictyoptère du terrain houiller de Commentry.*

Ce curieux insecte (Platyptéride Brongniart) a été trouvé parmi

---

(*) T. XXXII, pp. 8-9 (tiré à part), fig. 11-13.

(**) *Manual of North American Diptera.* Third Edition, pp. 170-171. New-Haven, 1908.

(***) *Versuch einer Characteristik der Gattungen der Notacanthen u. s. w. Denkschrift Mathem. Naturw. Kaiserl. Akademie,* p. 84 (28) ; Wien, 1882.

un très grand nombre d'empreintes de Blattidae. Par le contour alaire et l'ensemble de la nervation cet archaïque articulé se groupe dans le genre Borrea Brongniart. On sait que ce savant paléontologiste était enclin à croire que la partie basale de Borrea Lachlani n'appartenait peut-être pas au même insecte. L'examen du nouveau fossile se classant dans le même genre prouve que l'interprétation de feu Ch. Brongniart était exacte.

Le nouveau paléodictyoptère *Borrea Boulei* (en l'honneur de M. le Prof. M. Boule du Muséum de Paris) est une des plus intéressantes formes de Commentry, car la sous-costale s'anastomose au radius et non au bord costal, comme c'est le cas chez la majeure partie des insectes.

Au premier examen, on est tenté d'identifier cette espèce à Borrea Lachlani Brongniart. Elle en est cependant bien distincte par la très longue fourche de la troisième nervure (première de Brongniart) du secteur du radius.

La bonne conservation de l'empreinte de Borrea Boulei permet de décrire le détail de la disposition des nervures sur cette partie du champ de l'aile.

M. F. Meunier annonce la découverte, dans le copal récent de Madagascar, d'une *Nouvelle espèce de Coniopterygidae*. Ces très minuscules bestioles n'attirent guère l'attention des chercheurs qui s'intéressent cependant aux articulés inclus dans le copal.

A la séance du mois d'octobre 1909, notre collègue a déjà signalé la présence d'un autre Névroptère de cette famille, Coniopteryx Enderleini, du copal récent de Togo. La nouvelle forme se classe irrécusablement dans le genre Semidalis Enderlein, elle est bien distincte de S. africana et de S. fülleborni Enderlein; Comme chez Coniopteryx Enderleini, la nouvelle espèce a aussi des antennes composées de 30 articles.

Avec Coniopteryx tumidus, Hagen, du succin de la Baltique, la littérature concernant les Coniopterygidae des résines se résume donc à trois espèces.

M. Meunier propose de nommer ce Coniopterygidae Semidalis *copalina*.

Pour finir M. Fernand Meunier dit que les fabriques de vernis détruisent annuellement une foule d'insectes tels que des microhyménoptères, des micro-diptères et un grand nombre d'acariens très intéressants à connaître au point de vue des comparaisons fauniques.

Il est donné communication à la Section d'une *Carte fluviale de la Lukenié* (Congo belge), levée et dressée par M. Denis Baudhuin, et présentée, avec une réduction, par M. E. Viaene. Une décision interviendra ultérieurement au sujet de la publication de cet intéressant document.

Quatrième section

La section s'est réunie le mercredi 6 avril, à l'issue de l'Assemblée générale. Des membres d'autres sections et des amis de la Société scientifique s'étaient joints à nous pour entendre la lecture du rapport du R. P. L. Boule S. J., professeur de sciences biologiques à la Maison d'Études de Gemert (Hollande), *Sur la Philosophie dans ses rapports avec les Sciences biologique et médicale.* Voici le texte de cette importante étude.

C'est un très grand honneur pour moi, Messieurs, d'être admis à prendre la parole devant vous. Vous trouverez peut-être que c'est aussi de ma part une bien grande audace, et je n'y contredirai point ; mais j'espère que vous m'excuserez de n'avoir pu résister à la trop aimable insistance de votre distingué Secrétaire.

J'aborde immédiatement mon sujet. Le programme de cette réunion vous en a déjà fait connaître les principales idées. Je vous parlerai de la philosophie considérée dans ses rapports avec les sciences biologiques et médicales.

Par *biologie,* j'entends ici l'ensemble des connaissances cytologiques, histologiques, anatomiques, physiologiques, envisagées au point de vue normal, qui constituent la base indispensable de toute formation médicale sérieuse, les sciences médicales elles-mêmes n'étant d'ailleurs pas autre chose que de la biologie pathologique.

Quant à la *philosophie,* elle est la science qui doit donner la dernière réponse aux derniers « pourquoi ? » et aux derniers

« comment ? » de l'esprit humain. C'est dire qu'elle étudie les êtres dans leurs principes premiers et leurs causes premières. C'est assez pour chaque science particulière de connaître la cause immédiate et prochaine des phénomènes dont l'étude constitue son objet propre et, si la curiosité humaine s'arrêtait là, il n'y aurait pas de philosophie. Mais les causes prochaines ont elles-mêmes des causes, et l'on n'a pas épuisé tout ce qu'on peut savoir d'un être quand on ne connaît de lui que ce qu'il est. Or, tant que le dernier mot n'a pas été dit, l'esprit de l'homme n'est point satisfait. Il veut savoir d'un être, en plus de ce qu'il est, d'où il vient et où il va ; il veut le saisir, et dans son essence, et dans son origine, et dans sa destinée, tout aussi bien que dans les lois qui règlent son activité normale ou anormale. Ainsi — il ne faut pas que le mot vous effraie, car c'est un des vôtres, Claude Bernard, qui l'a dit — « la métaphysique tient à l'essence même de notre intelligence ».

S'il fallait préciser encore ces notions préliminaires, je vous dirais dès maintenant que la philosophie dont j'entends parler est évidemment celle qui admet la légitimité d'une science du suprasensible. Une philosophie qui ne voudrait voir dans le monde que de la matière ou des modifications de la matière laisserait bien des « pourquoi ? » sans réponse et, en fait, jamais l'homme n'a pu trouver, dans des systèmes de ce genre, de solution qui coupât court à toute question ultérieure. Ce n'est pourtant pas que j'estime qu'il puisse exister une philosophie qui ne laisse subsister aucun mystère. Mais, si le mystère est l'aboutissement fatal de toute connaissance humaine, on peut, dans un système philosophique, le faire intervenir plus ou moins vite, et si vous pensez que dans certaines questions la philosophie spiritualiste ne l'invoque pas assez tôt, il est tout aussi vrai que le positivisme et le matérialisme l'introduisent parfois prématurément, ce qui est beaucoup plus grave.

Enfin, Messieurs, si je vous parle de la philosophie, et de la philosophie spiritualiste, dans ses rapports avec les sciences qui ont fait et qui font encore l'objet de votre étude, j'entends bien qu'il s'agit ici de rapports bienveillants. Mais voici que précisément la question se pose de savoir si de tels rapports peuvent exister, et si ce n'est pas plutôt d'antagonisme qu'il faudrait parler. C'est un point qu'il convient d'examiner tout d'abord, et je place les quelques réflexions que je me permets de vous soumettre à ce sujet, sous le titre :

I. — LES GRIEFS DES SCIENCES BIOLOGIQUES ET MÉDICALES

Je les réduis à trois : la servilité conservatiste de la philosophie, l'infécondité de sa méthode, et le caractère anti-scientifique de ses tendances.

Je doute fort, Messieurs, qu'il existe un seul traité moderne de médecine où ne soit fait, sous une forme ou sous une autre, le procès de l'animisme, du vitalisme, du spiritualisme, du mysticisme, de l'apriorisme, de la métaphysique et de la théocratie — car on a parlé d'une médecine théocratique — expressions qui signifient toutes, plus ou moins heureusement, dans la pensée de ceux qui les emploient, l'ensemble des doctrines qui caractérisent la vieille philosophie catholique. Qu'y a-t-il donc, dans cette vieille philosophie, de si répréhensible, et, en résumé, que lui reproche-t-on ?

On lui reproche, d'abord, ce que nous pourrions appeler sa *servilité conservatiste.*

1° *Servilité conservatiste*

Le mot de « conservatisme » a le privilège de sonner toujours très mal aux oreilles de certaines gens. Il est, pour eux, synonyme d' « obscurantisme ». La servilité conservatiste, c'est le respect béat du passé, c'est l'idolâtrie de l'autorité, c'est le fétichisme du maître... Cette servilité niaise aurait eu, dit-on, pour résultat, d'arrêter, des siècles durant, l'essor des sciences humaines, en immobilisant les intelligences dans des doctrines, dans des formules, dans des mots intangibles.

Le reproche n'est pas d'hier. Molière, pour ne pas chercher plus loin dans le passé, l'exprime déjà dans son « Malade imaginaire », et beaucoup plus spirituellement qu'on ne le fait de nos jours. Diafoirus, faisant l'éloge de son fils, jeune docteur en médecine tout frais sorti des mains de la Faculté, déclare, avec un enthousiasme un peu benêt : « Mais, sur toute chose, ce qui me plaît en lui, et en quoi il suit mon exemple, c'est qu'il s'attache aveuglément aux opinions de nos anciens et que jamais il n'a voulu comprendre ni écouter les raisons et les expériences des prétendues découvertes de notre siècle touchant la circulation du sang et autres opinions de même farine. »

Et il est bien vrai, Messieurs, que l'argument du *Magister dixit* a trop souvent tenu lieu d'études et de recherches personnelles. Mais ce n'est point là un défaut qui appartienne en propre à notre philosophie. Il y eut toujours des chefs d'école, un peu dans tous les genres de sciences. Ces hommes éminents furent des initiateurs ; ils voulurent sortir des voies communes et frayer des chemins nouveaux à la pensée humaine ; ils eurent le souci et la passion des investigations objectives, personnelles, originales. Mais après eux, leurs disciples ne firent guère que les répéter, plus ou moins fidèlement, sans rien ajouter et sans rien contrôler. Notre siècle, siècle d'indépendance intellectuelle pourtant et de libre recherche, souffre de ce mal autant qu'en a souffert le moyen âge, et la quantité d'assertions fausses qu'avec la meilleure foi du monde se sont transmises de l'un à l'autre les manuels et les traités modernes d'anatomie, d'histologie et de physiologie est relativement considérable. Il ne faut pas chercher longtemps pour en trouver des exemples. Si vos études vous ont conduits à faire un peu de technique microscopique, vous aurez eu peut-être l'occasion de le constater par vous-mêmes. Voici, par exemple, un cas, qui est des plus simples. Ranvier, dans son *Traité technique d'histologie,* parlant du noyau des hématies des batraciens, le signale comme ayant une structure homogène ; tout au plus apparaît-il un peu granuleux, sous l'action de divers réactifs (1). Quelques années après, Mathias Duval publie son *Précis d'histologie.* Il affirme à son tour que les hématies des batraciens ne possèdent pas de noyau structuré, mais « un noyau pour ainsi dire momifié, dit l'auteur, qui n'est plus capable de présenter le processus de caryocinèse ; et, en effet, on ne voit pas, ou on ne voit que très rarement les globules rouges de la grenouille adulte se multiplier par division (*) ». L'explication est ingénieuse ; mais, malheureusement, fort mal fondée : les hématies de la grenouille adulte présentent un réticulum nucléaire, comme n'importe quelle cellule normale, et Mathias Duval aurait assurément révélé ce réticulum, s'il avait eu la moindre envie de vérifier le fait. Il a préféré s'en tenir à l'opinion reçue : la fascination du maître !

---

(1) Ranvier, *Traité technique d'histologie*, 1889, p. 161.

Dans un autre ordre d'idées, pensez-vous, Messieurs, que tous les médecins qui ont admis et soutenu le brownisme, par exemple, se soient donné la peine de se rendre compte par eux-mêmes de l'existence ou de la non-existence des *incitabilités* spécifiques des divers éléments anatomiques, incitabilités dont la science, aujourd'hui, ne veut plus entendre parler ?... Et n'en est-il pas de même de toutes les doctrines médicales qui se sont succédées au cours des siècles ?... Il en sera d'ailleurs ainsi pour toutes celles qui sont encore à naître, et cela, pour la raison bien simple qu'il n'y a pas d'homme, à tel point supérieur, qu'il ne soit jamais réduit, dans quelque ordre d'idées, à accepter de confiance les affirmations d'autrui. Les médecins n'échappent pas plus que les philosophes à cette nécessité de toute vie intellectuelle. Sciences biologico-médicales et philosophie peuvent donc se donner, sur ce terrain, le baiser de la réconciliation.

Mais on articule un autre grief : l'*infécondité,* au point de vue des sciences, *de l'esprit et de la méthode philosophiques.*

2° *Infécondité de la méthode*

Il y a quelques années déjà, Colonna d'Istria écrivait, dans la Revue de Métaphysique et de Morale : « Les grandes écoles médicales du XVIIIe siècle n'étaient pas parvenues à séparer les problèmes médicaux des questions proprement philosophiques ; de là l'incohérence qui rend si malaisée pour nous la lecture des œuvres d'un Sauvage, d'un Stahl ou d'un Barthez. Mais, dans les dernières années du XVIIIe siècle, nous voyons surgir une génération de médecins français qui affectent à l'égard de la pure déduction une défiance toute nouvelle, déclarant vaine l'étude des causes premières et n'accordant de valeur qu'aux faits. Or il se trouve

---

(*) Mathias Duval, *Précis d'histologie*, 2e édition, 1900, p. 621.

que tous ces médecins sont des disciples de Condillac dont la méthode, imparfaite à tant d'égards, les a séduits par sa grande clarté (*). » M. d'Istria peut donc intituler son article : *Ce que la médecine expérimentale doit à la philosophie ;* mais il s'agit de la philosophie de Condillac ; *l'autre,* c'est la philosophie de la pure déduction, la philosophie qui a commis la grave erreur d'accorder de la valeur à autre chose qu'à des faits.

Qui donc nous fera croire que la médecine ait attendu, pour s'occuper de l'observation des faits, que Condillac révélât au monde sa méthode, « imparfaite à tant d'égards », comme on veut bien l'avouer ?... Cet arriéré de Thomas Diafoirus lui-même, encore sous la tutelle déprimante de la philosophie déductive, n'est pas tellement absorbé par l'étude des causes premières, qu'il ne fasse de temps à autre quelque incursion dans le domaine expérimental. Ne s'avise-t-il pas, le malheureux, de dire à celle qu'il est venu demander en mariage, et qu'il aborde pour la première fois : « Avec la permission aussi de Monsieur (le père de la jeune fille en question), je vous invite à venir voir l'un de ces jours, pour vous divertir, la dissection d'une femme sur quoi je dois raisonner (**). »

Comme début d'amoureux, c'est évidemment très gauche ; mais ce n'est pas ce point de vue qui nous intéresse, et je trouve, pour ma part, le morceau fort instructif. On dissèque et on raisonne ; on observe les faits et on les discute : quoi de plus logique ? La méthode de Condillac serait-elle meilleure ?... D'Istria prend soin de nous la résumer. C'est la méthode analytique. Notre connaissance commence nécessairement par la perception d'objets particuliers, individuels, bien concrets, bien déterminés. Sans doute, la première vue est bien une vue d'ensemble ; mais aussi n'est-ce point encore la *connaissance* au vrai sens du mot. Les éléments de cette perception primordiale, externe ou interne, nous apparaissent vagues, confus, indécis. Notre esprit a besoin de les examiner un à un, de les démêler, de les distinguer, de les délimiter, de les préciser. Ces éléments sont simultanés dans l'ordre objectif

---

(*) REVUE DE MÉTAPHYSIQUE ET DE MORALE : *Ce que la médecine expérimentale doit à la philosophie*, 1904, p. 186.

(**) *Le Malade imaginaire*, acte II, sc. VI.

de leur existence : ils sont successifs dans l'ordre subjectif de notre connaissance. Mais quand on est arrivé à les connaître tous individuellement, l'esprit les rapproche selon l'ordre de leurs rapports réciproques et recompose ainsi l'ensemble qu'il a dû tout d'abord disséquer et émietter. Arrivé au terme de ses opérations, il a donc, comme au début, une vue en bloc de l'objet de sa connaissance ; mais cette vue n'est plus, comme la première, une vue imprécise et trouble : les diverses parties du tout se présentent avec leur relief propre, mais aussi avec leurs connexions mutuelles, d'où résulte l'harmonie de l'ensemble. Ainsi, parti de l'analyse, l'esprit aboutit à la synthèse.

Vous vous demandez, Messieurs, ce qu'il y a de si original dans cette méthode, qui ait bien pu séduire les Pinel, les Cabanis et les Bichat ? Je me le demande aussi. Mais ce qui est surtout à remarquer, c'est cet aveu de M. d'Istria : « Il est vrai que dans une telle doctrine la synthèse se confond avec la déduction, reposant comme elle sur des principes abstraits, dont on aurait méconnu l'origine et la valeur empiriques et dont on se flatterait de tirer par un artifice de logique des vérités que l'analyse seule permet de recueillir. » Nous voilà donc ramenés à cette déduction pour laquelle les médecins de la fin du XVIII^e siècle manifestèrent « une défiance toute nouvelle ». Ce n'était vraiment pas la peine de passer par Condillac pour en arriver là.

Si, par déduction, on entend une méthode scientifique *à priori*, au sens strict, qui refuse absolument de s'appuyer sur l'expérience, qui ne veut partir que de notions purement abstraites, comme celle de cause, de substance, et d'autres — si tant est qu'on puisse avoir de telles notions indépendamment de l'expérience — une telle méthode peut bien être celle d'un Wolf, d'un Hegel ou d'un Spinoza ; mais ce n'est pas celle de la philosophie scolastique. Celle-ci a bien compris et suffisamment affirmé que c'était une nécessité de notre nature, sensible en même temps qu'intellectuelle, que rien ne peut arriver à notre intelligence que par la voie des sens. Nous commençons par constater des faits, soit des faits d'ordre intime, d'ordre psychologique, des faits de conscience, modifications diverses de notre moi ; soit des faits du monde extérieur, objets propres de nos facultés sensorielles spéciales. La méthode expérimentale n'est pas une méthode facultative ; ses données se retrouvent, plus ou moins immédiatement, mais nécessairement, à la base de toutes nos connaissances.

Les sciences biologico-médicales n'ont rien à perdre à prendre contact avec une philosophie qui se fonde sur de pareils principes. Ce n'est point là la philosophie de l'*à priori*. L'*à priori*, Messieurs, c'est dans la philosophie matérialiste, philosophie actuellement en honneur dans presque toutes les écoles médicales, que je le trouve. Le matérialisme n'est pas une donnée de l'expérience, et aucune des tentatives faites jusqu'ici pour le tirer logiquement des faits, n'a réussi. Il faut pourtant l'admettre, à moins qu'on ne veuille, en biologie, tomber dans la doctrine « aujourd'hui justement délaissée, du vitalisme ancien », pour me servir des expressions de M. Prenant (*), car il n'y a pas de doctrine moyenne entre ces deux doctrines. Et il n'est pas douteux, en effet, qu'un nombre considérable de biologistes et de médecins qui se disent matérialistes, n'ont d'autre raison de l'être que celle de ne pas être vitalistes. Que si vous leur demandez pourquoi ils ne veulent pas être vitalistes, je doute fort qu'ils soient à même de vous donner de leur attitude philosophico-biologique une raison scientifique. Le meilleur langage qu'ils puissent tenir est encore celui de M. Prenant : « Pour en être réduit, dit-il, à l'hypothèse vitaliste ou même à l'une des théories néovitalistes, et pour se contenter d'invoquer l'un des principes occultes du vitalisme, avéré ou latent, il faudrait désespérer de pouvoir expliquer jamais d'une façon entièrement satisfaisante un quelconque des phénomènes vitaux dont le protoplasme est le siège, avec le seul secours des lois physiques. » Or, comme Prenant n'invoque aucun des principes occultes du vitalisme, il ne désespère évidemment pas de pouvoir expliquer un jour n'importe quel phénomène vital, avec le seul secours des lois physiques. Quelle raison a-t-il donc d'espérer ? car, il l'avoue, et ce sont ses propres paroles : « cette explication, maintes fois tentée, n'a jamais été, il est vrai, donnée ni complète, ni parfaite (**) ». La raison d'espérer, c'est que bien des choses dont on avait pendant longtemps regardé la réalisation comme impossible, ont enfin été réalisées. Avec une semblable

---

(*) *Traité d'histologie*, par A. Prenant, P. Bouin et L. Maillard, 1904, I, p. 14.
(**) *Ibid.*

raison, on pourrait évidemment prouver qu'il n'y a rien d'irréalisable. Mais M. Prenant s'en contente et nous dit, sur un ton satisfait, que « les essais théoriques d'explication qui ont été déjà tentés, les expériences qu'on a déjà faites, pour rendre compte des phénomènes vitaux, sont encourageants (*) ». Kossel a déjà réalisé des substances « que l'on peut considérer comme les plus simples des matières albuminoïdes » ; la synthèse des matières protéiques « sera certainement une acquisition de demain » ; la synthèse des substances protoplasmiques plus élevées encore « ne peut donc être une impossibilité de l'avenir ». Vous voyez comme toutes ces certitudes sont encourageantes !... Et quand la chimie biologique aura réalisé toutes ces belles espérances, sera-t-elle enfin, en état de nous faire de la substance vivante sur commande ? Oh ! non, ce serait aller beaucoup trop vite en besogne. Écoutez encore Prenant : « De même que l'organisation actuelle du protoplasme a une histoire extrêmement longue, de même la réalisation d'un protoplasma (d'une substance vivante) est encore, à cause de sa difficulté, très éloignée de nous. Issu des matières albuminoïdes, le protoplasma a mis extrêmement longtemps à se perfectionner insensiblement et à devenir tel que nous le voyons actuellement. Pourquoi, quand il est prouvé que la phylogénie du protoplasme a été si longue (je vous prie de remarquer que cela n'est pas prouvé) exige-t-on de l'ontogénie qu'elle soit immédiate (**) ? »

En résumé, Messieurs, à l'heure actuelle, le matérialisme biologique se fonde sur ce fait qu'on a réussi à obtenir quelque chose qu'on peut regarder comme une sorte d'albumine embryonnaire, et sur cette hypothèse absolument gratuite, et qui est d'ailleurs la chose même qu'il s'agit de démontrer, que la vie n'est qu'un des stades avancés — le plus avancé si l'on veut — de l'évolution de la matière. On déclare, sans plus, que le matérialisme s'impose, et, le supposant prouvé, on part de là pour raisonner, par exemple, sur la constitution ultra-microscopique des chromosomes nucléaires, avec une assurance vraiment déconcertante quand on songe qu'elle est le fait d'hommes qui en appellent à tout propos à

(*) *Traité d'histologie*, p. 15.

(**) *Ibid.*, p. 21.

seule expérience et qui, à l'exemple de l'illustre médecin Broussais, ne veulent pas admettre l'âme, sous prétexte qu'ils ne l'ont jamais trouvée au bout de leur scalpel. Je ne vois pas trop, après cela, ce que les sciences biologiques et médicales peuvent bien reprocher à la méthode scolastique.

Il ne m'en coûte nullement, d'ailleurs, d'avouer que si cette méthode est irréprochable, l'usage qu'on en a fait a pu prêter à de très justes critiques. La philosophie, tributaire des faits, n'est pourtant pas une science de pure expérimentation. Elle perd vite pied avec la terre et, des hauteurs où elle s'élève, elle risque fort de ne plus voir le monde des réalités sensibles d'où elle est partie. La vie intellectuelle, dans ces hautes régions, se réduit presque nécessairement à des manipulations de concepts purement métaphysiques, dont le maniement est extrêmement délicat. Le moindre danger que l'on court, à ces altitudes, est d'en arriver vite, à moins d'une circonspection qui fut malheureusement trop rare, à jongler avec des mots vides. Ce jeu peut n'être, dans certaines conditions, qu'un passe-temps légèrement enfantin ; et, en vérité, nous nous étonnons à juste titre du nombre considérable de questions parfaitement puériles auxquelles la philosophie a fait l'honneur de discussions aussi sérieuses dans la forme que vaines dans le fond et stériles dans les résultats. Mais beaucoup plus déplorable fut une autre tendance qui entraîna la philosophie à vouloir donner sur toutes choses le mot définitif, la solution dernière, et à ne pouvoir jamais se résoudre à dire : je ne sais pas.

Sans doute, quand nous revenons, par exemple, sur les explications de la philosophie en matière biologique, nous aurions tort de nous étonner de certains déficits qui ne tiennent, somme toute, qu'à un outillage scientifique nécessairement défectueux et incomplet : autant vaudrait reprocher à saint Thomas de n'avoir jamais tenté d'ascension en aéroplane. Mais ce que nous pardonnons moins aisément aux grands maîtres de la scolastique, c'est de n'avoir pas compris, en matière biologique et médicale, que l'anatomie et la physiologie ne sont pas une dépendance de la métaphysique, et qu'il y a des questions de structure et de fonctionnement des organes qui ne se tranchent que par la méthode expérimentale.

Tout cela est vrai, Messieurs, mais il reste que l'abus que l'on peut faire d'une chose ne suffit pas à condamner la chose elle-même : ce n'est point parce qu'un praticien aura employé le chloroforme à dose mortelle que la chirurgie renoncera à l'usage des anesthésiques.

Abordons un troisième et dernier grief : une sorte d'*incompatibilité de tendances* entre la philosophie et les sciences.

3° *Caractère anti-scientifique des tendances*

On ne doute pas, dans certains milieux, que la philosophie spiritualiste ne soit, par tempérament natif, ou par habitude, ennemie de la recherche scientifique, ou que, du moins, elle ne soit, par instinct, en défiance contre elle. Or, si vraiment cet antagonisme existe, ce n'est pas que la philosophie soit anti-scientifique, mais bien parce que la science — certaine science — est anti-philosophique.

Si la science consiste dans l'observation et l'analyse des faits, et leur réduction à des lois plus ou moins générales, plus ou moins fixes et rigoureuses, il est évident, en effet, par ce que j'ai déjà dit, que la philosophie, même spiritualiste, ne saurait être anti-scientifique. Son objet, il est vrai, est la connaissance des choses par leurs premières causes et leurs premiers principes ; mais elle ne peut pourtant pas se faire de ces premières causes et de ces premiers principes, des idées de pure fantaisie, sans aucune relation, sans aucun lien avec la réalité. Si elle domine toutes les sciences, et de très haut, cela ne lui donne pas le droit de les ignorer, et jamais elle n'a revendiqué un droit pareil. Qu'elle s'occupe d'être, de substance, de vie, d'âme, et même de Dieu, elle relève, dans une certaine mesure, des sciences particulières, qui lui fournissent la matière première de ses constructions transcendantales, et elle doit pouvoir se rendre compte de la qualité des matériaux qu'elle emploie dans ces constructions. Cela tendrait peut-être à prouver qu'une formation scientifique sérieuse est nécessaire à tout philosophe. J'admets volontiers la conclusion. Faute de cette formation, en effet, le philosophe devra nécessairement s'en remettre aux lumières d'autrui. S'il est prudent, il s'en tiendra à de très larges généralités, car, à vouloir entrer dans les détails, il montrerait bien vite qu'il marche sur un terrain qui ne lui est pas familier. Mais ces généralités elles-mêmes, ces conclusions qui résument les principales données d'une science, il sera dans la nécessité de les accepter sans contrôle. Or, cela est fort dangereux. C'est évident, Messieurs, pour qui connaît les savants d'un peu près, pour qui a été amené, par les exigences de ses recherches personnelles, à vérifier quelques-unes des assertions de ceux-là même dont l'autorité est la plus incontestée.

Ce n'est pas que je veuille reproduire ici le fameux réquisitoire prononcé jadis par Brunetière, sous le titre *La banqueroute de la science.* Le mot fut malheureux. Il n'y a jamais eu de banqueroute de la science. La science a toujours été fidèle à ses engagements. Il n'y a eu, en fait de banqueroute, que celle de certains savants qui ont, sans aucun mandat, pris au nom de la science des engagements qu'ils n'ont pas tenus. Cela m'amène à envisager un autre côté du grief dont je parle maintenant.

Pour prouver que la philosophie spiritualiste est anti-scientifique, on parle des erreurs et des naïvetés de la scolastique. Assurément, si nous demandions qu'on nous cite des faits, on n'aurait que l'embarras du choix ; mais cela prouverait tout au plus que la philosophie fut — et elle l'est sans doute encore trop — a-scientifique. Il y eut ignorance ; il n'y eut pas hostilité.

Nous savons bien, d'autre part, que tout homme, de soi, est faillible, et qu'il est bien peu de savants qui n'aient, à un moment ou à l'autre de leur carrière scientifique, avancé des propositions qu'ils voudraient bien n'avoir jamais écrites, ou commis quelque erreur professionnelle qui pèse un peu sur leur mémoire. Vous avez lu peut-être dans la PRESSE MÉDICALE (numéro du 19 juin dernier), la chronique de Helme sur la méprise de l'illustre médecin de Bordeu, racontée par Jérôme Coignard. Il s'agit de « l'aventure survenue hier à M. de Bordeu, qui est de grand savoir, et le seul idoine à guérir Monsieur, frère du Roi, de ses ignobles indigestions. Donc, « on » rapporta que mandé pour opérer une grande dame d'une maladie des rognons, il les avait enlevés tous les deux. On indiquait l'heure : quelle précision ! le lieu : quelle certitude ! deux rognons enlevés : quelle affreuse chirurgie ! Il cherchait le troisième : quelle aberration ! »

Je ne prétends pas que la recherche du troisième rognon marque un stade de l'évolution des sciences médicales. Mais cela serait, qu'il n'y aurait point lieu, me semble-t-il, d'en faire un crime à la médecine, pas plus qu'on ne peut en faire un à la philosophie du moyen âge d'avoir ignoré, par exemple, des détails de structure cytologique que le microscope seul a pu nous révéler. Ne soyons pas trop méprisants : la scolastique pourrait nous rappeler, à nous, biologistes, petits ou grands, certaines choses dont nous n'avons pas lieu d'être fiers.

Une des questions qui ont le plus préoccupé la philosophie antique et médiévale, question qui touche à la fois à la médecine, à la biologie, à la philosophie, et même à la théologie, est la question de la transmission de la vie. Les scolastiques, à la suite d'Aristote, ont dit là-dessus des choses fort réjouissantes. Nous nous demandons comment de pareilles idées ont pu germer dans de pareilles intelligences, même en tenant compte du fait que la microscopie n'avait pas encore révélé l'existence des éléments sexuels ; nous nous demandons comment un saint Thomas a pu en venir à admettre, sans la moindre hésitation, l'influence des corps célestes dans la physiologie de la fécondation, et à prendre à son compte cette étrange formule : « *Homo generat hominem, et sol* (*). »

Toutefois, à nous en tenir au fait capital de la fonction reproductrice, l'explication proposée par les anciens scolastiques fut peut-être la plus sensée qui pût être formulée en ce temps-là. A l'encontre de l'opinion qui ne voyait dans la semence femelle (il n'était pas encore question de *cellules sexuelles)* qu'une simple substance nutritive, quelque chose comme un bouillon de culture pour la semence mâle, il semble bien qu'ils aient soutenu que la mère prenait une part beaucoup plus directe à la formation du fœtus. Ce sera cette idée qui finira par triompher, mais après des oppositions qui ont eu leur moment de célébrité, et que ne devraient pas oublier ceux qui sont si enclins à exalter la science et à ridiculiser la philosophie. Ce ne sont pas des scolastiques qui ont émis l'idée que les gamètes mâles étaient des animalcules complets, vivant en colonies dans les organes génitaux de l'homme : ce sont des savants. Ces savants, armés du microscope, ont fini par voir dans chacun de ces animalcules, un petit homme « homun-

---

(*) *Summa Theol.*, I, qu. CXVIII, art. 1.

culus », parfaitement constitué, dont les organes n'avaient plus qu'à se développer en taille, et dont les testicules, en particulier, contenaient déjà d'autres petits hommes, de telle sorte que tous les représentants futurs de l'espèce humaine devaient être contenus dans les organes générateurs du premier homme, à moins qu'on ne préférât, avec les *ovistes*, les placer dans les organes générateurs de la première femme.

Quand on s'aperçut de la méprise, le désappointement et le dépit furent si vifs que Bichat, vous le savez, en prit la résolution de ne plus toucher à un microscope.

Il me semble, Messieurs, que lorsqu'on a de telles aberrations à se faire pardonner, on est mal venu à chercher querelle à Raban Maur ou à saint Thomas. Pourquoi d'ailleurs n'aurions-nous pas pour les erreurs scientifiques des philosophes, un peu de cette indulgence surabondante que nous avons pour les erreurs, bien moins excusables, des savants ?...

Vous connaissez peut-être l'histoire de la résistance héroï-comique des membres de l'Académie des Sciences de Paris, qui se refusèrent, pendant si longtemps, à admettre le fait de la chute des aérolithes. François Arago, dans son *Astronomie Populaire*, nous en a conservé le souvenir. « Les Chinois, écrit-il, croyaient que les apparitions des aérolithes étaient liées aux événements contemporains, et c'est pour cela qu'ils en formaient des catalogues. Je ne sais pas, au reste, si nous aurions trop le droit de rire de ce préjugé. Les savants d'Europe étaient-ils plus sages lorsque, se refusant à l'évidence des faits, ils affirmaient que des chutes de pierres, venant de l'atmosphère, étaient impossibles ? L'Académie des Sciences ne déclarait-elle pas, en 1769, que la pierre ramassée au moment de sa chute, près de Lucé, par plusieurs personnes qui l'avaient suivie des yeux jusqu'au point où elle atteignit le sol, n'était pas tombée du ciel (*). »

Or, J. Janin, rappelant ces faits dans un article de la REVUE DES DEUX MONDES, écrivait : « Les sociétés savantes, on doit le dire à leur honneur, ont exigé des preuves positives avant d'admettre, comme étant réelles, les pluies de pierres météoriques (**). »

(*) *Astronomie populaire*, t. IV (œuvre posthume), 1860, p. 204.
(**) REVUE DES DEUX MONDES, 1864, livraison du 15 juillet, p. 497.

Ce « à leur honneur » n'est-il pas délicieux ?... A la place de l'Académie des Sciences, mettez un collège de cardinaux : nous aurions eu sur les bras une autre affaire Galilée !... Mais les sciences bénéficient manifestement d'un traitement de faveur, et ce qu'il y a, dans cette situation, de particulièrement odieux, c'est que parfois ceux qui se montrent les plus intraitables et les plus rigoureux, je dirai les plus hargneux, à l'égard de la philosophie, sont ceux-là même qui sont les plus indulgents pour leurs propres conceptions scientifiques. Pour préciser, voici un cas pris parmi beaucoup d'autres. En 1908, a paru la vingt et unième édition du *Dictionnaire de médecine* de Littré, mis au point par le Dr Gilbert. C'est un ouvrage très estimé. Il ne laisse échapper aucune occasion de maltraiter le spiritualisme. Il est tout à fait dans la mentalité du jour ; il n'admet que ce qu'on peut voir, toucher, ce qui est accessible à l'expérimentation. Le Dr Gilbert, qui est un homme fort sérieux, nous avertit dans la préface qu'il n'aurait pas accepté la responsabilité de donner une nouvelle édition de ce dictionnaire, s'il n'avait trouvé dans le Dr Garnier « le coadjuteur rêvé, c'est-à-dire le savant minutieux, averti et compétent, capable de reviser avec moi, mot par mot, le travail d'autrui, d'y apporter les modifications nécessaires et d'y ajouter un aperçu impartial des acquisitions nouvelles ». Est-ce assez lyrique et rassurant ?... Mais parcourez un peu cette œuvre remarquable, et vous ne tarderez pas à y trouver des affirmations scientifiques vraiment surprenantes. Allez, par exemple, à l'article *sensibilité* ; vous y lirez que « les éléments dans lesquels s'opère, consécutivement à la perception, l'acte dit de pensée ou volition spontanée ou réfléchie, sont des cellules nerveuses multipolaires de l'encéphale en continuité de substance, par l'intermédiaire du cylindre-axe, d'une part avec les nerfs sensitifs, d'autre part avec les nerfs moteurs qui transmettent la volition du centre nerveux aux éléments contractiles ». J'ignore quel est l'auteur de l'article, mais ce qui m'étonne, c'est que des reviseurs minutieux, avertis et compétents, aient pu laissé passer de pareilles choses. Ils auraient dû savoir que la continuité de substance est une question encore discutée, pour ne rien dire de plus, et que jamais aucune cellule pyramidale de l'écorce cérébrale, ni, d'ailleurs, aucune cellule du névraxe, n'a présenté de connexion, par l'intermédiaire de son cylindre-axe, d'une part avec les nerfs sensitifs, d'autre part avec les nerfs moteurs. Ce sont là des connaissances neurologiques élémentaires qu'il n'est pas permis d'ignorer. On ne comble pas de pareilles lacunes en affirmant que la philosophie théologique et métaphysique a fait son temps, qu'il faut renoncer désormais « à la recherche de l'absolu, c'est-à-dire des causes premières et des causes finales, recherche désormais inaccessible et bonne seulement pour occuper l'enfance de l'esprit humain (*) ». Que ces Messieurs renoncent à la recherche de l'*absolu*, s'ils le veulent. Aussi bien, ne tirerions-nous pas grand profit de leurs investigations : ils ont déjà tant de mal à se tenir au courant du *relatif*. D'ailleurs, tout parti-pris de dénigrement à l'égard de la philosophie est profondément regrettable, quelle que soit la valeur scientifique de ceux qui croient pouvoir user d'un pareil procédé. Il n'y a pas beaucoup de grandeur d'âme, ni de largeur d'esprit, dans une telle attitude, et s'il ne nous est pas permis d'y voir de la mauvaise foi, tout au moins pouvons-nous y soupçonner un peu d'ignorance de la question. Il est incontestable, en tous cas, qu'une hostilité de cette nature n'est pas faite pour faciliter les rapports de bon voisinage, et je comprends sans peine, pour ma part, que la philosophie se tienne parfois, à l'égard des sciences biologiques, dans une réserve un peu défiante. Or ce conflit est d'autant plus malheureux, que ce n'est pas seulement de bon voisinage que nous devrions parler, mais d'alliance intime ; j'ai presque envie de dire,de mutuelle compénétration,et peut-être ne trouverez-vous pas ce mot trop déplacé, quand je vous aurai exposé ce qui me reste à vous dire, car pour remplir le programme que je me suis tracé, après vous avoir entretenu des griefs des sciences biologico-médicales, je dois vous parler des services de la philosophie.

II. — LES SERVICES DE LA PHILOSOPHIE

Je ne pourrai guère, Messieurs, sur ce point, que redire très mal ce que vous ont déjà si bien dit, il y a quelques années, deux membres éminents de votre Section : M. le Dr Cuylits, et votre

---

(*) Article *philosophie*.

secrétaire lui-même, M. le Dr Warlomont (*). Que ces Messieurs me permettent de placer sous l'autorité incontestée de leur nom, les quelques observations que je vais vous présenter et que m'ont suggérées leurs remarquables rapports.

Il me semble que la culture philosophique présente pour le médecin un double avantage : le premier regarde sa formation générale ; le second, sa formation spéciale.

1° *Formation générale*

Je n'insisterai pas sur le premier de ces points, qui vous est commun avec tous ceux dont la situation sociale, quelle que soit d'ailleurs leur profession, réclame une culture intellectuelle aussi parfaite que possible.

On a défini l'homme un animal raisonnable, et aussi, un animal qui cherche des causes. La seconde de ces définitions complète ou précise la première : l'homme cherche des causes, je le rappelais au début de cet entretien ; c'est en cela qu'il se montre raisonnable, et plus sa raison progresse, de l'enfance à l'âge mûr, plus aussi grandit en lui le désir, et comme le besoin de connaître des causes. Les réponses dont il se contentait aux toutes premières années de sa vie ne lui suffisent plus à quinze ans, et de proche en proche, à mesure qu'il avance dans la vie ou dans la science, il épuise les diverses séries d'explications dont chacune est la réponse du moment à ses inlassables questions.

Or, ce besoin de savoir, ni la physique, ni la chimie, ni la biologie, ni aucune autre science ne peut l'épuiser. Toutes ces sciences, en effet, constatent des phénomènes ; elles les comparent, elles les classent ; elles déterminent les lois de leur apparition et de leurs divers rapports ; elles peuvent même en signaler la cause : matière ou principe supérieur à la matière ; mais la nature intime de cette cause n'est plus de leur ressort. Et pourtant, cette nature intime, nous voulons la connaître ; nous voulons savoir ce que c'est que la matière, ce que c'est que la vie ; et encore, si cette matière et cette vie s'expliquent par elles-mêmes,

---

(*) Séance de la quatrième section du 26 octobre 1905 (Annales de la Société scientifique, t. XXX, 1re partie).

ou si elles ont leur raison d'être dans un principe transcendant ; et enfin, quel est ce principe, si ce principe existe. La philosophie prétend répondre à ces questions, et par là même elle est une science qui s'impose à notre étude, à considérer simplement en nous l'homme qui a l'ambition légitime d'atteindre au maximum de son développement intellectuel.

Tous, sans doute, ne sentent pas au même degré le besoin d'une solution sur ces points délicats et, parmi ceux que leur curiosité intellectuelle pousse à chercher cette solution, le plus grand nombre ne pourront jamais en faire une étude personnelle. Mais le médecin qui est, de par sa situation même, tenu de posséder une culture très supérieure à la culture commune, et que ses connaissances biologiques préparent d'ailleurs à aborder ces grandes questions, le médecin se doit ce surcroît de développement intellectuel.

Je sais bien que la jeunesse médicale prend plus de plaisir aux sports à la mode qu'à l'étude un peu austère de la philosophie. L'entraînement, d'ailleurs, est général. Je me souviens, à ce sujet, d'une parole que vous me permettrez de vous redire dans toute sa crudité. Prononcée à une distribution de prix, devant des jeunes filles, par un de ces anticléricaux qui se donnent si volontiers les allures d'émancipateurs de l'espèce humaine, elle est de celles qui suffisent à caractériser une époque : « Mesdemoiselles, disait cet éleveur, faites-vous des cuisses ! » L'avenir est là, semble-t-il, pour certains esprits. Le développement physique a pris le pas sur le développement intellectuel et moral. Or ce sera cette jeunesse, masculine ou féminine, à qui aujourd'hui on ne songe qu'à faire prendre du jarret, du poitrail et de l'encolure, qui demain, montée sur le trépied de la science, vaticinera contre le spiritualisme, sans en connaître le premier mot. Il vous appartient peut-être, Messieurs, de réagir contre ces tendances, et par votre exemple, comme par l'autorité que vous pouvez avoir sur les jeunes gens de nos Facultés, d'inspirer aux générations qui montent le goût des hautes études philosophiques.

Nécessairement, du reste, le médecin, précisément en tant que médecin, rencontre la philosophie sur sa route. L'étudier n'est pas seulement pour lui une question de bonne tenue intellectuelle ; c'est aussi une nécessité de métier : la philosophie est indispensable à sa *formation spéciale*.

2° *Formation spéciale*

Théoriquement, les *sciences* ne doivent s'occuper que des phénomènes. Dès qu'elles posent la question de la nature de la substance qui se cache sous les manifestations phénoménales, elles font de la philosophie. A quel point exact de leurs recherches franchissent-elles la passe ? Cela peut être parfois fort difficile à déterminer ; mais là n'est point la question ; ce qu'il nous importe de remarquer, c'est qu'il y a des sciences qui, en fait, la franchissent toujours : c'est le cas de la biologie.

Il y a des êtres que nous appelons *vivants*. Ces êtres présentent des modifications d'un ordre tout spécial : ils se meuvent, ils se multiplient, ils pensent, ils parlent... Tout autant de phénomènes que nous appelons *phénomènes vitaux*. Il est impossible que le biologiste ne se pose pas cette question : quel est le principe qui produit, qui règle ces phénomènes vitaux ? J'ai sous les yeux un organe humain ; cet organe est constitué par des tissus ; ces tissus sont eux-mêmes des agglomérations de cellules ; et ces cellules, enfin, si je les dissèque, pour ainsi dire, chimiquement, se montrent constituées par un ensemble d'éléments constants et d'éléments variables qui ne semblent différer en aucune façon de ceux que je connais déjà comme constitutifs de la matière non vivante. Mais alors, d'où leur viennent, chez les vivants, chez les êtres organisés, ces propriétés spéciales qu'ils n'ont pas dans la matière morte, dans la matière inorganique ?... Aucun étudiant en médecine n'échappe à cette question, et le voilà, du coup, en pleine philosophie biologique.

Et prenez bien garde, Messieurs, que plus il avancera dans cette voie, plus il s'éloignera de l'expérience et se transformera, quoi qu'il en ait, en métaphysicien. Comme simple savant, comme simple biologiste, comme simple observateur, il constate deux ordres de phénomènes séparés par un véritable abîme et il ne peut pas aller au delà de cette constatation.

Si vous me dites : mais la combinaison du fer et du soufre, par exemple, suppose évidemment la mise en œuvre de certaines forces, et le chimiste ne sort pas de son rôle de chimiste en affirmant l'existence de ces forces ; or, dans les tissus, des combinaisons de ce genre s'opèrent à tout instant : je puis donc affirmer qu'il y a dans les tissus des forces d'ordre chimique.

Non, Messieurs. L'illustre Dr Broussais dont j'ai déjà cité la parole, n'ayant jamais trouvé l'âme au bout de son scalpel, déclarait qu'il était anti-scientifique d'admettre l'existence de l'âme. Or quel est le chimiste qui a jamais trouvé la cohésion ou l'affinité au fond de ses cornues ? Quel est le biologiste qui les a jamais trouvées au sein des tissus ?... En admettant leur existence, nous sortons des limites strictes des sciences expérimentales, nous manipulons du supra-sensible, nous faisons de la métaphysique, et croyez bien que nous en faisons plus souvent que nous ne pensons.

Le biologiste, d'ailleurs, ne peut s'en tenir à la simple constatation de l'existence, dans la matière vivante, de forces physiques et chimiques. Il y a une question ultérieure qu'il se pose fatalement et qui ne peut rester sans réponse : ces forces physiques et chimiques peuvent-elles à elles seules rendre raison de phénomènes aussi spéciaux que ceux qui caractérisent le vivant ?...

Si nous admettons des forces, c'est parce que nous en avons besoin pour expliquer les phénomènes. C'est, d'autre part, de la logique instinctive, de poser des principes différents là où se manifestent des phénomènes dissemblables. Or les phénomènes vitaux diffèrent, et profondément, des phénomènes purement physico-chimiques ; ils doivent donc s'expliquer par d'autres principes. Aussi, et il faut s'étonner que cela ne se soit pas produit plus tôt, une réaction a-t-elle commencé depuis quelques années, dans le sens anti-mécaniste. Elle est le fait des biologistes parfaitement indépendants au point de vue philosophique et religieux. La mauvaise foi la plus déterminée ne peut leur supposer la moindre arrière-pensée confessionnelle : ils se placent sur le terrain de la pure et libre recherche scientifique. En étudiant la matière organisée, ils se sont trouvés en face des phénomènes dont les forces physico-chimiques n'ont pu leur donner raison, qui même auraient dû manifestement être tout autres, de par les forces physico-chimiques elles-mêmes. Claude Bernard avait déjà dit : « Il est clair que cette propriété évolutive de l'œuf qui produira un oiseau, un poisson ou un serpent, n'est ni de la physique ni de la chimie. » Mais ce n'est pas seulement le terme dernier de l'évolution de l'œuf, ni l'ensemble des étapes que cet œuf doit parcourir pour donner l'individu parfait, ce sont les premières différenciations cellulaires elles-mêmes, parfois dès la segmentation initiale de la cellule embryonnaire, qui résistent à toute interprétation purement physico-chimique. Et voici que maintenant les *néo-vitalistes* s'en prennent, dans l'être unicellulaire lui-même, à des manifestations vitales auxquelles on se résigne à ne rien comprendre si on refuse de sortir de la thèse mécaniste.

Aux objections de ces néo-vitalistes, que répondent les tenants de l'explication physico-chimique ?... Ils esquissent un timide *mea culpa.* « Ce regain de vitalisme, avouaient Caullery et Mesnil en 1906, est pour une part une réaction contre les explications souvent par trop simples de certaines mécanistes. Si l'on doit être convaincu que les phénomènes vitaux sont susceptibles, en dernière analyse, d'explications physico-chimiques, dont la nature ne diffère pas essentiellement de celles applicables à la matière inerte, il faut cependant reconnaître que nous sommes loin de pouvoir les donner. C'est surtout les progrès accomplis qui doivent nous donner confiance pour l'avenir, et chacun d'eux nous montre combien grossière était la conception de l'étape précédente. A trop vouloir simplifier les problèmes biologiques pour en donner une solution immédiate, à expliquer les réactions de l'être vivant par quelques forces physiques très simples, on dénature tellement ces problèmes que beaucoup d'esprits n'y reconnaissent plus la biologie, mais un jeu de combinaisons artificielles n'ayant rien de commun avec l'étude véritable de la vie (*). » Ces auteurs, comme Prenant, en appellent donc aux siècles futurs. Et voilà ce qu'on trouve de mieux à répondre à des difficultés biologiques précises, fondées sur des faits d'expérimentation indéniables. Cela équivaut à un aveu d'ignorance, et il n'y a rien, dans cet aveu, de déshonorant ; on pourrait seulement souhaiter qu'il fût un peu plus franc.

Quelques-unes des réflexions que je viens de faire vous ont peut-être suggéré, Messieurs, une objection à laquelle je n'ai nullement l'intention de me dérober.

Si l'on se base sur la diversité des phénomènes pour conclure à la diversité des principes, n'est-on pas entraîné à admettre autant de principes vitaux différents qu'il y a de structures et de

---

(*) Revue générale des Sciences pures et appl., 1906, p. 35.

fonctions cellulaires différentes ?... Le principe qui préside à l'élaboration du lait dans la cellule de la glande mammaire est-il le même que celui qui préside à l'élaboration de la myosine dans la cellule musculaire, de la pepsine dans les cellules glandulaires de l'estomac, des sels calcaires dans la cellule des os, ou des neurofibrilles dans la cellule nerveuse ?... Et tous ces principes eux-mêmes ne sont-ils pas distincts, chez l'homme, de l'âme intelligente et libre ?...

D'abord, Messieurs, je dois admettre en moi l'existence d'un principe supérieur, et d'un seul, qui fait que cet être, *moi*, si complexe, est pourtant *un ;* l'existence d'un principe, et d'un seul, qui préside dans mon organisme aux fonctions physico-chimiques, tout aussi bien qu'aux fonctions vitales inférieures (fonctions de végétation pure et de sensibilité) et qu'aux fonctions vitales supérieures (fonctions de pensée et de volition). En d'autres termes, je n'ai qu'une âme. Et si j'admets cette *unicité* d'âme, ce n'est pas seulement parce qu'une décision conciliaire m'y contraint. En l'espèce, ce qui d'ailleurs arrive souvent, la décision conciliaire nous arrête là où le bon sens lui-même ne nous permet pas d'aller plus loin. Elle ne fait ici que confirmer un fait de conscience qui relève, non de la foi, mais de l'expérimentation psychologique élémentaire.

Toutefois, cela mis à part et hors de doute, que l'âme tienne sous sa dépendance des principes spéciaux diversifiés selon les fonctions, je l'admets volontiers. Quant à la façon dont ces principes cellulaires entreraient en relation avec l'âme, c'est un point, je crois, que nul ne tranchera jamais. Remarquez, d'ailleurs, que nous ne savons pas davantage comment se fait l'union de l'âme et du corps ; nous savons seulement que cette union existe, et nous pouvons prouver qu'elle ne consiste pas en une simple juxtaposition ; mais, cela dit, nous sommes bien forcés de nous taire. Et remarquez aussi que cette même difficulté nous la trouvons partout où s'établit entre le matériel et l'immatériel un *consortium* autre qu'un simple rapprochement : la physique et la chimie elles-mêmes, à ce point de vue, ont leurs mystères.

J'aurais pu me contenter de vous signaler très rapidement ces différents points ; j'ai préféré m'y attarder un peu, dans la pensée que je vous ferais mieux saisir ainsi l'importance des problèmes philosophiques que soulèvent nécessairement les notions de biologie, même tout à fait sommaires, qui sont le fondement obligatoire de toute formation médicale, et, par suite, l'importance des études philosophiques au point de vue de cette même formation.

Cette importance vous apparaîtra peut-être plus grande encore si vous considérez le médecin dans l'exercice même de sa profession. Je me contenterai de vous rappeler ce que vous a si parfaitement exposé déjà M. le Dr Cuylits, au sujet de la nécessité, pour le médecin, d'acquérir des connaissances psychologiques, non pas rudimentaires et quelconques, mais profondes et saines. Ces connaissances vous sont tout particulièrement indispensables en neuropathologie fonctionnelle.

Vous connaissez, Messieurs, beaucoup mieux que moi, l'état de la question. En fait, dans le cas de maladies fonctionnelles franches, j'entends de maladies fonctionnelles qui ne se compliquent d'aucune autre affection morbide, on n'a constaté jusqu'ici aucune lésion anatomique, si large que soit le sens qu'on donne à ce terme de *lésion*, et lors même qu'on l'étendrait aux perturbations pouvant survenir dans les conditions intracellulaires normales, chimiques ou physiques. Mais on ne peut pas, de la *non-constatation* d'une lésion, conclure à la *non-existence* de cette lésion ; aussi faut-il recourir à d'autres arguments, si on veut trancher la question, ou tout au moins la comprendre. Or, ces arguments sont d'ordre philosophique.

Pierre Janet déclare qu'admettre l'existence de maladies sans aucune espèce de fondement organique « est une absurdité que personne n'a jamais osé dire (*) ». Ce serait en effet une absurdité, tout au moins pour ceux qui ne veulent pas admettre l'existence, dans l'organisme, de principes essentiellement différents de cet organisme même. C'est le cas de Janet ; aussi refuse-t-il, avec raison, à son point de vue, de définir les *névroses* « des maladies dans l'évolution desquelles interviennent d'une manière prépondérante des troubles psychologiques », car, ajoute-t-il, « on a beau répéter les déclarations de principes au début de toutes ces études, on a beau dire que l'on considère les phénomènes psychologiques comme des manifestations de l'activité cérébrale, il y aura toujours

---

(*) *Les Névroses*, Paris, 1909, p. 377.

des adversaires qui feront semblant de ne pas comprendre et qui accuseront ces interprétations cliniques de métaphysique spiritualiste (*) ». Cela d'ailleurs n'empêchera pas l'auteur, après nous avoir donné sa définition à lui, de nous dire en terminant : « Ces notions générales sur l'ensemble des névroses sont plus philosophiques que médicales ; dès qu'il s'agit de diagnostiquer et de traiter un symptôme névropathique précis, il est nécessaire de revenir à son analyse psychologique (**). »

Il y a cependant des neuropathologistes qui prétendent que les névroses sont des maladies purement fonctionnelles et dynamiques. Ils arguent du fait qu'une commotion psychique peut avoir raison, parfois instantanément, de presque toutes les manifestations névropathiques : résoudre, par exemple, subitement, une contracture hystérique. Or, ces neuropathologistes ne comprennent pas, dans le cas où cette contracture serait due à une lésion organique, même consistant simplement en une anomalie chimique des tissus, comment une cause d'ordre psychique pourrait rétablir instantanément l'organe chimiquement lésé. Je ne dis pas que la raison est péremptoire ; mais quoi qu'il en soit, si on soutient, pour ce motif ou pour un autre, le caractère purement fonctionnel des névroses, on admet, par le fait même, l'existence dans l'organisme d'un principe psychique qui ne se confond pas avec cet organisme.

Dans les deux opinions, on est donc obligé, en fin de compte, d'avoir recours aux données philosophiques, et Janet dit très justement, à mon sens, en parlant de certaines formes plus accusées de névroses : « Pour comprendre ces formes particulières que prennent les névroses, pour essayer de les transformer, il devient alors nécessaire de décrire avec soin les symptômes psychologiques, de les distinguer les uns des autres et de leur donner des noms précis... Si le côté médical de ces maladies ne doit pas être négligé, les symptômes psychologiques doivent aussi être analysés avec autant de soin et de précision que les symptômes physiologiques (***). »

(*) *Les Névroses*, p. 381.
(**) *Ibid.*, p. 392.
(***) *Ibid.*, p. 394.

Des études psychologiques sont donc indispensables au médecin en vue de sa formation strictement professionnelle. Or, ces études doivent être dirigées dans le sens spiritualiste, parce que seule la psychologie spiritualiste explique d'une façon satisfaisante les phénomènes d'ordre psychique. Je ne veux pas insister sur ce point. Vous me permettrez cependant de vous en signaler une application pratique. Elle concerne la question de la responsabilité. Je me garderai d'ailleurs de m'aventurer trop loin dans un pareil sujet, après que deux des membres de votre section, M. le Dr X. Francotte et M. le Dr Cuylits, en ont parlé si pertinemment. Je ne puis mieux faire, en vérité, que de vous renvoyer à leurs travaux (*). Je ne signalerai que quelques points qui vont plus spécialement à mon but.

La notion de *responsabilité* suppose la notion de liberté. Sans doute, on peut donner de la responsabilité une définition qui mettra la liberté hors de cause ; mais il y a, pour la signification des mots comme pour la possession des choses, une prescription contre laquelle ne saurait prévaloir la fantaisie des novateurs. Or la *responsabilité,* depuis que le mot existe, est en possession d'une signification qui se prend, non pas directement du détriment social ou privé résultant de l'acte délictueux, mais des qualités intrinsèques de l'acte lui-même. Je suis responsable, moi, délinquant, parce que soit dans l'acte lui-même du délit, soit dans les circonstances qui l'ont préparé ou accompagné, j'ai agi librement. Je ne soutiens pas que la société ne peut se défendre qu'à l'égard des délinquants jouissant de leur pleine liberté, car j'entends bien qu'elle peut se défendre même contre des irresponsables ; mais c'est là une tout autre question. La question que je pose maintenant est celle de la responsabilité individuelle, et je dis que cette responsabilité n'existe que là où il y a liberté ; aussi, dans toutes les doctrines qui rejettent la liberté, ceux qui sont logiques rejettent-ils aussi, purement et simplement, la responsabilité. Or, je vous estime assez, Messieurs, pour n'être même pas tenté de

---

(*) X. Francotte : Rapport du Congrès des Neurologistes ; Causerie à la Conférence du jeune Barreau. — Cuylits : *La Responsabilité des hystériques* (Étude présentée à la section médicale de la Société scientifique le 22 avril 1909 : Ann. de la Soc. scient., t. XXXIII, p. 222).

vous prouver que la responsabilité est une de ces notions dont il n'est pas permis à l'homme de se défaire. Il faut donc — et du reste pour d'autres raisons encore, et d'un autre ordre — rejeter toutes les théories qui placent l'homme normal sous l'empire d'une nécessité inéluctable. Il n'est pas vrai, comme on l'a prétendu, qu'au point de vue de ses déterminations, l'homme n'est pas autre chose que le résultat de sa nourrice, ou le jouet d'une force extrinsèque, quelle qu'elle soit, qui le domine et le dirige à son gré.

Seule d'ailleurs, et pour prendre la question de plus haut, seule la philosophie spiritualiste peut parler de psychologie, parce que seule elle admet en principe l'existence de cette science spéciale. Pour la philosophie empiriste, positiviste, matérialiste, ce qu'on appelle psychologie n'est que de la haute physiologie. Aucune opération psychique, même la plus élevée, ne diffère essentiellement des fonctions de nutrition, de reproduction ou d'innervation : au fond un remords, par exemple, et une mauvaise digestion sont des phénomènes de même nature, affectant seulement des allures un peu différentes.

Je n'ai pas besoin de vous faire remarquer que si ces deux ordres de faits, physiologique et psychologique, ont entre eux des rapports très intimes, ils sont cependant irréductibles l'un à l'autre, et que, par suite, la psychologie est vraiment, comme le prétend l'école spiritualiste, une science bien à part. Le médecin qui méconnaîtrait le caractère essentiellement particulier des phénomènes psychologiques, se condamnerait, dans ses observations neuropathologiques, à accumuler des tableaux cliniques auxquels il ne comprendrait presque rien. Il est vrai que des psychiâtres de grand savoir soutiennent la thèse anti-spiritualiste, d'où l'on pourrait conclure que les opinions philosophiques n'ont pas, en matière neuropathologique, les fâcheuses conséquences que je dis ; mais il faut bien remarquer qu'il y a souvent de salutaires inconséquences, et que bien des matérialistes, irréductibles sur les principes, pratiquement jugent et se conduisent comme nous. En psychologie tout particulièrement ils en arrivent vite, pour peu qu'ils s'oublient, à parler instinctivement le langage spiritualiste. C'est une contradiction qui n'est pas rare. Janet, dans ses *Névroses* (*) ne peut pardonner à Dubois (de Berne) d'être tombé dans ce grave défaut.

Il a, quant à lui, trouvé un ingénieux moyen de s'éviter ce malheur. Il distingue, dans les fonctions physiologiques, « des parties inférieures et des parties supérieures (**) ». Voici des exemples : il y a des individus « qui ne s'alimentent pas quoique leur estomac et tous les organes inférieurs de l'alimentation puissent parfaitement fonctionner. Certains malades ne perdent que cette partie supérieure de la fonction de l'alimentation qui consiste à manger en société, à manger dans des circonstances nouvelles et complexes, à manger en prenant conscience de ce que l'on fait. Quoique le physiologiste ne soupçonne pas que ces phénomènes fassent partie de l'exercice des fonctions sexuelles dans l'humanité, il y a une pathologie des fiançailles et une pathologie du voyage de noces (***). » Parfaitement ! Mais qu'il n'y ait entre les troubles émotionnels qui saisissent un homme quand il doit « manger en portant un habit noir et en parlant à sa voisine » et les troubles qui peuvent intéresser la « sécrétion du pancréas » qu'une question de degrés, il faut avoir, pour l'admettre, une énorme bonne volonté. Sans doute « c'est toujours au fond la fonction de l'alimentation » ; mais parmi tous les phénomènes qui se rapportent à cette fonction, les uns interviennent comme dépendant de l'essence même de la fonction : ils sont physiologiques ; les autres sont là à l'occasion des premiers ; ce sont des circonstances qui accompagnent l'exercice de la fonction, qui peuvent même le modifier, mais ne le constituent pas : ils sont psychologiques. De même, ni les fiançailles, ni le voyage de noces ne font partie essentielle de la physiologie sexuelle, et les troubles névropathiques dont ils peuvent être la cause ne relèvent point de la fonction de reproduction, comme constituant une anomalie de cette fonction.

Cette tentative de réduire les phénomènes psychiques à de purs phénomènes physiologiques n'est vraiment pas heureuse : c'est tout ce qu'on peut en dire de plus bienveillant.

(*) Cfr. p. 381.

(**) *Les Névroses*, p. 384.

(***) *Ibid.*, p. 385.

Je termine, Messieurs, en vous signalant un dernier service que la philosophie peut rendre aux sciences biologiques et médicales, qui, pour être moins spécial que les précédents, n'en mérite pas moins d'être pris en considération.

L'évêque Isidore de Séville, au VIIᵉ siècle, énumérant les connaissances nécessaires aux médecins de son temps, signalait, entre autres, la dialectique (*). Le mot doit être pris ici dans un sens large, pour désigner cette partie de la philosophie qui enseigne l'art de raisonner. Saint Isidore exigeait que le médecin connût cet art, afin de pouvoir, des phénomènes morbides qu'il observait, remonter à leurs causes, et ces causes, les scruter, les discuter, et en tirer, surtout au point de vue thérapeutique, toutes les conséquences qu'elles comportent, et non pas au petit bonheur, mais sérieusement, raisonnablement : « ratione adhibita ». Ces conseils sont toujours actuels. Mais les connaissances dialectiques présentent un intérêt plus général encore.

La médecine n'en est plus aux tâtonnements empiriques de ses débuts ; depuis longtemps elle est devenue une science ayant ses méthodes propres, ses hypothèses, ses lois, ses théories, ses dogmes, ses doctrines. Le charlatanisme public a fait son temps, et, dans une certaine mesure, la *médecine expectante* aussi. Mais qu'il s'agisse de remonter des phénomènes aux substances, des effets aux causes, des déviations à l'état normal, pour établir des rapports, des règles générales, des lois, ou qu'il s'agisse, ces rapports, ces règles, ces lois étant connus, d'en tirer des applications pratiques pour prévoir et le développement régulier d'une affection, et les causes accidentelles qui peuvent en troubler le cours ordinaire (avec toutes leurs conséquences plus ou moins probables), et la thérapeutique enfin qui doit intervenir pour saisir le mal soit dans sa cause même, soit dans ses manifestations multiples, pour prévenir les complications ou éviter le retour des accidents morbides, pour tout cela, le simple bon sens naturel, encore que nécessaire, ne suffit pas. Les questions médicales sont si délicates, si complexes, si étendues, qu'il est indispensable d'apporter à leur étude des facultés intellectuelles exercées, entraînées et parfaitement disciplinées. Ce n'est que par de

---

(*) *Etymolog. lib.* IV.

sérieuses études philosophiques qu'on peut obtenir ce résultat, et de ce chef encore la philosophie s'affirme, non pas comme un antagoniste, mais comme un auxiliaire précieux des sciences biologiques et médicales.

Nous avons touché, Messieurs, dans cet entretien, à de très nombreuses questions. Cela s'imposait un peu, et j'ai dû encore, pour ne pas m'exposer à abuser trop de votre attention, laisser de côté bien des considérations dont le développement serait tout naturellement venu à mon sujet. Ce que j'en ai dit suffira peut-être à vous faire comprendre combien était profonde et vraie l'idée que se faisait de la médecine l'ancienne scolastique. A cette question : pourquoi l'art de la médecine n'est-il pas compris parmi les arts libéraux, elle répondait : les arts libéraux sont des sciences particulières ; la médecine est une science universelle : « hinc est quod medicina secunda philosophia dicitur. Utraque enim disciplina totum sibi hominem vindicat (*). »

L'attention soutenue qui a accompagné cette lecture et les applaudissements qui l'ont suivie ont témoigné de l'intérêt que le conférencier a su donner au développement de la question des liens qui rattachent la philosophie aux sciences médicales et du succès avec lequel il l'a traitée.

Le peu de temps dont on disposait n'a pas permis de donner à la discussion qui s'ensuivit toute l'ampleur que le sujet comportait ; la Section aura l'occasion d'y revenir. Des observations intéressantes ont été, cependant, présentées.

Le R. P. Vermeersch estime que les névroses ne peuvent pas être considérées comme des maladies purement psychiques, mais qu'elles ont à leur base une lésion organique. S'il en était autrement, il faudrait dire que c'est l'âme qui est malade. Or, une telle affirmation ne se comprend pas dans la doctrine spiritualiste, pas plus que ne se comprend d'ailleurs, du moins si on la prend dans un sens strict, l'expression « maladies de la volonté ».

Le R. P. Boule répond que son but n'a pas été de trancher

(*) *Etymolog. lib.* IV.

la question du fondement anatomique ou purement dynamique des névroses. Il n'a pris parti ni pour l'une ni pour l'autre opinion ; il a voulu, seulement, montrer que, dans l'une comme dans l'autre, intervenaient nécessairement des considérations d'ordre psychologique et que, de ce chef, des connaissances philosophiques sérieuses étaient nécessaires au neuropathologiste, dans l'exercice même de ses fonctions proprement médicales. Peut-être, quoi qu'il en soit, d'ailleurs, du fond même de la question, aurait-on moins de peine à accepter l'idée de maladies purement fonctionnelles, si on voulait bien admettre l'existence, sous la dépendance de l'âme, de principes cellulaires qui, eux, pourraient être le siège d'affections morbides, l'organisme restant parfaitement normal, du moins au début de l'affection.

Un membre présent se demande si, en présence de l'insuffisance trop commune d'une préparation philosophique chez le médecin, celui-ci ne ferait pas bien de laisser complètement de côté les questions mixtes qui exigent ces connaissances.

Ce qui serait préférable, pense le R. P. Boule, c'est plutôt que le médecin s'efforçât d'acquérir les connaissances philosophiques qui lui manquent et dont il reconnaît l'utilité même au point de vue purement professionnel. C'est un idéal, mais pourquoi ne pas le réaliser dans la mesure la plus parfaite possible ?

Revenant sur l'objection du R. P. Vermeersch, M. le Dr Masen estime que des moyens d'exploration plus parfaits encore que ceux que nous possédons aujourd'hui nous mettront, peut-être, à même de connaître un jour le substratum anatomique des névroses. Il est, d'ailleurs, difficile de se faire une conception d'un trouble d'origine purement dynamique.

Le rapporteur a admis la *possibilité* de l'éventualité de la découverte de lésions anatomiques dans ces affections. Quant à la nature d'une maladie purement fonctionnelle dans son principe, il n'est pas aussi difficile qu'on le pense, de s'en faire une idée. Une comparaison aidera à la comprendre.

Une machine peut ne pas marcher, être malade, pour deux raisons : ou bien ses organes sont faussés, brisés, mal ajustés, ou incomplets, et dans ce cas nous avons affaire à une maladie comportant une lésion anatomique ; ou bien, ses différents organes étant parfaitement en état, on ne leur applique pas le minimum de force motrice nécessaire pour les mettre en mouvement, ou on les soumet à l'action d'une force qui leur impose un travail anormal et, dans ce cas, nous sommes en présence d'une maladie purement dynamique à son origine. Pourquoi n'en serait-il pas ainsi de notre organisme ?... Mais ce n'est là qu'une comparaison, et qui ne tranche nullement la question de fait.

M. le Dr Degive rappelle la parole de Leibniz qui voulait que les médecins *philosophassent* et que les philosophes *médicinassent*. Partant de là, il montre comment Leibniz lui-même, s'occupant, en philosophe, des sciences biologiques, avait conçu la question de la vie : la vie sortant de Dieu, pour se répandre dans tous les êtres créés ; car la matière inerte n'existe pas, et Lacordaire a pu dire, sans que sa parole soulevât la moindre protestation, que les pierres elles-mêmes avaient la vie. M. Degive demande si on ne pourrait pas en revenir à la conception leibnizienne, débarrassée évidemment des erreurs manifestes qu'un spiritualiste ne saurait soutenir.

« Il y a longtemps, répond le R. P. Boule, qu'on a remarqué et qu'on a dit qu'il y avait dans toute erreur une *âme de vérité*. Que cette *âme* se trouve dans les conceptions dynamiques de Leibniz, cela peut être admis. Que les créatures, en effet, que nous appelons inertes, soient en réalité douées de l'activité interne *monadique*, dans ce sens peut-être que leur inertie n'est que le résultat de l'action de forces qui se font équilibre, Leibniz pouvait avoir raison de le soutenir, mais il ne faut pas oublier que n'importe quelle activité n'est pas la vie, et Leibniz doit être abandonné sans pitié, si dans sa pensée la monade vivante ne diffère de la monade minérale que par quelque degré en plus de l'activité interne. Cette observation pourrait peut-être nous amener à conclure que les sciences biologiques n'ont pas grand'chose à gagner à être traitées par des philosophes. » Aussi le Révérend Père ne serait-il pas tout à fait d'avis qu'il serait à souhaiter que les philosophes *médicinassent* ou *biologicassent*, pas plus d'ailleurs qu'il n'est à souhaiter que les biologistes ou les médecins se mettent à philosopher. Remarquons bien d'ailleurs, que dire cela, et dire que des connaissances biologiques sont nécessaires aux philosophes, comme des connaissances philosophiques sont nécessaires aux médecins, sont deux questions qu'il ne faut pas confondre. Quant à la parole de Lacordaire, si personne n'a jugé à propos de la relever, c'est apparemment que tout le monde n'y a vu qu'une façon oratoire de désigner ce que nous appelons vulgairement, entre nous, des forces physico-chimiques.

On accuse le corps médical, fait remarquer M. le Dr Van Velsen, d'être souvent trop imbu de conceptions matérialistes dans l'appréciation des phénomènes ; mais ne serait-il pas à désirer que le prêtre, de son côté, tienne plus de compte, souvent, des conditions purement physiologiques qui interviennent dans notre vie morale ?

Le R. P. Boule ne fait pas difficulté de reconnaître que s'il n'est pas permis à un médecin d'ignorer, en pratique, l'influence du psychisme sur l'organisme, il ne l'est pas davantage à un directeur d'âmes d'oublier que l'organisme, à son tour, pèse parfois très lourdement sur l'activité de nos facultés supérieures.

M. le Dr Struelens, qui préside la réunion, remercie le R. P. Boule d'avoir abordé et traité d'une manière si complète et si lumineuse, devant la Section, une question dont l'actualité et l'importance s'imposent à notre attention. Il appuie le vœu de M. le Dr Warlomont, qui voudrait voir organiser une série de conférences destinées à l'enseignement de la philosophie s'adressant spécialement au corps médical ; le cours serait donné par un conférencier qui serait, comme le R. P. Boule, également versé dans la connaissance de la philosophie et dans celle de la biologie.

Avant de se séparer, la Section procède à l'élection de son bureau. Sont nommés :

Président : Dr Struelens.
Vice-Présidents : Dr De Lantsheere.
Dr L. Stouffs.
Secrétaire : Dr Warlomont.

Cinquième section

Mercredi, 6 avril 1910. — La Section continue l'enquête concernant le rôle économique des ports de commerce. M. Ch. Terlinden, professeur à l'Université de Louvain, fait une communication *Sur le port de Venise au moyen âge.* M. M. Rondet-Saint, ingénieur constructeur à Paris, conseiller du commerce extérieur de la France, expose les rapides progrès des ports jumeaux de *Seattle-Tacoma, dans le Puget-Sund* (*).

Jeudi 7 avril 1910. — Le Secrétaire donne communication du mémoire de M. M. Dewavrin, relatif aux trois ports de l'Adriatique, *Trieste, Fiume et Venise.* Le R. P. Charles, S. J., traite de *L'administration des ports.* M. G. Blondel, de l'Institut, clôt les travaux de l'enquête en faisant un résumé synthétique des constatations auxquelles elle a abouti (**).

La Section procède au renouvellement de son bureau. Sont nommés :

Président : M. ERNEST DUBOIS-BRAUN.
Vice-Présidents : M. BEERNAERT.
M. MORISSEAUX.
Secrétaire : M. VAN DER SMISSEN.

Sixième section

Mardi, 5 avril 1910. — La séance s'ouvre, à 16 heures, sous la présidence de M. De Preter. La Section procède au renouvellement de son bureau. M. Crame ayant resigné ses fonctions de

---

(*) M. Rondet-Saint vient de publier sous ce titre *La grande boucle*, le récit peu banal d'un voyage autour du monde dans des conditions particulièrement intéressantes. — Un vol. in-12, Paris, Plon-Nourrit & C^ie^, éditeurs.

(**) Les communications des rapporteurs et l'allocution de M. Blondel sont publiées dans la REVUE DES QUESTIONS SCIENTIFIQUES (juillet 1910).

secrétaire, il est également procédé au choix d'un nouveau titulaire. Sont élus :

Président :	M. Daubresse.
Vice-Présidents :	M. Renaud.
	M. De Coster.
Secrétaire :	M. R. Van der Mensbrugghe.

La Section maintient, au concours, la question présentée et adoptée en 1909 : « Étude de la résistance de l'air au point de vue particulier de l'aviation. »

Mercredi 6 avril 1910. — La séance s'ouvre, à 16 heures, sous la présidence de M. De Preter.

M. R. Van der Mensbrugghe fait une communication *Sur les aiguilles talonnables ;* en voici un résumé.

Bien qu'à proprement parler le *talonnement* d'un aiguillage signifie simplement sa prise par le talon, on s'accorde en général à donner à ce mot un sens plus restreint, et à qualifier de *talonnables* les aiguilles qui, maintenues disposées suivant une certaine direction, peuvent cependant être prises par le talon par un train venant de la direction opposée, sans qu'il en résulte de bris d'appareil.

Leur emploi permet d'éviter une cause de dangers, de mesures spéciales, de ralentissements et de retards existant aussi longtemps que les appareils n'ont pas été réparés. Elles sont donc très recommandables.

A cette catégorie d'aiguillages appartiennent évidemment, d'une part tous les excentriques des voies secondaires qui ne sont ni cadenassés, ni verrouillés, mais sont munis d'un levier à contrepoids dit *à simple action* qui ramène toujours l'aiguillage dans la même position, d'autre part les excentriques des voies de tramways maintenus dans leur position normale à l'aide d'un ressort qui se comprime lors du talonnement.

Pour toutes les voies de chemin de fer où les trains circulent en vitesse et qualifiées de *voies principales*, un simple contrepoids ou ressort ne peut suffire pour assurer la position d'une aiguille lorsqu'elle doit être prise par la pointe ; aussi a-t-on recours dans ce cas au verrouillage de l'excentrique dans la position qu'il doit occuper. De tels aiguillages et les signaux correspondants sont toujours commandés d'un poste de concentration où sont établies les relations mécaniques entre les leviers appelées *enclenchements*.

Dans les installations Saxby encore fort utilisées par l'État Belge, la commande des excentriques et des verrous se fait à l'aide de tringles rigides, et les verrous sont constitués par une pièce s'enfonçant dans la tringle reliant les deux aiguilles d'un même excentrique, lesquelles sont solidaires l'une de l'autre. Il en résulte qu'en cas de talonnement d'un tel appareil le verrou est cisaillé, et les tringles de l'excentrique tordues et faussées. Pareil aiguillage n'est donc pas talonnable.

Il n'en est plus ainsi dans le cas du système de commande et de verrouillage Siemens appliqué de plus en plus sur le réseau de l'État Belge. Ici, chaque aiguille d'un même excentrique est manœuvrée séparément par une tringle distincte recevant son mouvement d'une poulie horizontale placée à côté de l'appareil. Cette poulie porte sur chacune de ses faces un verrou circulaire venant caler l'une ou l'autre des tringles d'aiguille mais seulement lorsqu'elle est appliquée contre le rail et non dans la position opposée.

Dans le cas des signalisations électriques, cette poulie horizontale reçoit son mouvement d'une petite dynamo placée à proximité.

Dans le cas de commande mécanique, cette poulie est reliée par fils à une poulie verticale faisant partie du levier de manœuvre en cabine. Chaque signal et chaque excentrique y possèdent leur levier et le bâti se complète d'une table d'enclenchements.

Il est à remarquer que le levier commandant la poulie verticale de l'excentrique n'est pas fixé invariablement sur les flancs de celle-ci mais y est maintenu normalement à l'aide de deux ressorts.

En cas de talonnement de l'aiguillage, l'une des roues du premier véhicule appuyant sur l'aiguille rencontrée fait tourner la poulie horizontale en sens inverse, ce qui a pour effet de déverrouiller l'aiguille qui était appliquée contre le rail avant qu'elle soit atteinte par l'autre roue du même essieu. Aucun appareil n'est donc brisé dans la voie.

Le mouvement se propageant jusqu'à la poulie verticale en cabine, cette dernière se meut indépendamment du levier grâce aux ressorts qu'elle comprime. En tournant elle entraîne une tige qui déplace une barre dite *de talonnement*, ce qui a pour effet de caler les signaux dans la position qu'ils occupaient à ce moment et de faire marcher une sonnerie électrique. Aucun appareil n'est donc non plus brisé en cabine.

Il suffit au signaleur, pour remettre tout en ordre, de faire revenir la poulie verticale dans sa position normale à l'aide d'une clé de secours normalement plombée.

La sécurité complémentaire de la latte de calage manœuvrée en même temps que le verrou dans le système Saxby est ici remplacée par une latte de calage électrique. On a donc également toutes garanties que l'aiguillage ne pourra être manœuvré pendant le passage d'un train.

ASSEMBLÉES GÉNÉRALES

I

ASSEMBLÉE GÉNÉRALE DU MARDI 5 AVRIL 1910

La séance s'ouvre à deux heures et demie, sous la présidence de M. F. Dewalque, président en exercice de la Société scientifique.

La parole est donnée à M. Mansion, Secrétaire Général, pour la lecture du rapport suivant sur les travaux de la Société en 1909-1910.

Publications. La Société a fait paraître depuis le 1er avril 1909 jusqu'au 1er avril 1910, les trois derniers fascicules du tome XXXIII des Annales correspondant à l'année sociale 1908-1909 et un fascicule du tome XXXIV, de l'année 1909-1910; ensuite quatre livraisons de la Revue des Questions scientifiques (t. LXV, 2e livraison; t. LXVI ; t. LXVII, 1re livraison).

1° Annales. Le tome XXXIII des Annales n'a pas l'étendue anormale des deux volumes précédents. Voici comment les documents administratifs et les travaux des sections se répartissent dans ce volume de 670 pages :

Documents	95	pages
Sciences mathématiques	225	»
» physiques	160	»
» naturelles	190	»
» médicales	70	»
» techniques	20	»

Contrairement aux apparences, il ne faut pas conclure de ce tableau numérique que les différentes sections ont travaillé très inégalement, dans la proportion des chiffres que nous venons de citer : l'inégalité provient de ce que des mémoires de physique, de chimie, de zoologie, de médecine, d'économie sociale ont été publiés dans la REVUE DES QUESTIONS SCIENTIFIQUES au lieu de paraître dans les ANNALES ; par exemple, la suite de la grande étude de la cinquième section sur *Les Ports et leur fonction économique*, la monographie si intéressante de M. Fabre sur *Le Ver luisant*. Les recherches de mathématiques seules, à cause de leur aridité et de l'impossibilité où l'on est de les vulgariser pour les profanes, ne parviennent jamais à verser leur trop plein dans la REVUE ; de là la place prépondérante qu'elles occupent encore une fois dans le dernier tome des ANNALES.

2° REVUE DES QUESTIONS SCIENTIFIQUES. Les livraisons d'avril, de juillet et d'octobre 1909 et celle de janvier 1910 de la REVUE, contiennent, outre une trentaine d'articles principaux dont nous donnons plus bas la liste détaillée, des revues des Recueils périodiques et des analyses plus ou moins étendues de quatre-vingts ouvrages traitant de mathématiques, d'astronomie, de physique, de chimie, d'art de l'ingénieur, de géographie, de biologie, de botanique, d'entomologie, d'agriculture, de sylviculture, de philosophie scientifique.

Voici classés par ordre de matières, les sujets abordés dans les grands articles des quatre dernières livraisons de la REVUE DES QUESTIONS SCIENTIFIQUES :

1. Les fêtes jubilaires de l'Université de Louvain.
2. *R. P. B. Lefebvre, S. J.* A propos d'une histoire des mathématiques.
3. *R. P. J. Thirion, S. J.* La comète de Halley.
4. *R. P. Bosmans, S. J.* La carte lunaire de Van Langren, conservée à l'Université de Leyde.

5. *R. P. Gaillard, S. J.* Courants d'étoiles.

6. *G. Van der Mensbrugghe.* Quelques effets remarquables de l'élasticité des liquides.

7. *R. P. J. Thirion, S. J.* Les trois états de la matière et les cristaux liquides.

8. *J. Delemer.* Sur la correspondance des impressions rétiniennes reçues par les deux yeux dans l'acte de la vision.

9. Le cinquantenaire professoral de Louis Henry.

10. *J. de Moussac.* L'industrie chimique en Allemagne.

11. *Ch. Barrois.* Albert de Lapparent et sa carrière scientifique.

12. *Baron Greindl.* L'évolution de la géotechnique et le problème des Préalpes.

13. *R. de Sinéty, S. J.* Un demi-siècle de Darwinisme.

14, *J. H. Fabre.* Le ver luisant.

15. *Eymieu.* L'hypnotisme. Esquisse d'une théorie nouvelle.

16. *L. Vervaeck.* Les empreintes digitales. Les bases scientifiques de la dactyloscopie et ses applications judiciaires.

17. *R. P. L. Boule, S. J.* Les glandes et la psychopathologie glandulaire.

18-24. *Divers.* Les ports et leurs fonctions économiques : Brême. New-York. Pouzzoles dans l'antiquité. Shanghaï. Zeebrugge. Rouen. Montréal.

25. *H. Mansion.* L'industrie des transports maritimes.

26. *M. Dewavrin.* L'industrie laitière au Canada.

27. *J. Meuwissen.* La genèse du transatlantique moderne.

28. *G. de Béthune.* Aviation. Récents progrès. Questions à résoudre.

29. *R. de Montessus.* L'aviation. Hier, aujourd'hui, demain.

30. *J. M., S. J.* A propos du sentiment de la présence chez les mystiques.

31. *Th. Gollier.* L'enseignement au Japon.

32. *C. Beaujean.* Quelques idées sur la guerre.

33. *R. P. Vermeersch, S. J.* La peur de l'enfant dans les classes dirigeantes.

34. *A. Proost.* L'instruction et l'avenir de la femme.

35. *J. J. Van Biervliet.* Vers la pédagogie expérimentale.

Un mot encore à propos de nos publications. Au 1er janvier de cette année nous avions fait paraître trente-trois volumes de nos Annales, soixante-six de la Revue, en tout quatre-vingt-dix-neuf volumes scientifiques de 500 à 700 pages. Notre premier fascicule du tome XXXIV des Annales, ou la première livraison de la Revue des Questions scientifiques de cette année peuvent être regardés comme la première partie de notre centième volume.

Apprécions-nous assez à sa juste valeur l'énorme effort collectif que suppose la publication de ces cent volumes, en dehors de tout patronage officiel, par la libre collaboration des savants catholiques, surtout de France et de Belgique ? Dans le domaine des sciences mathématiques, physiques, naturelles, médicales et économiques, n'est-il pas vrai que les membres de la Société, que les collaborateurs de la Revue, ont maintes fois dit, là surtout où les sciences touchent aux confins de la philosophie, des paroles essentielles qui n'ont été dites aussi haut, ni aussi nettement, nulle part ailleurs? A-t-on beaucoup dépassé, en mathématiques, les recherches de Gilbert sur la rotation des corps, celles de M. de la Vallée Poussin sur la répartition des nombres premiers ? Les théories physiques ont-elles été plus approfondies dans leurs principes que ne l'ont fait le P. Carbonnelle et M. Duhem? L'ensemble des discussions dans notre Revue sur l'évolution, depuis le P. Carbonnelle encore jusqu'au P. de Sinéty en janvier dernier, sont-elles superficielles ? Les études entomologiques de M. Fabre ne sont-elles pas de première valeur ? Les rapports de la section de médecine sur le fœticide médical, sur la dépopulation, sur la responsabilité des hystériques (celle-ci dans le dernier volume des Annales), sur divers points de morale sexuelle, n'ont-ils pas eu un légitime retentissement ? Je n'ai pas la compétence nécessaire pour signaler une foule d'autres sujets traités comme il le faut dans nos cent volumes, mais laissez-moi vous dire encore que le travail de M. le vicomte d'Adhémar sur *l'équation de Fredholm* dans le tome XXXIII des Annales a été pour maints spécialistes une révélation des méthodes nouvelles que les mathématiques offrent à l'astronomie et à la physique pour pénétrer plus avant dans les secrets de la nature. Dans un tout autre domaine, la grande monographie de la cinquième section sur les Ports à eu l'honneur d'attirer l'attention de S. A. R. le Prince Albert, aujourd'hui notre Roi.

Pourquoi répétons-nous ces considérations que nous avons déjà fait valoir il y a neuf ans à l'occasion de nos fêtes jubilaires? Pour nous encourager tous à rester fidèles à la Société, à la Revue, pour dire à tous ceux qui nous ont une fois donné leur nom comme membre ou comme abonné, qu'ils ne doivent **jamais** nous abandonner. Se faire membre de la Société scientifique de Bruxelles, c'est participer à une bonne œuvre, c'est donner aux jeunes savants catholiques l'occasion et les moyens de se produire dans un milieu sympathique et de travailler à l'avancement de la science. S'abonner à la Revue, c'est aussi contribuer à cette œuvre si belle, mais c'est de plus se faire du bien à soi-même, à ceux qui nous entourent, à ceux sur lesquels nous avons de l'influence, parce que la Revue des Questions scientifiques nous tient au courant des progrès des sciences, en fait ressortir les harmonies providentielles avec la philosophie spiritualiste et la religion, mieux qu'aucun autre recueil analogue.

Sessions. Les sessions de Pâques 1909 et de janvier 1910 se sont tenues à Bruxelles; celle d'octobre 1909 à Louvain.

Dans nos séances de Pâques 1909, notre premier conférencier a été M. le Dr Vervaeck qui nous a entretenus *Des empreintes digitales, des bases scientifiques de la dactyloscopie et des applications judiciaires;* il nous a appris, à notre grand étonnement, que chaque homme est lui-même, différent de tous les autres, non seulement dans son intelligence, son caractère, son cœur, mais dans son être physique, et jusqu'au bout de ses doigts — surtout au bout de ses doigts.

M. le baron Greindl a tenté de nous initier à une question difficile de géologie moderne, *L'origine des Préalpes*, et grâce à la savante précision de son exposition et à d'excellentes projections, il y est parvenu.

Le R. P. Vermeersch, le dernier jour de notre session de Pâques, nous a parlé de la question si navrante de la dépopulation sous le titre *La peur de l'enfant dans les classes dirigeantes,* et il l'a fait avec une délicatesse et une autorité qui font désirer que sa conférence soit répandue autant que possible.

Dans notre session d'octobre, tenue à Louvain, sous la présidence d'honneur de Mgr Ladeuze, le nouveau recteur de l'Université catholique, M. J. J. Van Biervliet nous a fait une conférence très personnelle, très humoristique sur *La Pédagogie expérimentale* qui a eu un très grand succès auprès de ses auditeurs. Mgr Ladeuze a profité de l'occasion pour commenter d'une manière remarquable la devise de la Société : *Nulla unquam inter fidem et rationem vera dissensio esse potest,* et pour dire une fois de plus les rapports qui existent entre les sciences et la philosophie, entre la philosophie et la théologie; il rappelle aussi les liens étroits qui rattachent notre Société, sa fondation, son activité depuis trente-cinq ans, à l'Université catholique. Toutes les séances de notre session à Louvain ont eu lieu à l'Institut d'Arenberg où nous étions comme chez nous, puisque c'est là que notre cher Président de cette année a son laboratoire de chimie appliquée. Nous le remercions de nous avoir ménagé des locaux aussi bien appropriés aux réunions des sections et à l'assemblée générale.

Notre session de janvier dernier a été l'une des plus brillantes et des plus suivies que nous ayons à enregistrer dans nos rapports annuels. M. le vicomte de Montessus, professeur aux Facultés catholiques de Lille nous a fait, devant une salle archicomble, une conférence sur *L'Aviation, hier, aujourd'hui, demain*, claire, précise, comme il convenait qu'elle fût venant du Président de la section de mathématiques, et copieusement illustrée de projections lumineuses.

Comme les autres années, un grand nombre de communications ont été faites dans les diverses sections; nous ne pouvons signaler ici que le rapport de M. Cuylits sur la responsabilité des hystériques à la quatrième section et les études sur les ports à la cinquième. La troisième et la sixième section ont eu une réunion spéciale le 24 juin dernier en Hainaut pour visiter les installations des charbonnages du Bois-du-Luc et du Quesnoy sous la direction d'un de nos confrères, M. Renier, ingénieur des mines.

A la session de Pâques, la Société a accordé un prix de 500 fr. et la médaille de la Société à un mémoire original du R. P. Wulf, S. J., sur *Un nouvel électromètre bifilaire*, qui a été publié dans nos Annales.

Nous continuons toujours à avoir les meilleures relations avec la *Société bibliographique de Paris*. Notre cher confrère, M. le comte Domet de Vorges n'a pu l'an dernier venir lire lui-même son rapport sur cette sœur aînée de la *Société scientifique de*

Bruxelles; en revanche, pour la première fois, nous avons pu, comme délégué de celle-ci, assister à la séance générale annuelle de la *Société bibliographique* et nous y avons été reçu avec une cordialité toute française : nous avons fait un rapport d'ensemble, très sommaire, il est vrai, sur les travaux de notre Société.

État actuel de la Société. Nous avons admis 21 nouveaux membres en 1909 ; sept ont donné leur démission, neuf nous ont été enlevés par la mort de manière que le nombre de nos adhérents n'a augmenté que de 5 : de 519, il s'est élevé à 524. Le nombre des abonnés à la Revue reste à peu près stationnaire.

Parmi ceux que nous avons perdus, nous signalerons spécialement le père de notre Reine bien-aimée, le duc Charles-Théodore, notre membre honoraire depuis 1902, et le chanoine Swolfs, membre de la Société depuis l'origine, membre du Conseil depuis 1891.

Le duc Charles-Théodore a donné au monde le rare exemple d'un prince qu'une vocation irrésistible entraîne vers les études médicales à l'âge de trente-cinq ans, qui devient un spécialiste distingué en oculistique et pratique la médecine par amour de l'humanité souffrante, des pauvres surtout, pendant plus de trente ans, à Tegernsée, à Meran et à Munich. Le duc Charles-Théodore, né le 9 août 1839, est mort le 30 novembre 1909, quelques mois après avoir été proclamé docteur *honoris causa* des Universités de Louvain et de Bruxelles.

Le chanoine Swolfs, né à Bruxelles le 24 juin 1842, nous a été enlevé le 2 mai 1909 ; il a été professeur au petit séminaire de Malines, puis inspecteur diocésain de l'enseignement moyen dans l'archidiocèse, archidiacre, enfin doyen du chapitre métropolitain, partout renommé comme au Conseil de la Société, par sa prudence, son solide bon sens et son dévouement à ses devoirs. On lui doit un *Manuel d'histoire nationale* d'après Namèche, et un opuscule sur *L'Œuvre des six jours* où il défend habilement le système concordiste des jours-époques.

De nombreuses distinctions honorifiques et scientifiques ont été accordées pendant l'année écoulée à plusieurs de nos membres. En voici les principales :

L'Université de Louvain a fêté en mai dernier le 75e anniversaire de sa fondation. La Société scientifique de Bruxelles a été représentée à ces fêtes par son président M. De Walque et son secrétaire-adjoint, le R. P. Thirion. Neuf des membres de la Société ont été nommés docteurs *honoris causa* à cette occasion : MM. Witz, Duhem, Blondel, Barrois, Jordan, Lemoine, Duret, Branly, Sabatier. Le 12 mars, M. Louis Henry, dont l'Université catholique avait célébré le 50e anniversaire de professorat le 5 mai, a reçu de Sa Sainteté le Pape la grand' croix de l'Ordre de Saint Sylvestre. Un peu plus tard, il était promu au grade de grand-officier de l'Ordre de Léopold ; en même temps Mgr Ladeuze et M. Lahousse étaient nommés officiers et M. de la Vallée-Poussin chevalier du même Ordre. Il y a quelques mois, le cher frère Alexis, des Écoles chrétiennes, a reçu du Pape la médaille en or de l'Ordre *Bene merenti*. L'Université de Genève, à l'occasion de son 450e anniversaire, a décerné à M. Van Gehuchten, l'éminent neurologiste de Louvain, membre de notre Conseil, le diplôme *honoris causa* de docteur en médecine. En août dernier, le R. P. De Munnynck, de l'Université de Fribourg, a été nommé, par S. S. Pie X, *magister theologiae.*

M. Haibe, directeur de l'Institut provincial de bactériologie à Namur, notre confrère et ancien lauréat, a obtenu à l'Académie royale de Belgique, un des prix Alvarenga, pour son Mémoire intitulé : *Le pouvoir sensibilisant des sérums d'animaux vaccinés contre la tuberculose par la méthode des sacs.*

Notre éminent collègue, M. Van der Mensbrugghe vient d'obtenir le prix décennal des sciences physiques pour l'ensemble de ses recherches sur la constitution moléculaire des liquides.

A l'Institut de France, M. de Sparre a obtenu l'un des prix Montyon pour ses recherches de mécanique rationnelle, de mécanique appliquée et de balistique ; M. Duhem, le prix Binoux, pour ses travaux sur l'histoire des sciences ; et le R. P. R. de Sinéty, S. J., le prix Da Gama Machado, pour son mémoire *La lignée des cellules mâles de* NOTONECTO GLAUCA, en collaboration avec le P. Pantel, S. J.

La Société scientifique de Bruxelles adresse aux lauréats et à tous ceux que nous venons de nommer ses félicitations bien cordiales ; plusieurs des travaux qui ont provoqué les distinctions dont je viens de vous entretenir ont paru dans ses recueils et elle est justement fière d'en voir la valeur reconnue et appréciée par les institutions savantes.

Pour la Belgique, l'année 1909 est celle de la mort de Léopold II, de l'avènement du roi Albert. La Société s'est associée au deuil de la nation à la mort du roi éminent dont la politique hardie a tant fait pour étendre nos connaissances scientifiques sur le centre de l'Afrique, sur sa flore, sa faune, sa géologie, son ethnographie. Elle a acclamé son sympathique successeur sur la tête duquel reposent tant de nobles espérances et, après la dernière réunion du Conseil, elle lui a transmis par son président, l'expression de ses vœux et de son dévouement. S. M. le Roi a fait envoyer à M. De Walque, par le ministre de sa maison, le télégramme suivant :

« *Leurs Majestés profondément touchées des sentiments d'attachement à la dynastie et des vœux que les membres du Conseil de la Société scientifique de Bruxelles leur ont exprimés à l'occasion de leur avènement me chargent de vous adresser et de vous prier de transmettre à tous ceux dont vous vous êtes fait l'éloquent interprète leurs chaleureux remercîments.* »

M. le secrétaire général propose de nommer commissaires pour l'examen des comptes du trésorier, M. Ch. de la Vallée Poussin et le P. Thirion. Cette proposition est adoptée.

La parole est donnée au R. P. R. de Sinéty, S. J., pour une conférence sur *Le monisme psychobiologique*.

Cette conférence est publiée dans la REVUE DES QUESTIONS SCIENTIFIQUES, livraison du 20 juillet 1910.

II

ASSEMBLÉE GÉNÉRALE DU MERCREDI 6 AVRIL 1910

La séance s'ouvre à deux heures et demie sous la présidence de M. F. De Walque, président.

La parole est donnée à M. le Secrétaire général pour la lecture du rapport de M. le comte Domet de Vorges, empêché, sur les travaux de la *Société bibliographique de Paris en 1909-1910*.

Cette année la Société bibliographique a été frappée d'un coup imprévu. Vous savez peut-être déjà, car votre Secrétaire général en a été le témoin, comment notre dévoué et infatigable président, après avoir lu, à l'assemblée générale, un très intéressant rapport sur les fondateurs de la Société bibliographique, a été pris d'un mal subit, à ce point qu'il n'a pu sortir seul de la salle. Grâce à Dieu, le mal a cédé à des remèdes énergiques. Notre cher Président a recouvré la santé. Mais les médecins lui imposent encore de grandes précautions et ne lui ont pas permis jusqu'ici de venir présider nos réunions.

Il est suppléé dans ce qu'il ne peut faire pour le moment par notre sympathique vice-président, M. Geoffroy de Grandmaison qui a présidé depuis juillet dernier les réunions mensuelles du comité avec beaucoup de tact et de dévouement.

Aussi le pénible incident que nous venons de signaler n'a pas ralenti, comme on aurait pu le craindre, l'activité de la Société bibliographique. Les adhésions sont toujours nombreuses. Nous en avons compté treize en 1909. Pendant la même année, nous avons réparti, tant à Paris que dans les départements, 751 séries des bibliothèques renouvelables. Il n'y en avait eu que 603 en 1908. C'est une augmentation de 148 séries représentant 3700 volumes.

Le nombre total des volumes en cours était de 15 015 en 1908. En 1909 il a été porté à 18 755.

Tous ces volumes, avant d'être mis en circulation, ont été examinés par le comité de lecture de nos dames patronesses. On peut se figurer quelle somme de travail représente pour nos bureaux la manutention d'une telle quantité de livres.

Nous avons en outre un comité de publication qui prépare ou examine les travaux publiés ou à publier par la Société et un comité de propagande pour étudier les démarches de nature à exercer sur le public une influence religieuse et morale.

Nos publications régulières sont :

Le Bulletin mensuel donnant le procès verbal des séances du Conseil, des renseignements sur les faits qui intéressent la Société, des avis divers, une liste des ouvrages importants publiés dans le cours du mois, enfin une courte analyse des ouvrages approuvés par la section des publications populaires.

L'Almanach du Bon Français, brochure de 60-72 pages avec 7 gravures, petit volume plein d'anecdotes intéressantes et moralisatrices qui paraît chaque année au mois de décembre. Depuis vingt années son succès ne se dément pas.

Le **Polybiblion**, revue bibliographique universelle, dirigée par un comité de la Société bibliographique. Il donne une analyse critique de toutes les publications intéressantes du monde entier. Cette revue est très répandue à l'étranger et s'est acquis une véritable autorité dans le monde des sciences et des lettres.

La **Revue des Questions historiques**, fondée par le Marquis de Beaucourt et réorganisée dernièrement par son successeur le Cte Aymer de la Chevalerie. Elle donne tous les trois mois une livraison d'environ 350 pages, consacrée à l'étude des points obscurs de l'histoire. On y trouve des articles écrits par des hommes compétents, la plupart, anciens élèves de l'École des chartes. Elle a souvent relevé des erreurs historiques et redressé des préjugés créés par l'ignorance ou la mauvaise foi.

On voit de quel mouvement religieux et scientifique la Société bibliographique est le centre.

Plusieurs membres de la Société ont produit cette année des œuvres de grande valeur. M. le vicomte de Noailles a publié un ouvrage de premier ordre ayant pour titre : Bernard de Saxe Weimar et la réunion de l'Alsace à la France. M. le chanoine Pisani a fait un tableau vivant des derniers évêques de l'ancien régime. M. Geoffroy de Grandmaison a publié une vie de la bienheureuse mère Barat, fondatrice du Sacré-Cœur. M. Marius Sepet, auteur d'une vie de Jeanne d'Arc du plus haut intérêt, a donné cette année une petite brochure populaire : la Bienheureuse Jeanne d'Arc, son vrai caractère, pour repousser des fausses idées que l'on cherche à répandre sur cette gloire nationale.

Faut-il passer au chapitre des deuils ? Comme tous les ans, nous avons à regretter plusieurs pertes. Parmi ceux qui nous ont été plus particulièrement sensibles, citons la mort de Mgr Fulbert Petit, archevêque de Besançon. Il venait de présider le Congrès de la jeunesse catholique de Franche-Comté, qu'il avait clos par une très belle allocution aux cinq cents jeunes gens qui y avaient pris part, quand il fut enlevé le 6 décembre 1909 par une congestion pulmonaire contractée sans doute à la suite d'un refroidissement au cours de cette belle cérémonie.

Mgr de Briey, évêque de Meaux, s'était inscrit sur nos listes depuis quinze ans. Il s'est éteint le 11 décembre, à l'âge de 82 ans. Il avait rempli pendant trente années les fonctions épiscopales dans le diocèse de Meaux, d'abord comme coadjuteur, et ensuite comme titulaire.

Tout dernièrement une de nos dames patronesses les plus actives, M^{me} Roger Lambelin, femme du conseiller municipal de Paris, mourait, le 8 février, d'une maladie contractée en visitant une domestique atteinte de la diphthérie. Elle a été victime de son dévouement.

Chaque année s'allonge la liste de ces pertes douloureuses. Elles nous attristent, mais ne doivent point nous décourager. Dieu nous retire des auxiliaires précieux. Tôt ou tard il en envoie d'autres. La terre de France n'est pas encore épuisée d'hommes et de femmes de cœur et de dévouement, prêts à marcher au bon combat pour défendre les droits de Dieu et de la conscience.

La parole est ensuite donnée à M. le D^r M. D'halluin, maître de conférences à la Faculté libre de médecine de Lille, pour une conférence avec projections sur *La photographie à travers les corps opaques.*

Cette conférence sera publiée dans la REVUE DES QUESTIONS SCIENTIFIQUES.

III

ASSEMBLÉE GÉNÉRALE DU JEUDI 7 AVRIL 1910

L'assemblée de clôture, honorée de la présence de Mgr Gualtieri, Auditeur de la Nonciature, représentant S. Exc. Mgr Tacci, Nonce apostolique, empêché, et présidée par M. F. Dewalque, président, s'ouvre à deux heures et demie.

La parole est donnée à M. le Secrétaire général qui fait connaître les conclusions des commissaires chargés d'examiner les comptes du trésorier relatifs à l'année 1909. En voici les détails et le résumé.

RECETTES ET DÉPENSES DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE PENDANT L'ANNÉE 1909

Revue des Questions scientifiques

RECETTES		DÉPENSES	
Produit des abonnements fr.	8925,48	Impression, illustration et distribution . . . fr.	5765,06
Vente d'anciennes livraisons.	376,50	Collaboration	4384,50
Vente des volumes *Les Ports*	185,50	Impression du Volume III : *Les Ports*	243,95
Subside de la Société	1330,42	Administration et propagande	424,49
	10818,00		10818,00

Annales

Produits des cotisations	6704,30	Impression, illustration et distribution	3080,64
Vente d'anciens volumes	67,50	Réimpression de la brochure : *La dépopulation*	100,00
Vente des brochures : *La dépopulation*, *Le Fœticide médical*	364,50	Indemnités aux secrétaires	2580,00
	7136,30	Frais de session, location des locaux, etc. . . .	1141,86
			6902,50

Société

Produit des coupons (capital social)	3738,82	Subside à la *Revue* . . .	1330,42
Intérêts du compte courant.	401,03	Prix décerné	500,00
	4139,85		1830,42

RÉSUMÉ

Recettes	22094,15
Dépenses	19550,92
Excédent des recettes	2543,23

M. le Secrétaire général fait connaître le résultat des élections pour le Conseil général et les Bureaux des sections.

La composition du Conseil pour l'année 1910-1911 est la suivante (*) :

(*) Le nom de chaque membre du conseil est suivi de l'indication de l'année où expire son mandat.

Président d'honneur : M. A. Beernaert.
Président : M. le Dr H. Desplats (1911).
Vice-présidents : M. Éd. Van der Smissen (1911).
le R. P. Van den Gheyn (1914).
Secrétaire : M. P. Mansion (1911).
Trésorier : M. Éd. Goedseels (1912).
Membres : MM. Ch. Beaujean (1912).
le Mis de la Boëssière-Thiennes (1914).
L. Cousin (1913).
Ém. De Wildeman (1911).
Fr. Dewalque (1914).
le Dr X. Francotte (1912).
le Chanoine V. Grégoire (1913).
Ch. Lagasse-de Locht (1913).
le Cte Ad. de Limburg-Stirum (1912).
E. Pasquier (1913).
A. Proost (1914).
Ch.-J. de la Vallée Poussin (1914).
G. Van der Mensbrugghe (1911).
le Dr A. Van Gehuchten (1912).
le Dr R. Warlomont (1911).
Conseiller honoraire : M. L. De Lantsheere.

Les Bureaux des sections pour l'année 1910-1911 sont composés ainsi :

1re Section

Président : M. J. Neuberg.
Vice-présidents : M. Ch.-J. de la Vallée Poussin et le R. P. Bosmans, S. J.
Secrétaire : M. Dutordoir.

2e Section

Président : M. G. Van der Mensbrugghe.
Vice-présidents : le R. P. Schaffers, S. J., et M. A. de Hemptinne.
Secrétaire : le R. P. Lucas, S. J.

3e Section

Président : le R. P. Bolsius, S. J.
Vice-présidents : M. le Bon Greindl et M. le Chanoine Grégoire.
Secrétaire : M. F. Van Ortroy.

4e Section

Président : M. le Dr Struelens.
Vice-présidents : MM. les Drs J. De Lantsheere et L. Stouffs.
Secrétaire : M. le Dr Warlomont.

5e Section

Président : M. E. Dubois.
Vice-présidents : MM. Aug. Beernaert et Morisseaux.
Secrétaire : M. Éd. Van der Smissen.

6e Section

Président : M. P. Daubresse.
Vice-présidents : MM. Renaud et De Coster.
Secrétaire : M. R. Van der Mensbrugghe.

M. le Secrétaire général donne lecture des *Questions de concours* proposées par les sections, pour l'année 1910-1911 ; en voici les énoncés :

Première section. Soient $p_1, p_2, \ldots, p_6$ les coordonnées d'une droite mobile dans l'espace. On demande l'étude de l'équation

$$A_1 p_1 + A_2 p_2 + \cdots + A_6 p_6 = 0$$

dans laquelle les coefficients $A_1, A_2, \ldots A_6$ sont : 1° des fonctions du premier degré ; 2° des fonctions du second degré des coordonnées z_1, z_2, z_3, z_4 d'un point mobile.

Seconde section. 1. On demande des expériences nouvelles sur le timbre et notamment sur le timbre des voyelles chantées, en tenant compte des recherches antérieures sur cet objet.

2. On demande des recherches nouvelles sur l'existence possible d'états allotropiques soit de l'*Hydrogène,* soit de l'*Azote,* soit du *Chlore* (voir la communication de M. de Hemptinne, le 28 avril 1908).

Troisième section. 1. On demande une étude des caoutchoucs africains.

2. On demande une monographie géographique de la Campine.

Sixième section. Étude de la résistance de l'air au point de vue particulier de l'aviation.

La parole est donnée à M. l'abbé Th. Moreux, directeur de l'Observatoire de Bourges, pour une conférence avec projections sur *Le soleil et ses influences.*

Cette conférence sera publiée dans la REVUE DES QUESTIONS SCIENTIFIQUES.

M. Dewalque lève la séance et déclare close la session de Pâques 1910.

LISTE DES OUVRAGES

OFFERTS A LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE DE BRUXELLES

du 1er mai 1909 au 1er mai 1910

I. Livres et brochures

Alber. De l'Illusion. Un vol. in-16 de III-118 pages. Paris, Bloud, 1909.

Maurice Alliaume. Les Problèmes de Navigation résolus par la Géométrie Analytique radiale (Extrait du 5e fasc. des ANNALES DES TRAVAUX PUBLICS DE BELGIQUE, oct. 1909). Une broch. in-8° de 55 pages. Bruxelles, Goemaere, 1909.

Désiré André. Les notations mathématiques : énumération, choix et usage. Un vol. gr. in-8° de XVIII-501 pages. Paris, Gauthier-Villars, 1909.

Henryk Arctowski. L'enchaînement des Variations climatiques. Un vol. in-8° de 135 pages. Bruxelles, Société belge d'Astronomie, 1909.

H Armagnat. Congrès international des applications de l'électricité, Marseille, 1908. Rapports préliminaires (vol. I et II) ; Organisation du Congrès (vol. III). Trois vol. gr. in-8° de VI-709, 737 et 553 pages. Paris, Gauthier-Villars, 1909.

Louis Arnould. Ames en prison. L'École française des Sourdes-Muettes-Aveugles et leurs Sœurs des Deux Mondes avec préface de M. Georges Picot, 4e édition. Un vol. de 500 pages, illustré de gravures hors texte. Paris, G. Oudin et Cie.

Mariano Balcells, S. J. L'Observation solaire (MÉMOIRES DE L'OBSERVATOIRE DE L'ÈBRE, n° 2). Un vol. gr. in-4° de 133 pages. Barcelone, G. Gili, 1909.

Ballerini, S. J. Les premières pages du Pontificat du Pape Pie IX. Ouvrage posthume. Un vol. in-8° de XV-212 pages. Rome, Bretschneider, 1909.

L. Barbillon et **G. Ferroux.** Les Compteurs électriques à courants continus et à courants alternatifs (Collection : *Actualités scientifiques*). Un vol. in-12 de VII-226 pages. Paris, Gauthier-Villars, 1910.

Ch. Beaujean. La Commission pour les Maisons hygiéniques, économiques et populaires de Venise (Extrait du BULLETIN DES SOCIÉTÉS D'HABITATIONS OUVRIÈRES). Une broch. in-8° de 24 pages. Bruxelles, E. Daem, 1910.

R Blondlot. Introduction à l'étude de la Thermodynamique. Un vol. in-8° de VI-125 pages. Paris, Gauthier-Villars, 1909.

F. Boguet. Les Observations méridiennes. Théorie et pratique. Deux vol. in-18 de VIII-314 et 342-XII pages. Paris, Doin, 1909.

Émile Borel. Éléments de la Théorie des Probabilités. Un vol. in-8° de VII-191 pages. Paris, Hermann, 1909.

H. Bosmans, S. J. Lettre du P. Antoine Thomas, S. J., datée de Péking, le 8 septembre 1688 (Extrait de Archiv für die Geschichte der Naturwissenschaften und der Technik). Une broch. in-8° de 7 pages. Leipzig, Vogel, 1909.

Brettes. L'Homme et l'Univers ; t. II : Les Sciences naturelles devant la Critique. Un vol. in-8° de 653 pages. Bruxelles, Aimé Schepens, 1909.

B. Butaye, S. J. Dictionnaire kikongo-français et français-kikongo. Un vol. gr. in-8° de VIII-303-237-90 pages. Roulers, J. De Meester, 1910.

Antonio Cabreira. Les Mathématiques en Portugal. Deuxième défense des travaux de A. Cabreira. Un vol. in-8° de XXXIX-118 pages. Lisbonne, chez l'auteur, 1910.

A. Castelein, S. J. Saint Paul. Valeur de son témoignage sur le Christ, l'Église et la doctrine du Salut. Un vol. in-8° de 68 pages. Paris, Lethielleux ; Bruxelles, Goemaere, 1909.

O. D. Chwolson. Traité de physique, t. IV, 1er fasc. : Champ électrique constant (traduit du russe par E. Davaux, avec notes de E. et F. Cosserat). Un vol. gr. in-8° de VII-408 pages. Paris, A. Hermann et Fils, 1909.

P. Couturat, O. Jespersen, R. Lorenz, W. Ostwald, L. Pfaundler, M. Boubier. La Langue Internationale et la Science. Considérations sur l'introduction de la Langue Internationale dans la Science. Une broch. gr. in-8° de 63 pages. Paris, Ch. Delagrave, 1909.

J. A. Decourdemanche. Traité pratique des Poids et Mesures des peuples anciens et des Arabes. Un vol. in-8° de VIII-144 pages. Paris, Gauthier-Villars, 1910.

Georges De Leener. L'organisation agricole des chefs d'Industrie. Étude sur les Syndicats industriels en Belgique (Instituts Solvay : Travaux de l'Institut de Sociologie. Collection : *Études sociales*). Deux vol. de XX-395 pages, XXI-580 pages. Bruxelles, Misch et Thron, 1909.

Dewavrin. Le Canada économique au XXe siècle. Un vol. in-8° de 222 pages. Paris, Rivière, 1909.

P. Duhem. A propos du ΦΙΛΟΤΕΧΝΗΣ de Jordanus de Nemore (Extrait de Archiv für die Geschichte der Naturwissenschaften und der Technik). Une broch. in-8° de 5 pages. Leipzig, Vogel, 1909.

— Du temps où la Scolastique latine a connu la Physique d'Aristote, 16 pages in-8°. La Chapelle-Montligeon (Orne, France), 1909.

— Le Mouvement absolu et le Mouvement relatif (Extrait de la Revue de Philosophie). Un vol. in-8° de 284 pages. Montligeon (Orne), 1909.

— Sur la découverte de la chute des graves (Extrait des *Atti del IV Congresso internazionale dei Mathematici*). 4 pages in-4°. Rome, 1908.

— Thermodynamique et Chimie. Leçons élémentaires. Seconde édition. Un vol. gr. in-8° de XII-579 pages, avec 175 fig. Paris, A. Hermann et Fils, 1910.

— Thierry de Chartres et Nicolas de Cues (Extrait de la Revue des Sciences Philos. et Théol.). Une brochure in-8° de 7 pages. Le Saulchoir (Kain, Belgique), 1909.

— Un fragment inédit de l'« Opus Tertium » de Roger Bacon, précédé d'une étude sur ce fragment. Un vol. in-8° de 197 pages. Ad claras Aquas (Quaracchi, Florence), Coll. S. Bonav., 1909.

P. Duhem. Un précurseur français de Copernic : Nicole Oresme (1377) (Extrait de la REVUE GÉNÉRALE DES SCIENCES, 15 nov. 1909). Une broch. in-8° de 27 pages. Paris, A. Colin, 1909.

Théophile et Hélène Durand. Sylloge Florae Congolanae (Phanerogamae) (Ministère des Colonies). Un vol. in-4° de 716 pages. Bruxelles, Alb. De Boeck, 1909.

Jean Escard. Les Métaux spéciaux. Manganèse, chrome, silicium, tungstène, molybdène, vanadium et leurs composés métallurgiques industriels. Un vol. gr. in-8° de XXIV-594 pages. Paris, H. Dunod et E. Pinat, 1909.

Louis Fabry. Le Tremblement de Terre. Moyens d'éviter ses désastres, à l'usage des Architectes, des Entrepreneurs et Maçons. Un brochure in-8° de 22 pages. Marseille, PETIT ÉCLAIREUR DES ALPES ET DE PROVENCE, 1909.

Ed. A. Fouët. Leçons élémentaires sur la théorie des Fonctions analytiques, T. I. Les Fonctions en général, 2e édit. entièrement refondue. Un vol. in-8° (25 × 16) de XVI-112 pages, avec 6 fig. Paris, Gauthier-Villars, 1907.

James Geikie. Traité pratique de Géologie. Traduit et adapté de l'anglais « Structural and Field Geology », par Paul Lemoine. Préface de M. Michel-Lévy. Un vol. gr. in-8° de VII-490 pages. Paris, A. Hermann, 1910.

L. Gerard, Goffin, Lepouse. Note sur les Huiles d'Isolement. Une broch. gr. in-8°. Bruxelles, Imprimerie des Travaux publics, 1909.

A. Gerste, S. J. Notes sur la Médecine et la Botanique des anciens Mexicains. Un vol. in-8° de 161 pages. Rome, Imprim. polyglotte vaticane, 1909.

Granderye. Détermination des Roches. Un vol. in-8° de 172 pages. Paris, Gauthier-Villars et Masson, 1908.

Dr Grasset. Morale scientifique et morale Évangélique devant la sociologie (Collection : *Questions philosophiques*). Paris, Bloud, 1909.

Gabriel Guilbert. Nouvelle Méthode de Prévision du Temps. Un vol. in-8° de XXXVIII-343 pages. Paris, Gauthier-Villars, 1909.

Haton de la Goupillière. La loi des aires dans le mouvement avec liaisons (Extrait du JORNAL DE SCIENCIAS MATH., PHYS. E NATUR.). Une broch. in-8° de 15 pages. Lisbonne, Acad. Roy. des Sc., 1909).

— Mémoires divers. Une broch. gr. in-4° de 50 pages. Paris, Gauthier-Villars, 1909.

— Oscillations des bennes non guidées (Extrait des ANNALES DES MINES). Une broch. in-8° de 51 pages. Paris, Dunod et Pinat, 1909.

— Potentiel du temps de parcours (Extrait des ANNALES DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE DE BRUXELLES). Une broch. in-8° de 67 pages. Louvain, Fr. et R. Ceuterick, 1909.

— Sur un cas d'intégration de l'Équation des Brachistochrones (Extrait des COMPTES RENDUS DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES). Une broch. gr. in-4° de 11 pages. Paris, Gauthier-Villars, 1902.

Hertz. Les Bases physico-chimiques de la Chimie analytique. Un vol. in-8° de 167 pages. Paris, Gauthier-Villars, 1909.

Pierre Hoang. Catalogue des Tremblements de terre signalés en Chine d'après les sources chinoises (1767 a. C. — 1895 p. C.). Un vol. in-8°, n° 28 de la collection : *Variétés sinologiques*, VI-298 pages. Chang-Haï, Impr. de la Mission catholique, 1909.

Jules Ingenbleek. Impôts directs et indirects sur le revenu : La contribution personnelle en Belgique, l'Einkommensteuer en Prusse, l'Income-Tax en Angleterre (Instituts Solvay : Travaux de l'Institut de Sociologie. Collection : *Études sociales).* Un vol. in-8° de VIII-518 pages. Bruxelles, Misch et Thron, 1908.

Henry Janne. Sur la variation des latitudes (Extrait des Mémoires de la Société royale des Sciences de Liége). Un vol. gr. in-8° de 272 pages. Bruxelles, Hayez, 1909.

H. Lavrand. Rééducation physique et psychique. Un vol. in-16 de 121 pages. Paris, Bloud, 1909.

Ernest Lebon. Gaston Darboux. Biographie, bibliographie analytique des écrits (Collection : *Savants du jour*). Un vol. in-8° de VIII-80 pages. Paris, Gauthier-Villars, 1910.

G. Lecarpentier. Le Port de Rotterdam (Extrait des Annales des Sciences politiques, 15 nov. 1907). Une broch. in-8° de 12 pages. Paris, F. Alcan.

G. Lechalas. Étude sur l'Espace et le Temps. In-8° de II-327 pages (Collection : *Bibliothèque de Philosophie contemporaine*). Paris, F. Alcan, 1910.

B. Lefebvre, S. J. Cours d'Algèbre élémentaire à l'usage des Cours moyens et des Classes d'humanités, 3^e^ édition. Un vol. gr. in-8° de VIII-608 pages. Liége, H. Dessain, 1909.

— Recueil d'exercices et de problèmes d'Algèbre élémentaire, 3^e^ édition, considérablement augmentée. Un vol. gr. in-8° de IV-280 pages. Liége, H. Dessain, 1909.

J. Lottin. Le calcul des probabilités et les régularités statistiques (Extrait de la Revue Néo-Scolastique, févr. 1910). Une broch. in-8° de 32 pages. Louvain. Imprimerie « Nova et Vetera », 1910.

Lucas de Pesloüan. Les systèmes logiques et la logistique. Un vol. in-4° de 416 pages. Paris, Rivière, 1909.

D^r^ Joseph Maes. Les Warumbi (Extrait de Anthropos). Une broch. in-8° de 22 pages. Vienne, 1909.

Emm. de Martonne. Traité de Géographie physique (Climat, Hydrographie, Relief du sol. Biogéographie). Un fort vol. gr. in-8° de VIII-908 pages, avec 396 fig. et cartes dans le texte, 48 planches de photographies et deux planisphères en couleur hors texte. Paris, A. Colin, 1909.

Massart. Essai de Géographie botanique des districts littoraux et alluviaux de la Belgique. Un vol. in-8° de 121 pages. Bruxelles, 1908.

F. Meunier. Catalogue du Muséum d'Histoire naturelle de la Société royale de Zoologie d'Anvers. Faune de Belgique, 1^re^ partie. Un vol. in-8° de 21 pages. Anvers, Laporte et Dosse, 1909.

— Nouvelles recherches sur les Insectes du Terrain houiller de Commentry (Allier). 27 pages in-4° (Extrait des Annales de Paléontologie). Paris, Masson, 1909.

D^r^ Charles Perrier. La grande envergure et ses rapports avec la taille chez les criminels (Extrait des Archives d'Anthropologie criminelle et de Médecine légale). Un vol. gr. in-8° de 71 pages. Lyon, A. Rey, 1909.

Maurice Pontio. Analyse du Caoutchouc et de la Guttapercha. Un vol. in-8° de 170 pages. Paris, Gauthier-Villars, Masson.

J. Post et **B. Neumann.** Traité complet d'Analyse chimique appliquée aux essais industriels (traduit d'après la troisième édition allemande par M. Pellet et G. Chenu). Tome 2^{me}, deuxième fascicule. Un vol. gr. in-8° de 201-396 pages. Paris, A. Hermann et Fils, 1910.

A. Prins. La défense sociale et les transformations du droit pénal (Instituts Solvay : Travaux de l'Institut de Sociologie. Collection : *Actualités sociales*). Un vol. in-16 de 170 pages. Bruxelles, Misch et Thron, 1910.

Charles Ricquier. Les systèmes d'équations aux dérivées partielles. Un vol. gr. in-8° de XXVII-590 pages. Paris, Gauthier-Villars, 1910.

Maurice Rondet-Saint. Voyage de Circumnavigation, 1908-1909 : Italie, Égypte, Ceylan, Singapore, Extrême-Orient, Amérique du Nord, Amérique du Sud, Sénégal, Angleterre (Rapport à M. le Ministre du Commerce). Un vol. in-8° de 173 pages. Chateauroux, Badel, 1909.

W. Rouse Ball. Récréations mathématiques et problèmes des temps anciens et modernes (2^e édit. franç., traduite de l'anglais par J. Fitz-Patrick). Un vol. in-8° de 363 pages. Paris, A. Hermann et Fils, 1909.

Henri Rousset et **A Chaplet.** Les Combustions industrielles. Le Contrôle chimique de la Combustion. Un vol. in-8° de 265 pages. Paris, Gauthier-Villars, 1909.

Alexandre Russell. La Théorie des Courants alternatifs, traduit de l'anglais, par G. Séligmann-Lui). Deux vol. in-8° de 458 et 551 pages. Paris, Gauthier-Villars, 1909 et 1910.

P. Salet. Spectroscopie astronomique. Un vol. in-18 de VI-431-VIII pages. Paris, Doin, 1909.

V^{te} de Salvert. Mémoire sur l'attraction du parallélipipède ellipsoïdal, 1^{er} fasc. (Extrait des ANNALES DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE DE BRUXELLES). Un vol. gr. in-8° de 250-85-IV pages. Paris, Gauthier-Villars, 1908.

D^r H. Schloess. Introduction à l'étude des maladies mentales (traduit de l'allemand, par G. L. Ardillier. Collection : *Questions scientifiques*). Paris, Bloud, 1909.

Albert Turpain. Notions fondamentales de Télégraphie, envisagée dans son développement, son état actuel et ses derniers progrès *(Bibliothèque de l'élève-ingénieur)*. Un vol. in-8° de 180 pages avec 122 fig. Paris, Gauthier-Villars, 1910.

— Téléphonie. Du Téléphone Bell aux Multiples automatiques. Essai sur les Origines et le Développement du Téléphone *(Bibliothèque de l'élève-ingénieur)*. Un vol. in-8° de 186 pages avec 123 fig. Paris, Gauthier-Villars, 1910.

Ministère des Colonies :

Manuel pratique de la culture du caféier et du cacaoyer au Congo Belge. Un vol. gr. in-8° de 96 pages. Bruxelles, Van Campenhout, 1908.

Manuel pratique de la culture et de l'exploitation des essences caoutchoutifères indigènes et introduites au Congo Belge. Un vol. gr. in-8° de 126 pages. Bruxelles, A. Lesigne, 1909.

Études de Systématique et de Géographie botaniques, par Ém. De Wildeman, Flore du Bas et du Moyen-Congo. Un vol. in-folio de 147 pages. Bruxelles, 1909.

Ministère de l'Industrie et du Travail :

Fabrication des Explosifs et Industries connexes. Fabrication des Allumettes. Un vol. in-8° de 238 pages. Bruxelles, 1909.

Enquête sur la Pêche Maritime en Belgique. Introduction. Recensement de la Pêche Maritime. Première partie. Étude économique de la Pêche maritime, par Charles De Zuttere. Un vol. in-8° de XVI-634 pages. Bruxelles, 1909.

L'Épiscopat Français depuis le Concordat jusqu'à la séparation (1802-1905). Ouvrage publié sous la direction de la *Société bibliographique* avec le concours de 90 collaborateurs diocésains. Un vol. in-4° de XVI-720 pages. Paris, Librairie des SS. Pères, 1907.

Ferdinando Appolonio. S. Eliodoro, vescovo d'Altino (Commentario), (Collection : *Fede e Scienza*). Un broch. 20 × 12, de 68 pages. Rome, Fr. Pustet, 1910.

Charles Darwin. The Foundations of the Origin of Species. Two Essays written in 1842 and 1844. Edited by Francis Darwin. Un vol. in-8° de XXIX-263 pages. Cambridge, 1909.

L. De Ball. Theorie der astrographischen Ortsbestimmung (Extrait de SITZUNGSBERICHTEN DER KAISERL. AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN IN WIEN). Une broch. gr. in-8° de 44 pages. Wien, A. Hölder, 1909.

De Waard. Eene Correspondentie van Descartes uit de jaren 1618 en 1619 (Extrait de NIEUW ARCHIEF VOOR WISKUNDE). Une broch. in-8° de 19 pages. Amsterdam.

— Descartes en de Brekingswet (Extrait de NIEUW ARCHIEF VOOR WISKUNDE). Une broch. in-8° de 5 pages. Amsterdam.

Dusmet y Alonso. Véspidos, Euménidos y Masaridos de España. Suplemento segundo. Une broch. in-8° de 22 pages. Saragosse, 1909.

Gius. Fumagalli. La Funzione economica dei Porti. Une broch. in-4° de 105 pages. Milan, « La Gutenberg », 1909.

Agostino Gemelli, O. M. L'Enigma della Vita. Un vol. in-8° de 598 pages. Florence, Faitri, 1910.

— « Non moechaberis », Disquisitiones medicae in usum Confessariorum. Un vol. in-8° de 248 pages. Rome, Fr. Pustet, 1910.

H. V. Gill., S. J., B A. On a New Kind of Glow from Palladium in Vacuum Tubes (Extrait des PROCEEDINGS OF THE ROYAL SOCIETY, 1909). Un broch. gr. in-8° de 14 pages. Sint Martin's Lam, Harrison and Sons.

Dr F. Gomes Teixeira. Obras sobre Mathematica. Vol. II, III et V, gr. in-4° de 424, 369 et 497 pages. Coïmbra, Imprensa da Universidade, 1906 et 1909.

J. H. F. Kohlbrugge. Die Gehirnfurchen Malagischer Völker verglichen mit denen der Australier und Europäer. Ein Beitrag zur Evolutionslehre (VERHANDELINGEN DER KONINKLIJKE AKADEMIE VAN WETENSCHAPPEN TE AMSTERDAM. 2de Sectie, Deel XV, n° 1, mit 17 Tafeln). Un vol. gr. in-4° de 50-CXIX pages. Amsterdam, Johannes Müller, 1909.

P. Jos. Meier, M. S. C. Mythen und Erzählungen der Küstenbewohner der

Gazelle-Halbinsel (Neu-Pommern) im Urtext aufgezeichnet und ins deutsche übertragen. Un vol. gr. in-8° de XII-290 pages. Collection internationale de monographies ethnologiques, Bibliothèques *Anthropos*. Münster i. W., Aschendorffschen Buchhandlung, 1909.

F. Meunier. Monographie der Leptiden und der Phoriden des Bernsteins (Extrait de JAHRBUCH DER KÖNIGL. PREUSS. GEOLOG. LANDESANSTALT). Une broch. in-8° de 17 pages. Berlin, A. W. Schade, 1909.

—— Ueber einige Dipteren und eine Grabwespe (Hym.) aus der untermiocänen Braunkohle von Türnich (Rheinpreussen). 2 pages in-8° (Extraites de JAHRBUCH DER KÖNINGL. PREUSS. GEOLOG. LANDESANSTALT). Berlin, A. W. Schade, 1909.

José Joaquim Scabra et **Manuel Cicero Peregrino da Silva.** A Bibliotheca nacional em 1905. Relatorio. Une broch. gr. in-8° de 36 pages. Rio-de-Janeiro, Bibl. Nac., 1908.

P. Sisto Scaglio, O. C. R. I « Novissimi » nei monumenti primitivi della Chiesa (Collection : *Fide e Scienza*). Une broch., 20 × 12, de 99 pages. Rome, Fr. Pustet, 1910.

Somló. Der Güterverkehr in der Urgesellschaft. Un vol. in-4° de 186 pages. Bruxelles, Misch et Thron, 1909.

J. B. Trivett. The Official Year Book of New South Wales 1907-1908. Un vol. gr. in-8° de VII-564 pages. Sydney, Gullick, 1909.

International Catalogue of Scientific Litteratur : G. Mineralogy, april 1909 ; K. Palaeontology, july 1908, may 1909 ; Q. Physiology, p. I, febr. 1909 ; p. II, nov. 1908.

Carte « Folha de S. Bento » éditée par la « Commissâo Geographica e Geologica do Estado de S. Paulo » (Brésil).

Department of the Interior (Canada) : Report of the Chief Astronome for the Year ending march 31, 1907. Un vol. gr. in-8° de 257 pages. Ottawa, Dawson, 1908.

II. Périodiques

Académie des Sciences (Paris) : Comptes rendus hebdomadaires des séances.

Académie royale de médecine de Belgique (Bruxelles) :

Bulletin, 4e série, t. XXIII et XXIV.

Mémoires couronnés et autres mémoires, t. XX.

Procès verbaux des séances.

Annales de l'Académie de Mâcon (France), 3e série, t. XII.

Annales de la Faculté des sciences de l'Université de Toulouse, 2e série, t. X.

Annales de la Faculté des sciences de Marseille, t. XVII et XVIII.

Annales de la Société géologique de Belgique (Liége), t. XXXIV-XXXVI.

Annales de la Société royale Zoologique et Malacologique de Belgique (Bruxelles), t. XLIII.

Annales de Philosophie chrétienne. Paris.
Annuaire pour l'an 1910, publié par le Bureau des Longitudes (Paris).
L'Anthropologie (Paris), t. XX et XXI.
Association des Ingénieurs sortis de l'École de Liége :
  Annuaire, 5e série, t. XXII.
  Bulletin, t. XXIII et XXIV.
Bulletin de la Société astronomique de France (Paris).
Bulletin de la Société belge d'Astronomie (Bruxelles).
Bulletin de la Société Bibliographique (Paris).
Bulletin de la Société Centrale Forestière de Belgique (Bruxelles).
Bulletin de la Société royale belge de Géographique (Bruxelles).
Bulletin de la Société royale de Botanique de Belgique (Bruxelles).
Bulletin des Travaux de la Société de Pharmacie de Bordeaux.
Ciel et Terre (Bruxelles).
Le Cosmos (Paris).
L'Enseignement mathématique (Genève).
Les Études (Revue fondée par les Pères de la Compagnie de Jésus, Paris).
Institut Grand-Ducal de Luxembourg : Archives trimestrielles, section des sciences nat., phys. et math., t. IV et V.
Institut international d'Agriculture (Rome) : Bulletin de Statistique agricole.
Journal des Sciences médicales de Lille.
Laboratoire de Zoologie et de Physiologie maritimes de Concarneau (Finistère, France), t. I.
Livres et Revues (Paris).
Ministère de la Justice de Belgique (Bruxelles) : Statistique judiciaire de la Belgique (1909).
Ministère des Colonies de Belgique (Bruxelles) :
  Annales du Musée du Congo :
    Botanique, série II, t. I.
    Ethnographie et Anthropologie, série III, t. I.
La Nouvelle-France (Québec, Canada).
Observatoire de Zi-Ka-Wei (Chine) : Bulletin sismologique.
Observatoire royal de Belgique (Bruxelles) :
  Annales astronomiques, t. XII.
  Annales météorologiques, t. XVIII.
  Annuaire astronomique pour 1910.
  Annuaire météorologique pour 1910.
  Bulletin météorologique.
  Physique du Globe, t. IV.
Le Polybiblion. Partie littéraire et Partie technique (Paris).
La Réforme sociale (Paris).
Revue de Lille (Arras, France).
Revue de l'Ingénieur (Bruxelles).
Revue de Métaphysique et de Morale (Paris).
Revue de Philosophie (Paris).
Revue des Sciences ecclésiastiques (Arras, France).

Revue Économique de Bordeaux.
La Revue Générale (Bruxelles).
Revue Montalembert (Paris).
Revue Néo-Scolastique (Louvain).
Revue Philosophique (Paris).
Revue pratique d'Apologétique (Paris).
Revue semestrielle des Publications mathématiques (Amsterdam).
Société belge de Géologie, de Paléontologie et d'Hydrologie (Bruxelles) :
  Bulletin, t. XXIII.
  Procès verbaux des séances, t. XXIII et XXIV.
Société belge d'Électriciens (Bruxelles) : Bulletin mensuel.
Société des sciences de Nancy : Bulletin des séances, 3e série, t. IX et X.
Société française de Physique (Paris) :
  Bulletin des séances.
  Résumé des communications.
Société Mathématique de France (Paris) :
  Bulletin, t. XXXVIII.
Société Médicale de S. Luc, S. Côme et S. Damien (Paris) :
  Annuaire pour 1910.
  Bulletin.
Union des Ingénieurs sortis des Écoles spéciales de Louvain (Bruxelles) :
  Bulletin, 2e série, t. V.
L'Université catholique (Lyon).

Ministerie van Landbouw, Nijverheid en Handel (La Haye) : Handelsberichten.
Koninklijke Akademie van Wetenschappen (Amsterdam) :
  Proceedings of the Section of Sciences, vol. XI, p. I and II.
  Verhandelingen : 1e sectie, d. X, 1 ; 2e sectie, d. XIV, 2, 3, 4.
Nieuw Archief voor Wiskunde (Amsterdam), 2de reeks, d. IX, 1e en 2de st.
Wiskundige Opgaven met de Oplossingen (Amsterdam), d. X, 4de st.

Atti della Reale Accademia dei Lincei (Rome), vol. XVIII et XIX.
Civilta Cattolica (Rome).
Pontificia Accademia Romana dei Nuovi Lincei (Rome) :
  Atti.
  Memorie, vol XXVI.
Rivista di Filosofia Neo-scolastica (Florence).
Rivista di Fisica, Matematica e Scienze naturali (Pavie).
Rivista internazionale di Scienze sociali e disciplini ausiliarie (Rome).
La Scuola Cattolica (Milan).
Specola Vaticana (Rome) : Bulletin.

Boletin de la Sociedad Aragonesa de Cienc. nat. (Barcelone).
Boletin mensual de la Estacion Sismologica de Cartuja (Granada, Espagne).
Boletin mensual del Observatorio astronomico de Cartuja (Granada, Espagne).
Boletin mensual de l'Observatoire meteorologico de Cartuja (Granada, Espagne).

La Ciencia Tomista (Madrid).
El criterio catolico en las Ciencias medicas (Barcelone).
Razon y Fe (Madrid).

Annaes scientificos da Academia Polytechnica do Porto (Portugal) : vol. IV et V.
Broteria (S. Fiel, Portugal) :
  Série Botan., vol. VIII et IX.
  Série Zoolog., vol. VIII et IX.

Anales del Museo nacional di Montevideo, publicado bajo la direccion de J. Arechavaleta (Mexico), vol. VII.
Annuario da Faculdade livre de Philosophia e Littras di S. Paula (Brésil) : 2° anno, 1909.
Boletin del Servicio Sismologico de Chile ; 1906-1908.
Instituto Geologico de Mexico :
  Bulletin, t. II.
  Parergones, t. III.
Matto Grosso (Cuyaba, Brésil).
Revista del ministerio de Obras Publicas de Bogota (Colombie) : t. IV.
Sociedad cientifica « Antonia Alzate » (Mexico) : Memorias y Revista, t. XXV-XXVII.

The Month (Londres).
Royal Society of Edimburg :
  Proceedings, vol. XXIX et XXX.
  Transactions, vol. XLVI et XLVII.
Stonyhurst College Observatory (Angleterre) : Results of Meteorological and Magnetical Observations, 1907-1909.

America (New-York).
The American Catholic Quarterly Review (Philadelphia).
American Journal of Mathematics (Baltimore) : vol. XXXI.
American Mathematical Society (New-York) :
  Bulletin.
  Annual Register (1910).
  Catalogue of the Library (1910).
American Museum of Natural History (New-York) :
  Annual Report (1908).
  Bulletin, vol. XXIII-XXVI.
  Memoirs, vol. IX.
The Catholic World (Washington).
Missouri Botanical Garden (St-Louis, Mo.) : Report 1909.
New South Wales Statistical Register (Sydney) : Tuberculosis, 1909.
Ohio State University :
  Bulletin, vol. XII et XIII.
  Catalogue, vol. XIII.
Smithsonian Institution (Washington) : Report 1908, 1909.

United States Department of Agriculture (Washington) : Library of Congress, Card Section, Bulletin, 14, 15.

United States Geological Survey (Washington) :
- Annual report (1909).
- Bulletin, 371-403.
- Monographs, vol. XLIX.
- Professional Papers, 63-67.
- Water Supply Papers, 226-242.

United States Naval Observatory (Navy Department, Washington) : Synopsis of the Report of the Superintendent for the fiscal Year ending june 30, 1909.

University of California Publications (Sacramento) :
- Astronomy : Lick Observatory Bulletin.
- Physiology : vol. I-III.
- Zoology : vol. IV-VI.

University of Nebraska (Lincoln) : Report of the Agricultural Station, n^os^ 21, 22.

Western Australia Geological Survey (Sydney) : Bulletin, nº 37.

Yale University (New Haven) : Transactions of the Connecticut Academy of Arts and Sciences, vol. 14.

Bibliotheca Mathematica (Leipzig).

Deutsche Seewarte (Kaiserliche Marine, Berlin) :
- Annalen der Hydrographie und Maritimen Meteorologie, vol. II, 1-5.
- Zweiunddreissigster Jahresberichte über die Tätigkeit, für 1909.

Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften (Munich) :
- Abhandlungen : XXV. B., Abhandl. 1, 2, 3.
- Mathematisch-physiotralische Klasse Sitzungsberichte : Jahrg. 1910, Abhandl. 1, 2, 3, 4.

Kuffner'sche Sternwarte (Vienne) : B. VI., T. VI (Inhalt).

Verhandlungen der Naturforschenden Gesellschaft (Bâle) : Bd. XX.

Université d'Upsala (Stockholm) : Bref och skri fvelser af och till Carl von Linné. Forsta Afdelningen.

Arhiva (Soc. scientif. et litt. de Jasi, Roumanie).

Arta Romana (Jasi, Roumanie).

Journal de la Société physico-chimique russe (Saint-Pétersbourg) : Bulletin (en russe).

Sur quelques caractères lithologiques du marbre noir de Dinant

PAR

FÉLIX KAISIN
Docteur en Sciences
Professeur à l'Université de Louvain

« *Le marbre noir de Dinant* typique (V_1a *pars* de la légende de la carte géologique officielle) est un calcaire très noir, très compact, en bancs, les uns de puissance moyenne, les autres plus minces, se divisant en feuillets par altération. Il rend généralement un son métallique lorsque ses fragments tombent sur d'autres débris rocheux (1). »

L'altération à l'air lui fait prendre une patine très claire : les bancs altérés divisés en feuillets peuvent prendre l'apparence de calcschistes noirâtres plus ou moins décolorés : ils présentent souvent la teinte gris violâtre caractéristique des roches bitumineuses en voie d'altération. Le marbre noir de Dinant fournit, par calcination, une chaux d'un blanc de neige.

Bien que les caractères extérieurs du marbre noir ne soient guère de nature à faire espérer grand'chose d'une étude micrographique, nous en avons préparé un certain nombre de lames minces. Il nous a paru qu'il y avait utilité à dire, dès maintenant, ce que celles-ci nous ont appris.

Nos recherches n'étant pas terminées, on voudra bien voir dans cette communication une note préliminaire, destinée à être remplacée dans la suite par un travail plus complet, portant sur l'ensemble des caractères lithologiques du marbre noir.

---

(1) H. de Dorlodot, *Description succincte des assises du calcaire carbonifère de la Belgique* (BULL. DE LA SOC. BELGE DE GÉOL., PAL. ET HYDR., t. XXIII, Mém., p. 188).

Réduit en lames suffisamment minces, le marbre noir de Dinant devient translucide ; sous le microscope, il se montre formé principalement d'une boue calcaire très fine, pigmentée par des granulations charbonneuses, et pénétrée de calcite cristalline. Cette masse fondamentale présente, en lumière naturelle, une teinte grise assez claire, que les photographies ne rendent qu'en l'assombrissant notablement.

Sur ce fond pélitique, apparaissent, comme le montre notre photographie (pl. I, fig. 1), d'innombrables taches claires de calcite, que leur forme, à première vue, semble devoir faire rapporter toutes à des restes d'organismes. En fait, bon nombre d'entre elles peuvent être aisément reconnues pour telles : nous avons observé des débris de bryozoaires, des foraminifères pluriloculaires, des spicules de spongiaires, des débris d'échinodermes, et de nombreuses valves d'ostracodes. Une ou deux sections nous ont paru devoir être rapportées à des radiolaires. On se rappellera, à ce propos, que dans son mémoire, devenu classique, sur l'étude micrographique de dépôts secondaires et tertiaires du Bassin de Paris et de la Belgique (¹), M. L. Cayeux a démontré combien facilement les organismes siliceux, tels que les radiolaires et les spicules de spongiaires, subissent l'épigénisation par la calcite.

Mais la plus grande partie des points clairs visibles dans le champ microscopique consiste en corpuscules arrondis, de section rigoureusement circulaire ou à peu près telle, et formés d'une mince enveloppe de calcite à fibrosité radiale, entourant un noyau de calcite cristalline à clivages rhomboédriques très nets. Tantôt on constate, par l'examen entre nicols croisés, que ce noyau est constitué par un cristal unique, tantôt on y reconnaît plusieurs individus, toujours d'ailleurs en très petit nombre.

On peut attribuer à ces corpuscules diverses origines ; en dehors de l'hypothèse qui en ferait des entoolithes ou oolithes creux, on pourrait supposer qu'il s'agit de foraminifères monoloculaires,

---

(¹) L. Cayeux, *Contribution à l'Étude micrographique des Terrains sédimentaires* (Mém. de la Soc. géol. du Nord, t. IV. Lille, 1897).

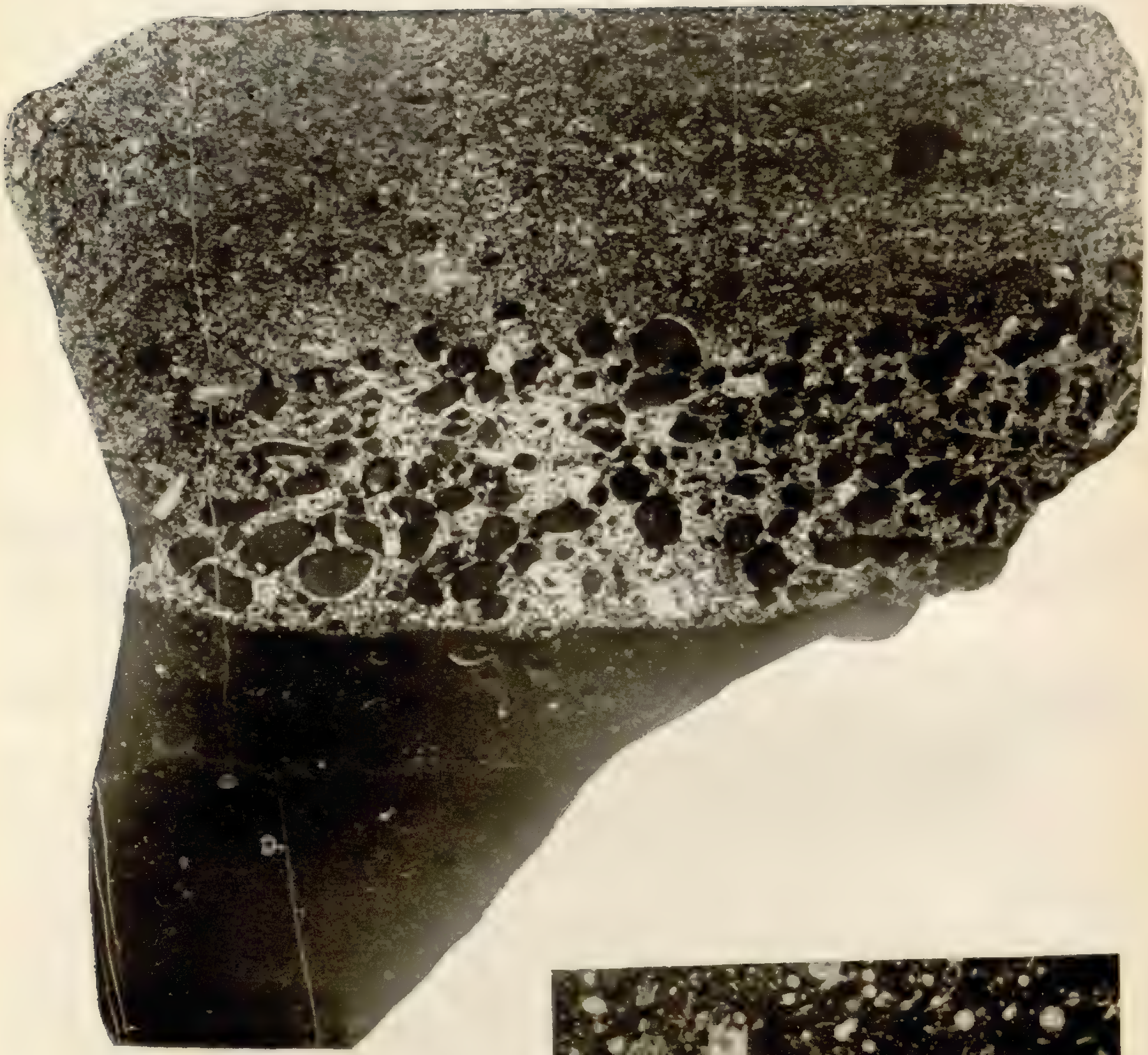


FIG. 1.

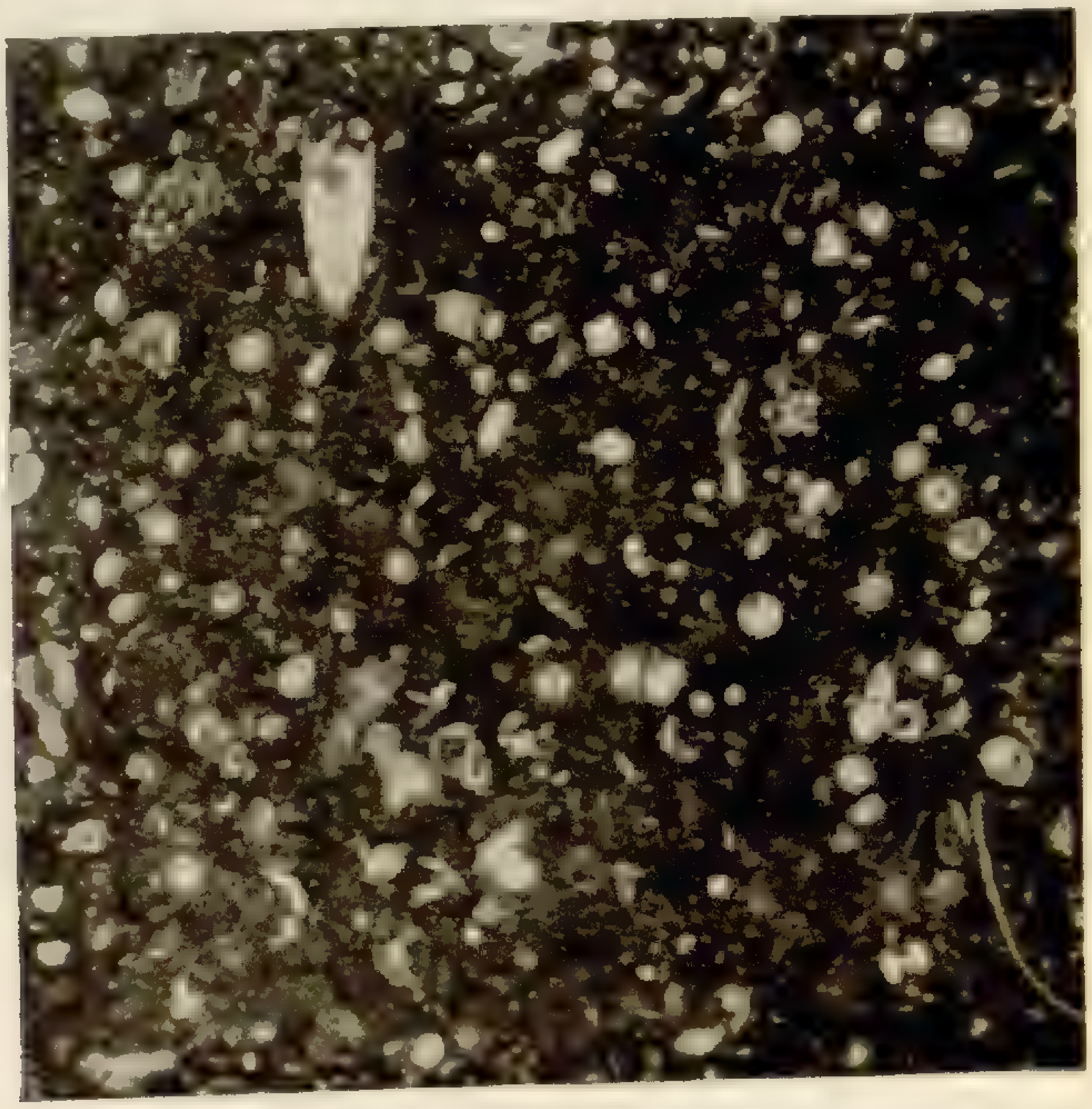


FIG. 2.

de foraminifères pluriloculaires désintégrés, ou même de radiolaires transformés en calcite.

Plusieurs coupes de ces sphérules nous ont paru montrer des perforations régulièrement disposées, dont la présence nous incline à croire qu'il ne s'agit pas d'oolithes. La présence de foraminifères est établie par certaines coupes très nettes ; celle de radiolaires est au moins probable. Il y a donc lieu, semble-t-il, d'attribuer à ces corpuscules sphériques, ou du moins à un certain nombre d'entre eux, une origine organique.

Il nous paraît impossible de préciser davantage : on voudra bien se rappeler que M. Cayeux, en étudiant les gaizes oxfordiennes à *Acanthoceras Mariae*, a rencontré un problème du même genre. Il s'agit, il est vrai, d'une roche siliceuse ; toutefois, *mutatis mutandis*, les deux préparations nous paraissent tout à fait comparables.

Voici ce qu'écrit M. Cayeux : « Il existe, dans presque tous les spécimens que j'ai étudiés, des corps globuleux répandus à profusion. (La figure 1 (pl. I) donne une idée de leur fréquence.) Ils forment communément de un tiers à la moitié de la gaize. La détermination de la plupart d'entre eux présente des difficultés insurmontables (2). »

Nous ajouterons que nous avons souvent rencontré les mêmes corpuscules dans des calcaires paléozoïques d'âges très différents. Un calcaire de l'assise de Comblain-au-Pont (F a_2d de la carte géologique du gouvernement belge, zone à Kleistopora, *pars*, de M. Vaughan) nous en a montré un assez grand nombre. Le mode d'altération très spécial de ces calcaires, qui blanchissent, deviennent poreux et friables comme de la craie, nous a permis de les traiter par lévigation. A côté de nombreuses valves d'ostracodes et de spicules de spongiaires, nous avons pu recueillir ainsi des sphérules parfaitement isolées. L'étude de leur surface ne nous a fourni jusqu'ici aucun caractère décisif.

Remarquons d'ailleurs qu'il est possible que, parmi les nombreuses sections circulaires observées, il s'en trouve à la fois qui appartiennent aux trois espèces. Il nous est souvent arrivé d'observer dans les nombreuses lames que nous avons taillées dans des calcaires carbonifériens de type très divers, de rencontrer des oolithes plus ou moins sporadiquement disséminés. Nous avons reconnu le même fait dans une belle série de coupes minces qu'a bien voulu nous communiquer M. l'abbé Delépine. M. Ch. de la Vallée Poussin, en 1888, écrivait déjà : « Je tiens que le processus oolithique a été un facteur très important dans la construction de nos calcaires carbonifères. Le microscope accuse son existence dans des bancs où l'on ne le soupçonnerait pas à l'œil nu (¹). »

---

(2) *Op. cit.*, p. 19.

Or il arrive qu'on rencontre dans les variétés les plus nettement oolithiques du calcaire carbonifère de Belgique, des corpuscules arrondis dont la section en coupe mince est absolument semblable à celle des sphérules du marbre noir. On ne peut toutefois tirer de ce fait aucune conclusion certaine, les calcaires oolithiques contenant de nombreux restes d'organismes, notamment des foraminifères pluriloculaires intacts.

La préparation représentée par la figure 1 (pl. I) a été taillée parallèlement à la stratification. Nous en avons étudié d'autres, perpendiculaires aux strates.

On sait que le marbre noir de Dinant, dont la cassure fraîche est d'un noir mat compact, laisse souvent voir, lorsqu'il est altéré, une division en couches extrêmement fines et remarquablement parallèles les unes aux autres.

En lames minces, on constate que ces strates superposées présentent entre elles des différences très nettes. Les unes sont à grain fin, très serrés, pauvres en microfossiles, les autres au contraire, de teinte plus claire dans l'ensemble, sont pour ainsi dire criblées de menus débris organiques, entre lesquels apparaît distinctement la trame de calcite qui consolide la roche.

Sous les grossissements les plus faibles, les couches ne montrent plus qu'un parallélisme très approximatif. En règle générale elles sont séparées l'une de l'autre par de minces lits charbonneux, qui apparaissent dans le champ du microscope sous forme de lignes ondulées, ou finement dentelées ainsi que le montre schématique-

---

(¹) Ch. de la Vallée Poussin, *Note sur des bancs de calcaire carbonifère renfermant des foraminifères et des cristaux de Quartz* (BULLETIN DE L'ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE, t. XV, n° 2, 1888 ; p. 7 du tiré à part).

ment la figure 1. Il n'est pas rare que ces lignes se dédoublent localement : certaines se montrent plus ou moins discontinues, et le long de quelques-unes d'entre elles, on remarque des traces indéniables de dissolution.

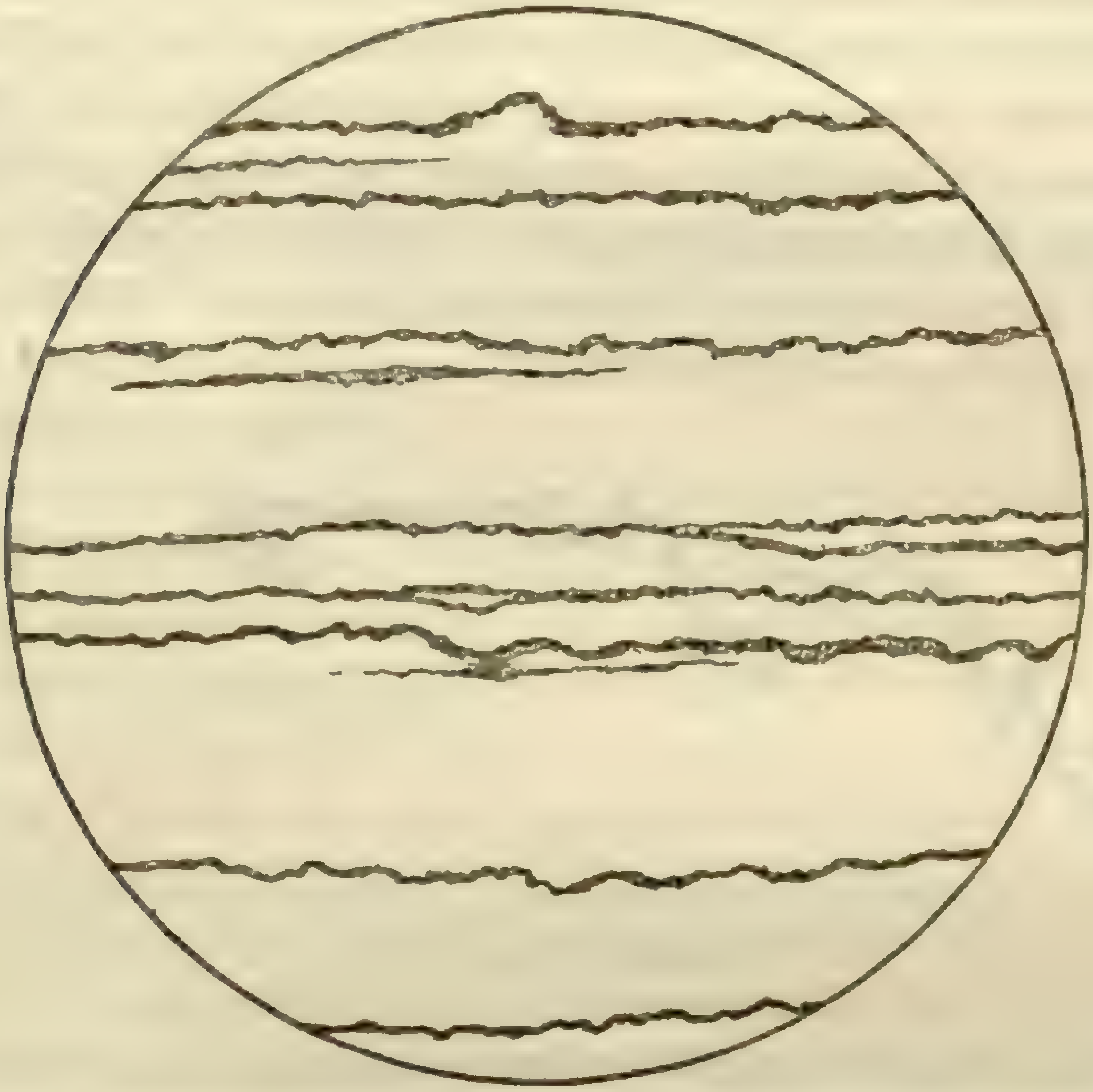


FIG. 1. — Schéma de la disposition des lits charbonneux dans le marbre noir. Grossissement d'environ 10 diamètres.

Ayant fait plusieurs lames, transversalement aux couches, dans un même échantillon, et en ayant brisé une à deux reprises au cours du sciage, nous avons pu constater que les plans de feuilletage de la roche coïncident dans leur allure générale avec les minces lits charbonneux. La cassure plane, parallèle à la stratification, ne les suit toutefois que *grosso modo*, et pour autant qu'ils ne présentent pas d'ondulations trop fortes : elle coupe celles-ci en travers lorsqu'il s'en rencontre.

Ces caractères sont exactement, en petit, la reproduction d'une structure macroscopique que montrent de nombreux calcaires, sujets à contenir ce que les ouvriers carriers désignent sous le nom de « noirùres », « terrasses » ou « limés noirs ». Il est peu de géologues dont l'attention n'ait été attirée par ces bizarres lignes sinueuses, aux allures de diagrammes (fig. 2), qui apparaissent sur la tranche des bancs, suivant en gros la trace du plan des strates. Ces lignes, qui sont presque toujours marquées par un lit charbonneux plus ou moins épais, correspondent à l'intersection de la tranche du banc avec une surface très irrégulière, chiffonnée ou mamelonnée, suivant laquelle la roche se refend de préférence, en décapitant les aspérités trop considérables. Les traces de phénomènes de dissolution abondent suivant ces surfaces qui, à notre avis, finissent toujours par devenir des joints de stratification, le long desquels chacun des bancs en contact présente une surface plus ou moins ondulée.

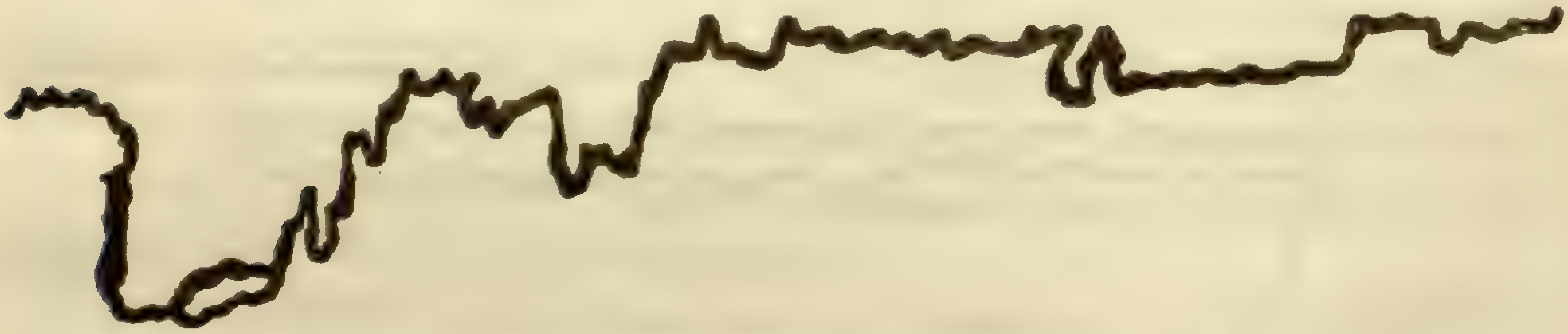


Fig. 2. — Calque de la tranche d'un lit charbonneux du marbre noir. Grandeur naturelle.

Quant aux lits de matières charbonneuses, nous pensons que leur formation est contemporaine du dépôt, et qu'ils ont, grâce à leur aptitude à s'imbiber d'eau, facilité grandement les phénomènes de dissolution du calcaire. Notre savant collègue à l'Université de Louvain, M. le chanoine de Dorlodot, nous a déclaré qu'il considère ces minces strates charbonneuses comme des nappes d'algues, étalées au moment du dépôt, sur la surface de la couche calcaire sous-jacente.

Toutefois, il n'est pas impossible que l'épaisseur de ces couches se soit accrue ultérieurement, à la faveur des phénomènes de dissolution qui éliminaient une certaine quantité du calcaire. L'attaque du marbre noir par un acide, et en général la dissolution en laboratoire, des calcaires foncés, laisse *in vitro* un résidu charbonneux noir assez abondant.

Au cours de recherches récentes faites par nous sur le territoire de la planchette de Dinant, nous avons rencontré, vers la base du marbre noir, à quelques mètres du sommet du calcaire violacé (T_2bl) un banc particulièrement intéressant, dont nous avons préparé des lames minces.

Macroscopiquement, ce banc, quoique non refendu, présentait trois zones nettement différentes ; l'inférieure, d'un noir intense et très compacte, possède les caractères du marbre noir typique, tandis que la supérieure, plutôt grise que noire, offre un aspect subgrenu, et montre, sur une cassure fraîche, d'assez nombreux points brillants de calcite. Ces deux zones sont séparées l'une de l'autre par une couche relativement mince (environ deux centimètres) à aspect nettement bréchiforme, même sur une surface tout nouvellement cassée.

L'étude de cette roche nous a montré que le caractère bréchiforme n'a aucun rapport avec l'altération de cette roche. Un coup d'œil jeté sur la photographie 2 (pl. I), suffit à s'en rendre compte. Nous ne fûmes d'ailleurs nullement surpris de le constater, ayant, à plusieurs reprises déjà, observé des choses analogues, notamment dans l'assise de Comblain-au-Pont et dans le calcaire de Neffe.

Il nous a paru utile de décrire avec quelque détail cette préparation, photographiée sous un grossissement de 1,5 pour 1.

La plaque mince a été taillée normalement au plan des strates ; elle est de grandes dimensions et montre en contact l'une avec l'autre, les trois zones décrites ci-dessus.

On voit à la partie inférieure, une section typique de marbre noir, sur le fond de laquelle se détachent en blanc des coupes d'organismes, notamment des valves d'ostracodes. La partie supérieure montre une infinité de fragments irréguliers, de petites dimensions enrobées dans de la calcite recristallisée. L'étude microscopique fait reconnaître dans ces fragments des débris de coquilles diverses, des fragments de tiges de crinoïdes, des morceaux de bryozoaires et de foraminifères. Il n'est pas rare d'y rencontrer des foraminifères pluriloculaires entiers.

Quant à la partie médiane bréchiforme, l'étude d'une lame mince montre clairement, même à la loupe, qu'elle est constituée par une masse parfaitement analogue à celle de la couche supérieure, dans laquelle sont englobés des fragments plus ou moins anguleux d'un calcaire noir compact, identique à celui de la couche inférieure, et contenant les mêmes microfossiles : spicules de spongiaires, foraminifères, corps globuleux problématiques, valves d'ostracodes, etc. Pêle-mêle avec ces fragments se trouvent des articles entiers de crinoïdes, dont on peut retrouver plusieurs sur notre photographie.

Les fragments irréguliers du calcaire noir ne sont pas localisés exclusivement dans une couche régulière : on en voit plusieurs isolés dans le calcaire subgrenu au-dessus du niveau nettement bréchiforme. Un examen attentif de la plaque en montre quelques-uns dans la masse même du calcaire noir, au voisinage de la limite supérieure. Nous observons donc ici, dans l'épaisseur d'un même banc, deux sédiments parfaitement différents, qui se sont suivis sans interruption : le plus ancien se trouve mélangé, en fragments irréguliers, à la partie inférieure du plus récent.

La continuité de la sédimentation, la régularité d'ailleurs, et la finesse de grain des bancs situés immédiatement en-dessous et au-dessus du niveau qui nous occupe, semblent bien interdire de songer à un véritable conglomérat, ayant emprunté ses gros éléments à des couches inférieures, déjà plus ou moins consolidées et soumises à une érosion. Mais il n'est nullement nécessaire qu'une roche soit devenue solide pour fournir les éléments d'une couche dont la diagenèse fera un conglomérat. M. Barrois, à propos de galets de *Cannel Coal* du terrain houiller de Bruay (1), mentionne la formation de galets de tourbe sur le littoral de la Manche, et ajoute : « Elle (la tourbe) n'est d'ailleurs pas la seule roche, semi-meuble qui présente cette particularité ; on trouve de nos jours, de Sheppey à Wissant et à Dives, sur le sable de l'estran, après les tempêtes, en avant des rives formées par ces roches, des galets d'argile éocène, crétacée, ou jurassique, roulés, ellipsoïdaux ou sphériques *(Clay balls)*, dont la surface se charge même parfois en roulant, d'un enduit protecteur de petits graviers ou de fragments de coquilles (2). »

La lecture de ce passage de la note de M. Barrois, nous a rappelé que lors de l'excursion faite à Wissant, par la Société géologique de Belgique, pendant la session extraordinaire tenue à

---

(1) ANNALES DE LA SOC. GÉOL. DU NORD, t. XXXVII, pp. 3-12.
(2) IBID., p. 7.

Boulogne, en 1904, nous avions effectué, en compagnie de M. J. Cornet, une observation tout à fait analogue.

Il est à remarquer que les recherches de M. Potonié ont établi que la consistance de certains dépôts calcaires modernes, plus ou moins mélangés de matières organiques, est très analogue à celle d'une gelée ferme. M. Potonié emploie pour la désigner, les termes allemands *Gallerte* et *Quark*, qui signifient respectivement Gelée et Caillebotte. Il distingue, suivant leur teneur en Sapropel, deux variétés, qu'il appelle *Saprokoll-Kalk* et *Kalk-Saprokoll*, et il les décrit comme suit : « Beide haben etwa die Konsistenz von festerem Quark (¹). »

Si les dépôts qui sont, par la suite, devenus nos marbres noirs, et qui semblent bien avoir été autrefois bitumineux ont possédé cette consistance gélatineuse, il est aisé de reconstituer la genèse d'une couche bréchiforme comme celle que nous venons d'étudier : une agitation exceptionnelle et très passagère de l'eau, se transmettant jusqu'à la surface du sédiment sapropéloïde, doit avoir détaché de celle-ci des sortes de grumeaux, que nous retrouvons aujourd'hui dans la couche suivante. La présence d'une boue calcaire fine dans celle-ci, aura sans doute empêché ces grumeaux de perdre complètement leur forme originairement anguleuse. Il est extrêmement probable que cette boue fine a été redissoute à peu près totalement dans la suite, pour former la trame de calcite cristalline que montre nettement cette couche (²).

Il est aisé de reproduire une structure bréchiforme bien caractérisée, en agitant une boue calcaire fine au-dessus d'une couche de gelée quelconque, occupant le fond d'un vase de Berlin. Cette

---

(¹) Dr H. Potonié, *Die Recenten Kaustobiolithe und ihre Lagerstätten* (Abhandl. des Kgl. Preuss. Geolog. Landesanstalt, Neue Folge, n° 155, p. 183).

(²) Le fait de la formation de calcite cristalline aux dépens des éléments les plus ténus d'un dépôt calcaire est parfaitement mis en lumière par l'étude microscopique de certains calcaires à foraminifères ou à ostracodes, dans lesquels les organismes sont emprisonnés dans de vastes plages de calcite cristalline, parfaitement limpide, et dont on voit souvent les clivages se prolonger à l'intérieur des coquilles.

Certains calcaires oolithiques présentent exactement la même structure.

expérience très simple nous a donné l'idée d'en instituer d'autres, relatives à la manière d'être des dépôts calcaires d'origine détritique.

Bien que nous considérions comme très délicate l'utilisation des résultats de ces essais à petite échelle, les faits que nous avons observés nous ont paru de nature à faire beaucoup réfléchir. Nous en donnerons donc ici un bref résumé.

Les matériaux utilisés dans nos expériences étaient le carbonate de calcium en poudre impalpable, obtenu par précipitation chimique, et le noir de fumée. Des mélanges de ces deux corps en proportions variées, fournissent une gamme de tons gris allant à peu près du noir au blanc, permettant de faire contraster vivement entre elles deux couches voisines. Les deux substances, passées ensemble à sec au mortier, étaient délayées dans l'eau avan-l'expérience, de manière à se rapprocher autant que possible des conditions réalisées par la nature. Une fois en suspension dans l'eau, les matériaux étaient amenés, très doucement et sans vitesse verticale, à la surface supérieure d'une colonne d'eau d'un demi-mètre de hauteur, contenue dans un vase rectangulaire à parois vitrées. Pour éviter l'agitation de l'eau dans la cuve à sédimentation, les boues délayées y étaient amenées au moyen d'un siphon, dont la longue branche était recourbée vers le haut. La différence de longueur des deux branches était en outre maintenue constante et très faible.

Un premier résultat de nos expériences a été de nous montrer combien il est difficile, au laboratoire, de réaliser la superposition de plusieurs couches *horizontales* de boue calcaire. La moindre agitation de l'eau atteignant le fond du vase, amène des ravinements et des brassages que l'on met aisément en évidence en superposant à une couche noire charbonneuse, un lit de calcaire blanc pur ; il suffit, pour agiter l'eau surmontant le premier dépôt de verser, même très doucement, la boue blanche crayeuse à la surface du demi-mètre d'eau surmontant la couche noire. On voit l'eau chargée de calcaire descendre jusqu'au fond du vase, en tourbillons dont le premier contact avec le dépôt déjà formé y produit un ravinement. Lorsqu'une certaine épaisseur de calcaire blanc a été déposée, on constate, grâce à la paroi vitrée, l'existence dans la couche claire, de quantité de linéoles, et de masses irrégulières de teinte sombre, provenant de la matière constituant la couche sous-jacente.

Notre savant confrère, le R. P. Schmitz, compte présenter, dans cette même séance, des échantillons de terrains houillers recueillis au cours de sondages en Campine, et sur lesquels il dira son sentiment : il a bien voulu nous les faire voir peu après leur découverte, et nous avons pu constater qu'ils offrent une structure absolument comparable à celles que réalisent nos expériences.

Une autre observation, à laquelle il nous paraît qu'il faut attacher de l'importance, est relative à la lenteur avec laquelle se tassent les sédiments calcaires impalpables que nous avons étudiés. Ce n'est qu'au bout d'une heure et demie environ que sous un demi-mètre d'eau, une couche de calcaire pur atteint l'épaisseur qu'elle conservera dans la suite si on ne la surcharge pas. Mais après vingt-quatre heures de repos, des grains de glauconie du Diestien des environs de Louvain, abandonnés sans vitesse à la surface de l'eau, vont s'enliser dans la boue calcaire, s'y enfoncent assez profondément, et s'arrêtent à peu près tous au même niveau, formant ainsi une couche sableuse, postérieure au calcaire qui la surmonte.

De menus fragments de craie colorée, trente-six heures après le dépôt, pénètrent encore facilement dans le sédiment en quelque sorte resté fluide et lui communiquent l'aspect d'une brèche calcaire. Après quinze jours de tassement, des fragments de calcite, de calcaire, ou de craie mouillée au préalable s'y enfouissent encore à peu près complètement ; ils y disparaissent bientôt en entier, si l'on imprime à l'eau la plus légère agitation capable d'atteindre la surface du dépôt.

Ces expériences ont été répétées en employant, au lieu de calcaire ou de craie naturelle, de menus morceaux d'un sédiment obtenu dans une expérience antérieure, et simplement séché à l'air. Les fragments enlisés avaient donc, à peu de chose près, la même composition que la pâte environnante. Malgré leur faible consistance, ils ont gardé sensiblement leur forme, et le dépôt que nous avons obtenu présentait une apparence absolument semblable à celle que montre notre photographie d'une coupe mince de marbre noir.

La constatation de ces faits pourra probablement jeter quelque lumière sur plus d'un point encore obscur des hypothèses en cours sur la formation des roches calcaires. Le présent travail n'étant qu'une note préliminaire, nous nous abstiendrons pour le moment d'énoncer des conclusions qui pourraient paraître insuffisamment appuyées.

Nous croyons toutefois pouvoir sortir de cette prudente réserve, au sujet d'une question qui, tout récemment encore, a fait l'objet d'assez vives controverses, lors de la session extraordinaire tenue à Dinant en septembre dernier par les sociétés de géologie de Belgique : nous voulons parler de l'origine des brèches du calcaire carbonifère.

Parmi les différentes brèches que renferme cet étage en Belgique, les unes, les seules que nous ayons en vue ici, ont une origine sédimentaire reconnue. Nous citerons comme exemple, les brèches *grises* du niveau $V_{2}cx$, dans la pâte desquelles M. l'abbé Delépine a trouvé des fossiles. On tend de plus en plus à considérer ces brèches comme de véritables conglomérats. M. le chanoine de Dorlodot a exprimé l'avis que des fragments de roches, arrachés à des formations préexistantes, « ont été accumulés pêle-mêle par l'action de la vague, et leurs intervalles ont été comblés... par une boue calcaire dont la matière provient de la trituration d'éléments plus grossiers » (1).

La difficulté que l'on éprouve à admettre que des fragments d'une roche aussi peu résistante que le calcaire, aient pu conserver leurs arêtes vives après avoir subi, fût-ce très peu de temps, l'action de la vague, disparaît si l'on admet que ces blocaux ont été enfoncés dans une vase molle qui devait les préserver de l'usure. Nous retrouvons cette boue calcaire dans nos brèches, dont le ciment est constitué en majeure partie par une pâte d'origine détritique à grain très fin (2). L'hypothèse que nous introduisons se justifie donc parfaitement. Elle affaiblit singulièrement, si même elle ne la résout pas en entier, la seule objection qui nous paraisse pouvoir être élevée contre l'opinion soutenue par M. de Dorlodot, sur l'origine des brèches carbonifériennes fossilifères.

---

(1) *Sur l'origine de la Grande Brèche Viséenne et sa signification tectonique* (Bulletin de la Soc. Belge de Géol., Pal. et Hydr., t. XXII, Mém., p. 30).

(2) M. Barrois semble, au contraire de ce que nous constatons dans nos brèches carbonifériennes, considérer comme un caractère général des brèches sédimentaires, l'existence d'un ciment concrétionné, formé, dit-il, « par l'action des eaux chargées de matières dissoutes, qui ont circulé à travers la masse des

Louvain, Institut Géologique de l'Université,
octobre 1909.

---

cailloux anguleux empilés » (*Observations sur une brèche du Terrain Houiller d'Ostricourt* : ANNALES DE LA SOC. GÉOLOGIQUE DU NORD, t. XXXVII, p. 44). — Cette définition ne s'applique certainement pas au ciment des brèches fossilifères dont nous nous sommes occupé.

LES ANTIQUITÉS PRÉHISTORIQUES
AUX MUSÉES DE VIENNE ET DE BUDAPEST

PAR

l'Abbé J. CLAERHOUT

En 1906, nous eûmes l'occasion d'étudier les antiquités préhistoriques aux Musées de Vienne et de Budapest. Nous nous étions proposé un triple but à atteindre : recueillir les souvenirs de la Belgique, comparer les objets que nous avions découverts avec les antiquités amenées au jour en d'autres régions, pour les mettre en relief par une étude comparative de spécimens analogues et apprécier la valeur de la galerie préhistorique de l'Autriche-Hongrie.

L'empire austro-hongrois a élevé à l'histoire naturelle un des plus superbes monuments de la ville de Vienne ; ce Musée impérial, qui a été inauguré en 1889, peut rivaliser en richesse et en magnificence avec le Musée d'histoire naturelle de Londres.

Les salles XI, XII et XIII sont consacrées aux antiquités préhistoriques ; les vitrines ont la forme d'un pupitre *(Pult.)*, surmonté d'une étagère, qui se compose de plusieurs planchettes horizontales ou d'une tablette verticale *(Aufsatz.)*. M. Hörnes, le savant archéologue qui fait partie de la direction du Musée, nous a gracieusement autorisé à travailler au Musée, aux heures auxquelles il était fermé au public.

Le Musée national de Budapest est moins monumental que celui de Vienne, mais il contient de splendides collections, relatives à l'âge du bronze.

I

Commençons par les antiquités dont le Musée de Vienne est redevable à la Belgique.

Les trois compartiments du pupitre de la 1re vitrine (Salle XI) nous exposent le Reutélien, le Mesvinien et le Strépyien de M. Rutot.

Le premier compartiment renferme un caillou de Spiennes avec de petites retouches qui proviennent des chocs qu'il a subis, un rognon et deux éclats de Zonnebeke, avec de petites usures et des étoilures que l'on peut attribuer au roulement auquel ils ont été soumis, et un rognon du fameux hameau de Reutel, qui a perdu un tubercule et a reçu quelques encoches en s'entrechoquant avec d'autres cailloux ; ces éolithes n'ont de valeur scientifique que dans l'imagination féconde de M. Rutot, de même que les pièces typiques du Mesvinien, dans lesquelles le jeu de la nature a ébauché des haches et des racloirs ; le troisième compartiment ne renferme que des imitations du Strépyien, que M. Rutot considère comme la transition entre le Mesvinien et le Chelléen.

Les salles du Musée sont décorées de belles peintures murales, qui se rapportent à la destination de ces édifices et qui ont été exécutées par les premiers paysagistes autrichiens ; nous admirons dans la Salle XI, une belle peinture de Karl Hasch, représentant les célèbres grottes de Furfooz, habitées pendant l'âge du renne, et dans lesquelles on a découvert les ossements de la race brachycéphale, qui a peuplé la Belgique aux temps néolithiques.

Sur les tablettes de la vitrine 15 (Salle XI), nous remarquons 27 haches, qui proviennent de Spiennes : elles offrent des spécimens de tous les stades que traverse la confection de la hache polie.

II

A Denterghem nous avions découvert trois pièces remarquables, notamment une très belle pointe de flèche en silex, une houe primitive en bois de cerf et une perle en bronze d'un type excessivement rare.

Il nous a été donné de rencontrer dans les deux Musées, des spécimens analogues.

Parmi les récoltes de la célèbre station de Butmir, près de Sarajevo en Bosnie, habitat et ateliers néolithiques, nous remarquons de belles pointes de flèches (Salle XI, vitrine 79). Quelques-unes se rapprochent de la pointe de flèche que nous avons recueillie dans les fouilles de la station palustre de Denterghem, mais aucune cependant ne l'égale en beauté et en finesse de travail.

Les vitrines 22-27 de la même salle contiennent les récoltes de la grande station palustre de Laibach, si remarquable par ses haches, ses pioches et ses marteaux en corne de cerf ; une pioche de la vitrine 24 a vraisemblablement été utilisée comme outil aratoire et ressemble au superbe instrument en corne de cerf, que nous avons amené au jour à Denterghem.

Nous avions recueilli aussi une perle en bronze sphérique et massive ; vainement nous avions cherché un échantillon analogue dans plusieurs des plus beaux Musées de l'Europe et dans nombre d'ouvrages archéologiques ; presque toutes les perles en bronze, de l'âge de bronze sont ovoïdes et plus ou moins allongées, ou sphériques de la dimension d'un pois, ou formées tantôt d'un fil tordu, tantôt de lamelles de bronze enroulées sur elles-mêmes, ou sphériques, soit creuses, soit ornées de cannelures ; finalement nous avons aperçu au Musée de Budapest, des perles en bronze analogues au curieux exemplaire de Denterghem, qui doit être unique en Belgique : dans la vitrine 34 (n° 8, salle I), plusieurs perles en bronze sont enfilées sur une longue ficelle : elles sont sphériques et de la dimension d'un pois, mais, de distance en distance, séparées par un intervalle d'un décimètre, on peut voir des perles sphériques massives, qui sont identiques à la perle de Denterghem et qui proviennent du gisement de Stomfa (Comitat Pozsony) !... Voilà que nos longues et patientes recherches ont été enfin couronnées de succès, au Musée de Budapest.

III

Nous ne pouvons entrer dans le détail des nombreuses notes que nous avons prises ; arrêtons-nous un moment devant les vitrines qui ont plus vivement captivé notre attention et excité notre intérêt.

Les vitrines 5-10 renferment les vestiges du paléolithique austro-hongrois.

On s'est contenté d'exposer les trouvailles de chaque station, les instruments et la faune, sans aucun souci chronologique.

Les gisements paléolithiques de l'Autriche-Hongrie se divisent en deux groupes ; les uns se trouvent dans le loess, qui couvre une grande partie de la surface de l'empire, les autres dans les cavernes ; les études des archéologues et notamment les investigations consciencieuses du savant éminent, M. l'abbé Obermaier, permettent de les fixer dans le cadre de la chronologie paléolithique.

Voici le tableau de la chronologie quaternaire, tant pour la géologie que pour l'archéologie préhistorique :

Première époque glaciaire ou *Günzien* .	
Première période interglaciaire. . . .	
Seconde époque glaciaire ou *Mindelien*.	
Seconde période interglaciaire	
Troisième époque glaciaire ou *Rissien* .	
Troisième période interglaciaire . . .	Chelléen.
Quatrième époque glaciaire ou *Würmien*.	Moustérien.
Période postglaciaire	Solutréen. Magdalénien.

Signalons les stations de Predmost en Moravie (loess), de Willendorf, arrondissement de Spitz (Basse-Autriche) (loess) et du niveau inférieur de la *Gudenushöhle,* près de Hartenstein, arrondissement de Spitz, qui se rapportent au paléolithique inférieur ou Acheuléo-moustérien et les stations de Aggsbach, arrondissement de Spitz (loess), de la grotte du prince Jean près de Lautsch, arrondissement de Lettau en Moravie et du niveau supérieur de la *Gudenushöhle,* qui appartiennent au paléolithique supérieur ou Magdalénien.

Parmi de multiples et intéressantes récoltes, nous observons :

Des couteaux, des racloirs, des éclats de silex et les ossements de Mammouth, façonnés et polis en forme de casse-tête — de la station de Predmost (vitr. 7) ;

Les couteaux, les racloirs discoïdes, allongés et en forme de feuilles de laurier, les éclats de silex, ayant subi l'action du feu et les percuteurs en serpentine — de Willendorf (vitr. 5) ;

La belle mâchoire du lion des cavernes et un crâne humain, avec grande saillie occipitale, mais sans développement des arcades sourcilières, qui n'est pas authentique, des dents percées et une belle pointe de lance en os, longue de deux décimètres — du gisement de la grotte du prince Jean (vitr. 8 et 9) ;

De fines pointes en silex portant de délicates et typiques retouches magdaléniennes et des ossements ayant subi l'action du feu — de la station des Aggsbach (vitr. 8) ;

Du bois de renne percé d'ouvertures, une omoplate de renne, dont on a découpé des aiguilles et dans laquelle on voit encore les rainures qui séparent les aiguilles destinées à être découpées et un sifflet en os, percé de deux trous, dont le dernier n'est pas achevé — de la *Gudenushöhle* (vitr. 9).

On peut étudier le néolithique austro-hongrois dans les vitrines 11-31 et 79-90 de la salle XI : les habitats se ramènent à trois catégories, d'après que les néolithiques ont occupé des grottes, des palafittes ou des *Landansiedelungen,* villages néolithiques pour lesquels on ne possède pas de terme en français et qu'on appelle improprement « stations en plein air ».

Les troglodytes néolithiques ont habité des cavernes en Moravie, dans le *Küstenland* et en Dalmatie. Les vitrines qui renferment les résultats des investigations dans ces grottes préhistoriques, nous montrent des instruments en silex, en corne et en os, des dents d'animaux et des coquilles qui ont servi de parure et de la poterie néolithique à ornementation rudimentaire. Parmi les récoltes de la *Theresienhöhle* (vitr. 13), près de Duino, arrondissement de Monfalcone (*Küstenland*), nous remarquons un sceau en poterie rougeâtre, d'un diamètre de 4 centimètres et dont la surface est divisée par des rainures en petits compartiments rectangulaires.

Parmi les antiquités lacustres, ce sont surtout les vitrines 23-27, avec les trouvailles de la riche et fameuse station de Laibach, qui méritent une mention spéciale et une étude détaillée. Signalons une collection d'ébauches de haches en bois de cerf, dans tous les stades de la confection (vitrine 24) ; — une belle collection de poignards et de poinçons en os et une pointe, le n° 37, longue d'un décimètre et si effilée qu'elle ressemble à une aiguille (même vitrine) ; — la splendide collection de haches en bois de cerf (vitrine 25) ; il y a une hache à double tranchant, parce que la racine de l'andouiller a été taillée, pour former un second tranchant ; — la vitrine 26 qui expose de nombreux spécimens des deux espèces de poterie néolithique, des cruches et des tasses pourvues d'anses, en pâte grossière, et sept vases en poterie plus fine, artistement décorée, aux creux remplis d'une substance blanche et aux dessins en losanges, en rectangles et en triangles formés de bandes au pointillé ou à tracé linéaire.

Les vitrines 79-90 de la même salle contiennent les récoltes qui ont été faites dans les fonds de cabanes et les sépultures néolithiques ; elles nous apportent un outillage et une céramique que l'on peut comparer aux instruments et à la poterie recueillis dans d'autres régions ; signalons cependant les urnes d'énorme dimension de Pucho en Hongrie, une magnifique hache en jadéite, de Dürnstein, arrondissement de Krems, longue de trois décimètres, au tranchant effilé et à ouverture pour le manche, parallèle au tranchant (vitrine 82) et la belle céramique de Schipenitz, arrondissement de Kotzman dans la Bukowine, sur laquelle le savant archéologue M. Hörnes a attiré l'attention des préhistoriens, au dernier congrès de Liége ; les vases, grandes et petites urnes, avec leur attrayante teinte rouge et leurs élégantes lignes noires, ressemblent à des vases étrusques ; il y a aussi des exemplaires très intéressants de vases doubles ; ce sont deux vases identiques qui ont une base en forme de cône tronqué, un milieu discoïde et un sommet en forme de cône tronqué, renversé : les deux vases sont associés par une rondelle en poterie en haut et un cylindre en poterie, vers le milieu.

Contre le mur, du côté des fenêtres est exposée une tombe néolithique à inhumation, dans une caisse en bois, surmontée d'une armoire vitrée : elle provient de Lengyel, Tolnauer Comitat, Hongrie. Les jambes sont repliées : à égale distance du crâne se trouvent un plat et une urne en poterie rouge, dépourvue d'ornements ; devant les os du tronc, gisent trois haches en silex, dont une à double tranchant et deux percées d'une ouverture pour le manche ; devant les ossements des jambes se voient cinq petits tuyaux : ce sont des coquilles, qui ont servi de parures.

Parcourez les salles d'un Musée ethnographique : devant vos yeux s'étale le tableau de la civilisation néolithique ; par les coutumes des tribus sauvages, vous pénétrez toutes les manifestations de l'activité des néolithiques ; celle-ci, malgré quelques divergences locales, présente partout une grande uniformité et l'Autriche-Hongrie ne constitue pas une exception à cette règle.

Les premiers âges métalliques comprennent l'âge du bronze, dont les richesses sont exposées dans les vitrines 32-78 de la salle XI et les vitrines 1-18 de la salle XII ;

La période de Hallstatt ou la transition entre l'âge du bronze et l'âge du fer, dont les antiquités se voient dans les vitrines 19-89 de la salle XII et les vitrines 1-34 et 16-86 de la salle XIII ;

L'époque de La Tène ou premier âge du fer qui est richement représentée au Musée de Vienne et dont les collections sont abritées par les vitrines 35-54 de la salle XIII.

Pour l'âge du bronze, on peut étudier à Vienne les mêmes objets que ceux qui sont exposés au Bronze Room du Musée britannique, et dans les superbes Musées d'antiquités lacustres de Zurich et de Berne.

Les antiquités de l'âge du bronze sont des trouvailles isolées ou proviennent de sépultures, de villages lacustres ou de cachettes de fondeurs. Nous admirons les énormes fibules de Pucho (vitrine 57, salle XI) : les deux plaques sont faites d'un fil en bronze, contourné en spirale ; un disque est beaucoup plus grand que l'autre ; ils sont joints par un fil transversal assez long, présentant de chaque côté quatre élégantes volutes. Les vitrines 1-18 renferment une abondante collection des formes typiques des armes, des outils et des ornements en bronze de l'âge du bronze.

La plus belle partie des trésors préhistoriques, accumulés dans le Musée de Vienne, provient du célèbre cimetière de Hallstatt, qui a donné son nom à une époque et à une civilisation, qui par ses sépultures à incinération et ses sépultures à inhumation surpasse en richesse tous les gisements de la même époque et qui a fourni au Musée de Vienne des objets de 1036 sépultures.

Les tombes à incinération contenaient de grands vases en bronze qu'on ne rencontre qu'à Hallstatt et dans la Scandinavie ; c'est ainsi qu'on peut voir dans la vitrine 31 (salle XII) les objets de la sépulture 507, une des plus intéressantes et des plus riches du cimetière de Hallstatt : on y a recueilli deux magnifiques coupes, une grande situle avec couvercle et un curieux soutien de vase ; le couvercle montre des animaux en relief de style étrusque et de forme archaïque et fantastique, et le soutien est une pièce rare et unique : il se compose de deux disques et d'une partie à jour qui les unit et qui est formée par des plaques en bronze ; le disque supérieur, qui est le plus large, est orné de roues et d'oiseaux en relief.

Des objets très singuliers aussi, ce sont les hottes, qui proviennent de sépultures de Hallberg, près de Hallstatt : deux bâtons latéraux maintiennent la hotte, faite moitié en cuir, moitié en peau ; huit lanières traversent le cuir ; la sangle est attachée en-dessous de la hotte.

On peut voir aussi dans la salle XII une sépulture de l'époque de Hallstatt : c'est la sépulture 11 du cimetière Hallstattien de Libochowan, arrondissement de Leitmeritz en Bohême : c'est une caisse cubique, remplie de terre ; l'urne avec les charbons et les os calcinés se trouve au milieu et est entourée de grosses pierres, de trois petits vases et de quatre vases de plus grande dimension, dont un vase se trouve avec l'ouverture en bas et un autre avec l'ouverture appuyée contre le col d'une cruche.

Le Musée de Vienne est également abondamment pourvu d'objets de l'époque de La Tène, qui est l'époque de la puissance, de l'expansion et de l'efflorescence des Celtes ; en observant et en étudiant les trésors archéologiques, abrités par les vitrines 35-48 de la salle XIII, on peut s'initier à la vie des Celtes et reconstituer la civilisation de l'époque de La Tène : c'est tout un passé que l'archéologie a évoqué des ombres qui enveloppaient l'origine de nos ancêtres.

« L'époque de La Tène semble ne rien tenir du passé ; les formes qu'elle présente sont nouvelles et diffèrent absolument de celles que l'âge du bronze avait connues.

» L'épée courte et rigide, à tranchant sinueux, a fait place à une longue épée remarquable par sa lame rectiligne, large et flexible. Le couteau, renonçant aux ondulations élégantes dont la tradition ne se conservera plus qu'en Orient, se redresse suivant la ligne droite et acquiert comme tous les autres instruments et outils, comme la faucille notamment, des dimensions plus grandes. La hache est quelquefois encore munie d'une douille dans le sens vertical, mais le plus souvent elle est transversalement perforée, afin de livrer passage à un manche qui n'a plus à se courber pour en faciliter l'emploi. Des restes de chariots, des roues plus ou moins évidées, des pièces nombreuses de harnachement attestent une fréquence inusitée, et une amélioration considérable des moyens de transport par voie de terre.

» Les objets de parure ont aussi bénéficié des ressources plus abondantes, mises à la disposition de l'industrie. La pâte de verre, timidement employée jusque-là pour façonner des perles de colliers petites et rares, s'épanche et s'assouplit de façon à entourer les bras d'anneaux brillamment colorés. Le casque et le ceinturon métallique qui maintient l'épée à la portée de la main, deviennent en faveur parmi les guerriers. La fibule, presque inconnue à l'âge du bronze, apparaît si abondante, qu'on peut en consacrer plusieurs à un seul et même ajustement, et afin de la rendre plus résistante, sans qu'elle perde rien de sa grâce ou de son effet décoratif, le fer s'étire en tiges déliées et acquiert par le polissage un lustre presqu'aussi flatteur que celui du bronze...

» Les motifs ornementaux qui agrémentent tous les produits supérieurs d'une technique plus experte se renouvellent aussi et se distinguent par une délicatesse de trait, un sentiment d'harmonie et une liberté d'allures encore inaperçus. Aux angles heurtés d'une décoration géométrique qui n'ose guère s'écarter de la ligne droite ont succédé les ondes, les spirales, les courbes alternantes et leurs combinaisons symétriques dont le *triquetrum* est le type le plus connu. Il n'est pas jusqu'aux êtres animés qui ne fournissent des modèles aux compositions des ornemanistes et nous rencontrons sur des fourreaux d'épée, des figures d'animaux, où la réalité et la fantaisie se fondent dans un agencement du plus heureux effet.

» Enfin, et c'est là, assurément, avec la marque la plus distinctive de l'époque, le signe le plus révélateur des progrès accomplis dans le champ de la civilisation, la monnaie avec effigie commence à apparaître et atteste un courant régulier d'échanges internationaux (¹). »

(¹) Victor Gross, *La Tène, un oppidum helvète*, p. 5. Paris, 1886.

Nous avons considéré avec une attention spéciale la vitrine 42 qui contient une belle collection de fibules de La Tène. On connaît le type de ces fibules, dont le fil présente le plus souvent un même nombre d'enroulements des deux côtés de l'arc, avant de se terminer par l'ardillon.

Dans les vitrines 43-48 on peut étudier les récoltes si intéressantes du Hradište de Stradonitz : elles présentent une si grande analogie avec les objets du célèbre oppidum de La Tène et ceux du mont Beuvray, qu'on peut les attribuer non seulement à la même époque mais à ces mêmes peuplades, dont ils attestent la puissance et qui, vers l'an 400 avant l'ère chrétienne, ont joué un rôle si important sur la scène du monde. Ces vestiges celtiques se retrouvent dans plusieurs cités et dans un grand nombre de cimetières et de tumulus. Signalons plusieurs outils en fer et en bronze, une série de fibules, des fusaïoles faites de tessons de poterie et enfin dix monnaies gauloises en or : une grande, cinq de dimension moyenne et quatre petites ; quelques-unes nous montrent la figure du cheval cornu, ce symbole si caractéristique des monnaies gauloises. Nous nous arrêtons dans la même salle devant la sépulture à inhumation de Kuffarn, près de Göttweig ; elle contient, à côté du squelette, une belle épée en fer et une situle en bronze, avec des ornements représentant un char traîné par deux chevaux et des combats.

Nous avons souvent observé que dans les collections relatives au néolithique, les Musées se contentent d'exposer des haches polies ; on ne retrouve pas cette richesse et cette variété dans l'outillage, qui donnent tant d'intérêt aux Musées belges, à ceux de Londres et de Copenhague.

Ainsi les vitrines 1, 3, 4, 5 et 6 de la première salle du Musée de Budapest abritent une superbe collection de haches polies de toutes dimensions, en silex, en néphrite, en chloromélanite et en jadéite ; la vitrine 5 contient des haches perforées pour recevoir le manche, tandis que les vitrines 2, 7 et 8 exhibent l'outillage ordinaire en bois de cerf et en os.

Dans la vitrine 9 nous pouvons étudier les spécimens connus des deux espèces de poterie néolithique, et dans la vitrine 10 des fusaïoles et des animaux fantastiques en poterie.

Avec la vitrine 11, apparaît l'âge de bronze avec les modèles connus d'armes, d'instruments et de parures. Il n'y a rien de bien saillant à signaler ; les épées des vitrines 11 et 12 ressemblent aux épées scandinaves de la première période de l'âge du bronze ; la lame est décorée de lignes et la poignée se termine en forme d'arc, auquel la lame est attachée par des clous. Il y a trois modèles de haches en bronze ; on peut voir des haches plates, qui reproduisent le type des haches en silex (vitr. 16, nos 1 à 19) ; on trouve aussi les haches à bords recourbés (vitr. 16, nos 20 à 55) et les haches à douille, munies d'une boucle de suspension (vitr. 19 et 20).

Les fibules affectent parfois des formes très originales (vitr. 26). L'une des plaques présente un fil enroulé en spirale et l'autre plaque deux fils contournés en spirale, l'un au-dessus de l'autre ; entre les deux plaques sont suspendues cinq pendeloques, façonnées d'anneaux assujettis comme les chaînons d'une chaîne.

La vitrine T nous montre un vase de l'époque de Hallstatt en forme de canard et la vitrine X dix magnifiques situles et deux roues de chariot en bronze. La vitrine Z contient une sépulture à inhumation de l'époque de Hallstatt : des pendeloques reposent sur la poitrine ; à côté du bras droit, on aperçoit la lance, au bras gauche un bracelet et à un doigt, une bague ; un fragment d'épée est déposé à côté de la jambe gauche et aux pieds on peut voir les mâchoires d'un cheval...

Dans des notes très étendues, dont nous venons de communiquer quelques extraits, nous avons pour ainsi dire dressé l'inventaire de toutes les antiquités préhistoriques, abritées par les deux Musées que nous eûmes l'avantage de visiter : elles pourront nous servir de commentaire intuitif aux savantes monographies que les préhistoriens de l'Autriche-Hongrie ont consacrées aux nombreux gisements de leur pays.

Démonstration nouvelle d'un théorème fondamental de la théorie des covariants des formes binaires

PAR

CH.-J. DE LA VALLÉE POUSSIN
Professeur à l'Université de Louvain

1. ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES POUR LE CALCUL DES COVARIANTS

Considérons une forme binaire de degré n

$$f = a_0 x_1^n + n a_1 x_1^{n-1} x_2 + \frac{n(n-1)}{1\,.\,2} a_2 x_1^{n-2} x_2^2 + \ldots + a_n x_2^n$$

et un covariant d'ordre ν de cette forme

$$C = C_0 x_1^\nu + \nu C_1 x_1^{\nu-1} x_2 + \frac{\nu(\nu-1)}{1\,.\,2} C_2 x_1^{\nu-2} x_2^2 + \ldots + C_\nu x_2^\nu$$

Les coefficients de ce covariant sont liés entre eux par des équations différentielles classiques que nous allons d'abord rappeler. Si l'on désigne, en abrégé, par Δ_1 et par Δ_2 les deux opérations :

$$\Delta_1 = a_0 \frac{\partial}{\partial a_1} + 2a_1 \frac{\partial}{\partial a_2} + \cdots + n a_{n-1} \frac{\partial}{\partial a_n},$$

$$\Delta_2 = n a_1 \frac{\partial}{\partial a_0} + (n-1) a_2 \frac{\partial}{\partial a_1} + \cdots + a_n \frac{\partial}{\partial a_{n-1}};$$

ces équations sont les suivantes :

$$\begin{array}{ll} \Delta_1 C_0 = 0 & \Delta_2 C_\nu = 0 \\ \Delta_1 C_1 = C_0 & \Delta_2 C_{\nu-1} = C_\nu \\ \Delta_1 C_2 = 2C_1 & \Delta_2 C_{\nu-2} = 2C_{\nu-1} \\ \Delta_1 C_3 = 3C_2 & \Delta_2 C_{\nu-3} = 3C_{\nu-2} \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ \Delta_1 C_\nu = \nu C_{\nu-1} & \Delta_2 C_\nu = \nu C_1 \end{array}$$

Ces deux tableaux montrent que si l'on connaît un seul coefficient d'un covariant, on en déduit tous les autres. En particulier, un covariant est complètement déterminé par son premier coefficient C_0 que l'on appelle la *source* du covariant. Les autres s'en déduisent de proche en proche en remontant le second tableau. Le covariant C se met ainsi sous la forme

$$C = C_0 x_1{}^{\nu} + \frac{\Delta_2 C_0}{1} x_1{}^{\nu-1} x_2 + \frac{\Delta_2{}^2 C_0}{1 \cdot 2} x_1{}^{\nu-2} x_2{}^2 + \cdots$$

où la loi de formation des coefficients rappelle la formule de Taylor.

De cette formule découlent immédiatement les propriétés suivantes :

1° *Si la source* C_0 *d'un covariant* C *est le produit des sources* A_0 *et* B_0 *de deux covariants* A *et* B, C *est le produit des deux covariants* A *et* B.

Soit, en effet,

$$A = A_0 x_1{}^{\lambda} + \frac{\Delta_2 A_0}{1} x_1{}^{\lambda-1} x_2 + \frac{\Delta_2{}^2 A_0}{1 \cdot 2} x_1{}^{\lambda-2} x_2{}^2 + \cdots$$

$$B = B_0 x_1{}^{\mu} + \frac{\Delta_2 B_0}{1} x_1{}^{\mu-1} x_2 + \frac{\Delta_2{}^2 B_0}{1 \cdot 2} x_1{}^{\mu-2} x_2{}^2 + \cdots$$

On a, en multipliant membre à membre, et en observant que le symbole Δ_2 se comporte comme un signe de dérivation,

$$AB = (A_0 B_0) x_1{}^{\lambda+\mu} + \frac{\Delta_2 (A_0 B_0)}{1} x_1{}^{\lambda+\mu-1} + \cdots$$

Donc AB se confond avec C, car l'ordre $\lambda+\mu$ d'un covariant est complètement fixé par le poids de son premier coefficient $A_0 B_0$.

Cette propriété est classique. On en déduit qu'il existe entre les covariants les mêmes relations qu'entre leurs sources.

Mais cette propriété admet une sorte de réciproque, qui est précisément la proposition dont nous aurons à nous servir.

2° *Si la source* C_0 *d'un covariant* C *est le produit de la source* A_0 *d'un covariant* A *par une expression* B_0, B_0 *est la source d'un covariant* B.

Soit, en effet,

$$C = (A_0B_0)\, x_1^{\lambda+\mu} + \frac{\Delta_2(A_0B_0)}{1}\, x_1^{\lambda+\mu-1}\, x_2 + \cdots ;$$

C est le produit des deux expressions

$$A = A_0 x_1^{\lambda} + \frac{\Delta_2 A_0}{1}\, x_1^{\lambda-1}\, x_2 + \cdots$$

$$B = B_0 x_1^{\mu} + \frac{\Delta_2 B_0}{1}\, x_1^{\mu-1}\, x_2 + \cdots$$

Donc $B = \frac{C}{A}$, quotient de deux covariants, est un covariant et B_0 est la source de ce covariant.

2. SEMI-INVARIANT. OBJET DE LA PRÉSENTE NOTE

On appelle *semi-invariant* ou *péninvariant* une fonction *homogène* et *de poids constant* des coefficients de la forme f qui satisfait à l'équation

$$\Delta_1 \varphi = 0$$

Donc la source d'un covariant est un semi-invariant.

Mais on peut démontrer que, réciproquement, *tout semi-invariant est la source d'un covariant.* Ce théorème est dû à Cayley (PHILOS. TRANSACT., 1856, p. 105). Il ne se trouve pas dans le *Cours d'algèbre* de Carnoy, ni dans l'ouvrage de Clebsch, il paraît supposé dans les *Leçons d'algèbre de Salmon* et il est énoncé avec une démonstration insuffisante dans la *Théorie des équations algébriques de Petersen* (traduite par H. Laurent, Gauthier-Villars, 1897). On trouvera la démonstration rigoureuse de ce théorème dans l'*Introduction à la théorie des formes binaires de Faà di Bruno* (traduction allemande par Maser, p. 158). Cette démonstration qui s'appuie sur les propriétés des symboles Δ_1 et Δ_2 exige quelques calculs, elle est assez délicate et d'ailleurs indirecte. Nous nous proposons d'abord de donner de ce théorème une démonstration plus simple, qui nous paraît nouvelle, qui n'exige pas de calculs et qui se présente tout naturellement dans un cours élémentaire. Elle s'appuie sur des considérations toutes différentes, à savoir sur la représentation des covariants à l'aide des racines. Nous commencerons par rappeler quelques théorèmes fondamentaux relatifs à cette représentation.

3. THÉORÈMES SUR LA REPRÉSENTATION A L'AIDE DES RACINES

Faisant $x_1 = x$ et $x_2 = 1$ dans la forme f, nous poserons

$$f(x) = a_0x^n + na_1x^{n-1} + \cdots = a_0(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdots (x - \alpha_n)$$

où $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ sont les n racines de l'équation $f(x) = 0$.

On a le théorème suivant :

Soit φ *un semi-invariant de degré* θ *et de poids* p *de la forme* f, *ne renfermant pas* a_0 *en facteur commun ; le quotient de* φ *par* a_0^θ *est une fonction homogène et symétrique de degré* p *des racines* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, *ce quotient sera de degré* θ *(mais non plus homogène) par rapport à chacune de ces racines en particulier, enfin ce quotient ne dépend que des différences des racines.*

En effet, le quotient considéré est encore une fonction entière de degré θ et de poids p par rapport aux quotients $\frac{a_1}{a_0}, \frac{a_2}{a_0}, \ldots,$ soit par exemple

$$\varphi_1\left(\frac{a_1}{a_0}, \frac{a_2}{a_0}, \ldots, \frac{a_n}{a_0}\right);$$

son degré par rapport aux racines est donc tel qu'on vient de le dire. Enfin, φ étant un semi-invariant, on a encore

$$\Delta_2\varphi_1 = 0,$$

ce qui exprime que φ_1 ne dépend que des différences des racines.

Nous rappellerons encore le théorème suivant, qui est bien connu et qui permet de construire un covariant d'une forme f à l'aide des racines.

Une expression symétrique des racines

$$\Sigma(\alpha_1 - \alpha_2)^\lambda \ldots (x_1 - \alpha_1x_2)^\mu \ldots$$

composée avec des différences des racines et des facteurs linéaires *contenant les variables, telle que chaque racine entre le même nombre de fois* θ *dans chaque produit et que chaque produit soit du même degré par rapport aux variables* x_1 *et* x_2 *devient un covariant en la multipliant par* a_0^{θ}.

Nous pouvons maintenant passer à la démonstration qui fait l'objet de cette étude.

4. THÉORÈME FONDAMENTAL

Tout semi-invariant est la source d'un covariant

Considérons un semi-invariant C_0, ne renfermant pas a_0 en facteur, de degré θ et de poids p. On aura, d'après le théorème rappelé en avant-dernier lieu,

$$C_0 = a_0^{\theta}\psi(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$$

où ψ est une fonction symétrique homogène de degré p des racines, et non homogène de degré θ de chaque racine.

Mais ψ ne dépendant que des différences de racines, nous pouvons soustraire α_1 de chaque racine, ce qui donne

$$\psi(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = \psi(o, \alpha_2 - \alpha_1, \alpha_3 - \alpha_1, \ldots, \alpha_n - \alpha_1).$$

Donc ψ se décompose en une somme de produits formés avec ces différences de racines comme facteurs. Si nous désignons par T_0 l'un de ces produits, nous pourrons écrire

$$\psi = \Sigma T_0,$$

où T_0 est un produit de la forme

$$T_0 = (\alpha_2 - \alpha_1)^{\lambda} (\alpha_3 - \alpha_1)^{\mu} \ldots \qquad (\lambda + \mu + \cdots = p)$$

de degré p par rapport à α_1, du même degré p par rapport à l'ensemble des autres racines $\alpha_2, \ldots, \alpha_n$, mais de degré égal ou inférieur à θ par rapport à chacune de ces dernières racines séparément.

Nous admettons, pour simplifier l'exposition, que chacune des racines $\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$ est écrite dans T_0, les exposants λ, μ, ... pouvant être nuls.

Désignons maintenant par S une somme qui s'étend aux $n!$ permutations des racines $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$; comme ψ est symétrique, on peut écrire, en effectuant toutes ces permutations sur ψ et en ajoutant

$$n!\,\psi = \Sigma(\mathrm{ST}_0).$$

Nous pouvons à l'aide de T_0 former un produit qui renferme p fois chaque racine ; il suffit d'écrire

$$T = T_0(x_1 - \alpha_2 x_2)^{p-\lambda}\,(x_1 - \alpha_3 x_2)^{p-\mu} \ldots$$

Alors, en vertu du dernier théorème rappelé tout à l'heure (n. 3), la fonction symétrique

$$a_0^p \mathrm{ST}$$

est un covariant d'ordre

$$(n-1)p - (\lambda + \mu + \cdots) = (n-2)p,$$

lequel a pour source

$$a_0^p \mathrm{ST}_0.$$

Maintenant, si nous désignons par

$$K = a_0^p \Sigma(\mathrm{ST})$$

la somme de tous les covariants analogues correspondant aux différents termes T_0 de ψ, ce sera un covariant du même ordre ayant pour source

$$K_0 = a_0^p \Sigma(\mathrm{ST}_0) = n!\,a_0^p \psi.$$

Par conséquent, puisque $C_0 = a_0^\theta \psi$ comme on l'a écrit plus haut,

$$K_0 = n!\,a_0^{p-\theta} C_0.$$

Mais $a_0^{p-\theta}$ est la source du covariant $f^{p-\theta}$; donc, d'après la remarque 2° faite au début (n° 1), C_0 est la source du covariant

$$C = \frac{1}{n!}\,\frac{K}{f^{p-\theta}},$$

qui est d'ordre

$$(n-2)p - n(p-\theta) = n\theta - 2p.$$

Ce qui prouve la proposition.

Si le semi-invariant renfermait a_0 en facteur, il serait de la forme $a_0^h C_0$ et l'on aurait encore $\Delta_1 C_0 = o$, de sorte que C_0 serait un semi-invariant ne renfermant plus a_0 en facteur. On serait ainsi ramené au cas précédent.

SUR LE

CALCUL DU POUVOIR REFROIDISSANT
DES COURANTS FLUIDES

PAR

M. l'Abbé TH. ANNYCKE
Maître de Conférences à la Faculté libre des Sciences de Lille

Ce travail n'a pas la prétention d'apporter une découverte originale ; son but, plus modeste, est simplement de développer une note de M. É. Picard insérée aux Comptes rendus de l'Académie des Sciences (sept. 1908) relative au pouvoir refroidissant des courants fluides en la rattachant à l'intéressant mémoire de M. Boussinesq sur cette question (Journal de Mathématiques pures et appliquées, années 1905, tome I : *Calcul du pouvoir refroidissant des courants fluides)*. Je me permets de reprendre le problème et d'insister sur le côté physique qui ne me paraît pas assez mis en évidence dans la note précitée.

POSITION DU PROBLÈME

Le premier des physiciens-géomètres, M. Boussinesq, pose et met en équation le problème suivant :

« Étant donné un solide fixe, plongé au sein d'une masse fluide indéfinie, animée dans son ensemble d'une vitesse uniforme et donnée V, calculer la température θ en un point quelconque de la masse fluide.

» Déduire de là la quantité de chaleur emportée par le courant pendant l'unité de temps, en d'autres termes le pouvoir refroidissant du courant fluide. »

Nous nous bornerons dans cette étude au cas où le corps fixe plongé dans le courant est un plateau mince indéfini de largeur L parallèle aux filets fluides, nous permettant de faire remarquer que les équations du problème, tant l'équation indéfinie que les équations définies aux limites, subsistent dans le cas d'un cylindre indéfini heurté par le courant normalement à l'axe ; il suffit pour cela de substituer aux coordonnées x, y les deux coordonnées curvilignes orthogonales α et β, paramètres qui définissent dans le plan normal aux génératrices, l'un α, la famille des filets fluides, l'autre β, les lignes d'égal potentiel.

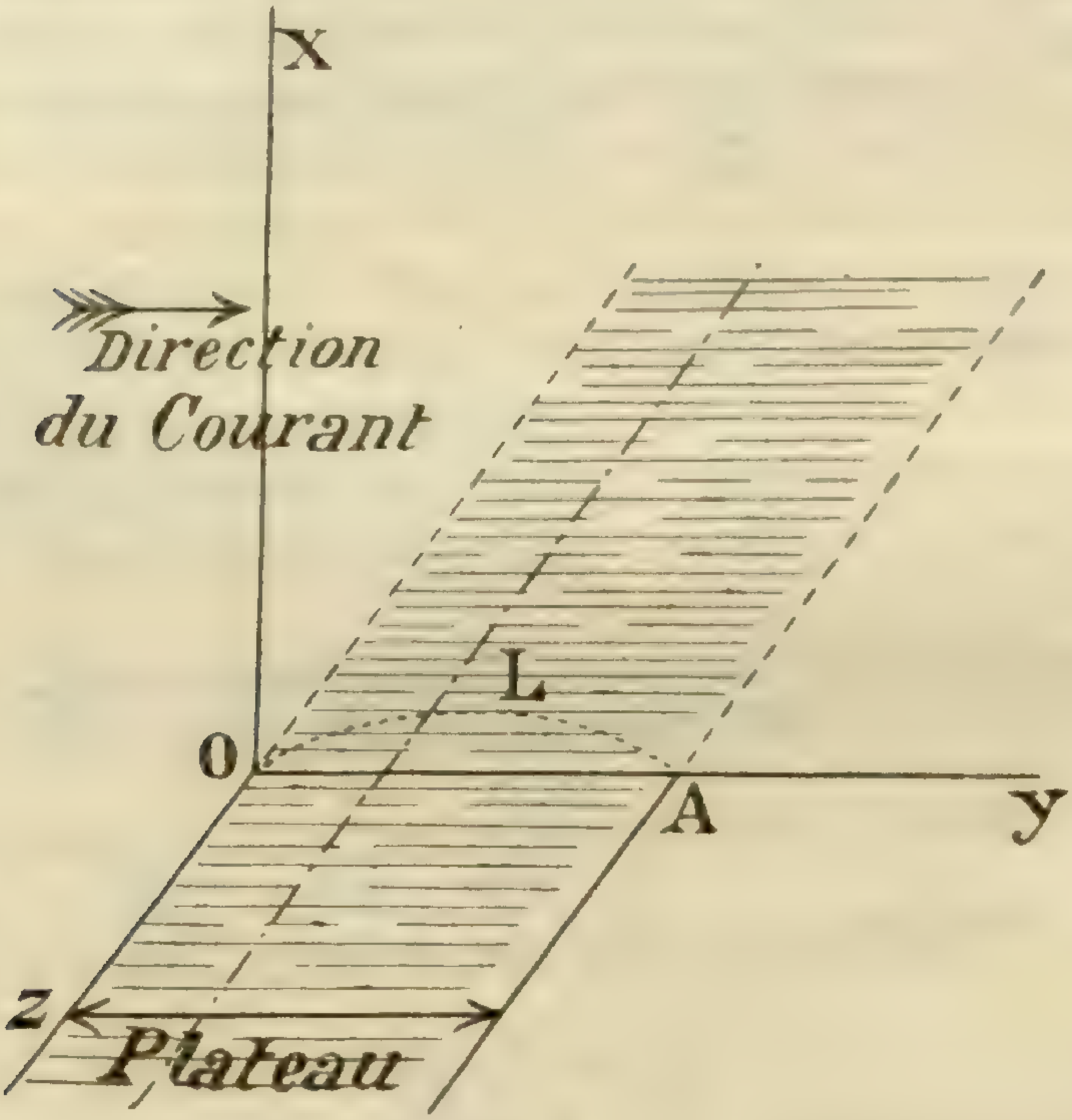


Fig. 1.

Toujours dans le but de rendre les équations du problème aussi simples que possible, nous supposerons que le fluide est athermane et que la température, variable d'une génératrice à l'autre, reste *constante* sur une *même* génératrice pendant la *durée* du phénomène.

Ces préliminaires posés, occupons-nous du cas du plateau mince. Les axes étant choisis comme l'indique la figure 1, la température de la plaque est supposée la même tout le long d'une parallèle à *oz* ; il est évident par suite que les mêmes phénomènes tant au point de vue hydrodynamique qu'au point de vue thermique vont se produire dans tout plan parallèle à *xoy*. Dès lors il nous suffit de considérer ce qui se passe dans le seul plan *xoy* (fig. 2).

En nous reportant au mémoire de M. Boussinesq déjà cité, on trouve comme équations du problème, en désignant par θ la température,

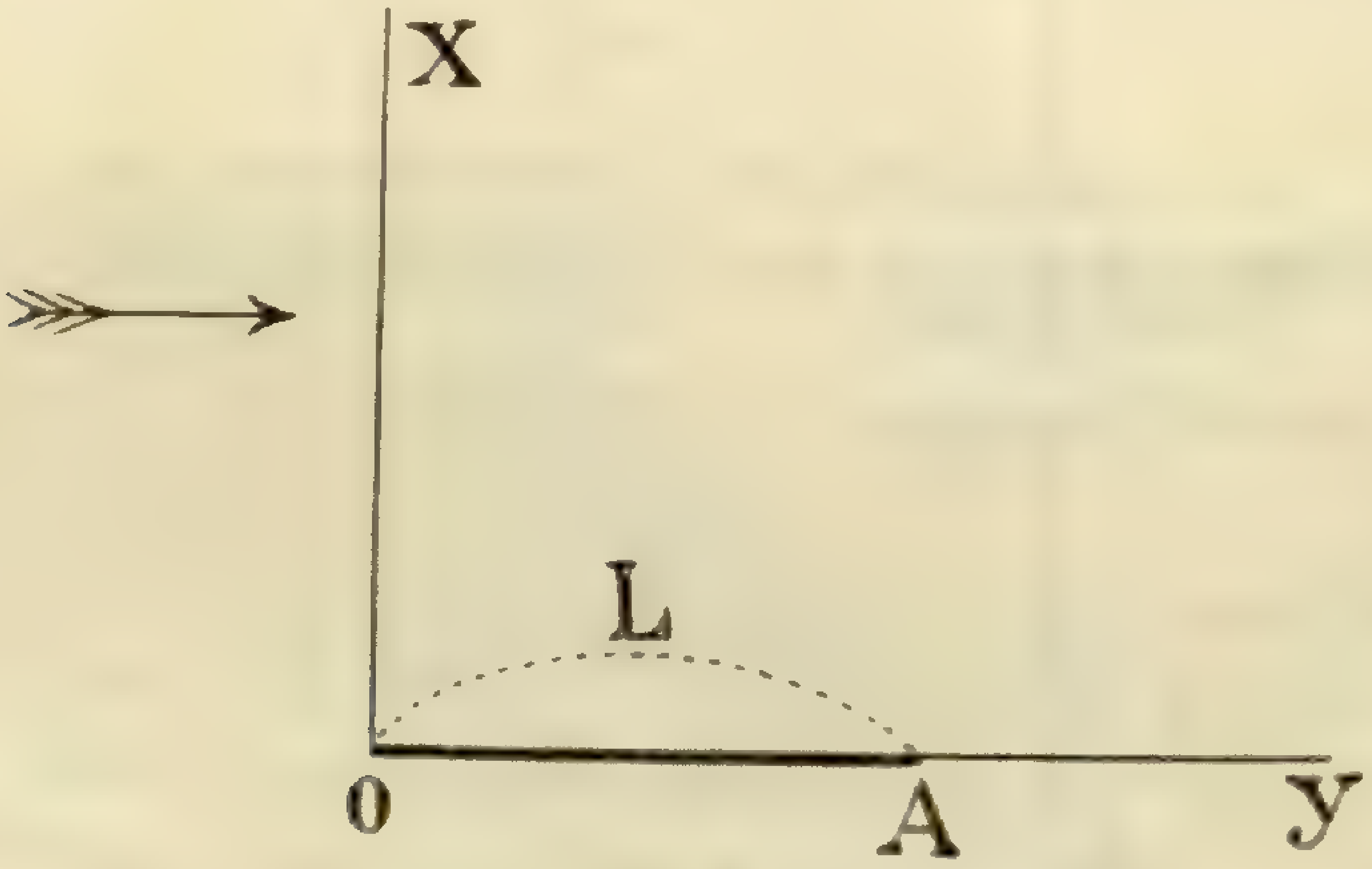


Fig. 2.

équation indéfinie : $$\frac{K}{CV}\left(\frac{d^2\theta}{dx^2}+\frac{d^2\theta}{dy^2}\right)=\frac{d\theta}{dy}\,; \qquad (1)$$

conditions aux limites
1) sur le plateau : $x=0$, $0 \leq y \leq L$;
$\theta=\theta_0=f(y)$;
2) sur une circonférence de rayon infini :
$\theta=0$.

Les lettres K, C, V ont les significations suivantes :

K désigne la conductibilité intérieure du fluide.
C » la chaleur spécifique de l'unité de volume.
V » la vitesse rectiligne et uniforme du courant fluide.

Dans la résolution de ce problème nous considérons deux cas *bien distincts :*

1) le *fluide* est MAUVAIS *conducteur de la chaleur ;*
2) le *fluide* est BON » » » .

PREMIÈRE PARTIE : LE FLUIDE EST MAUVAIS CONDUCTEUR

I. Le cas du fluide MAUVAIS conducteur de la chaleur a été traité d'une façon à la fois très élégante et péremptoire dans le mémoire de M. Boussinesq : donnons une idée de la marche suivie par le savant auteur.

Si le fluide est MAUVAIS *conducteur* de la chaleur, l'analyse du phénomène est bien simple : seul le filet *central,* c'est-à-dire le filet ayant la direction oy, s'échauffe *au contact* de la plaque et, en vertu de l'hypothèse faite sur sa conductibilité, il ne communiquera que lentement sa chaleur aux filets voisins.

Donc les valeurs notables de θ n'existent pour ces fluides que de part et d'autre de $x=0$ et pour y croissant depuis $y=0$ environ, jusqu'à $y=\infty$. Elles sont même au voisinage de $y=0$, c'est-à-dire à l'avant du corps, là où varie vite la température du filet central, incomparablement plus localisées près de $x=0$ que sur les côtés du *plateau,* ou surtout à son arrière et en aval où augmente peu à peu d'épaisseur la mince couche des filets chauffés.

Dès lors dans ce champ étroit auquel on peut se borner, θ varie très vite avec x, mais graduellement avec y.

Donc le terme $\frac{d^2\theta}{dy^2}$ de l'équation indéfinie (1) s'efface devant le terme $\frac{d^2\theta}{dx^2}$ laissant à cette équation la forme binome

$$\frac{\mathrm{K}}{\mathrm{CV}}\frac{d^2\theta}{dx^2}=\frac{d\theta}{dy} \qquad (1\text{BIS})$$

de celle de Fourier pour l'échauffement d'un mur.

M. Boussinesq obtient la solution du problème dans ce cas sous forme d'intégrale définie :

$$\theta=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f\left(y-\frac{\mathrm{CV}}{\mathrm{K}}\frac{x^2}{2\alpha^2}\right)e^{-\frac{\alpha^2}{2}}\,d\alpha.$$

On en déduit :

$$\frac{d\theta}{dx}=-\frac{\mathrm{CV}}{\mathrm{K}}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f'\left(y-\frac{\mathrm{CV}}{\mathrm{K}}\frac{\alpha^2}{2}\right)e^{-\frac{x^2}{2\alpha^2}}\,d\alpha.$$

Partant de ces résultats, on peut calculer le pouvoir refroidissant du courant fluide sur la plaque et on trouve cette loi très simple : « Le pouvoir refroidissant varie proportionnellement à $\sqrt{\frac{KCV}{L}}$, L = trajet des filets fluides sur le plateau, c'est-à-dire la largeur de celui-ci. »

Cette loi de proportionnalité du pouvoir refroidissant du courant fluide à $\sqrt{\frac{KCV}{L}}$, et c'est là l'idée intéressante du mémoire cité, M. Boussinesq l'a étendue d'abord au cas du cylindre indéfini heurté par le courant normalement à son axe ; puis au cas d'un corps de révolution, le courant ayant la direction de l'axe de rotation, et enfin à celui d'un corps de forme quelconque.

De plus, cette loi si simple obtenue par M. Boussinesq en se basant uniquement sur les considérations thermodynamiques de la théorie de la chaleur fut vérifiée *expérimentalement* par M. Compan, préparateur de physique à la Faculté des Sciences de Montpellier, en 1901, et antérieurement, en 1888, avant même que la théorie de M. Boussinesq fût ébauchée par Ser *(Traité de Physique industrielle*, tome I, pp. 142 et 162).

C'est là une heureuse confirmation des idées qui ont présidé à la théorie de M. Boussinesq (¹).

SECONDE PARTIE : LE FLUIDE EST BON CONDUCTEUR

Le problème du calcul du pouvoir refroidissant qui se résout si simplement dans le cas d'un fluide MAUVAIS conducteur est d'un abord difficile dans l'hypothèse où le fluide serait BON conducteur de la chaleur (le mercure, par exemple).

Et d'abord le terme $\frac{d^2\theta}{dy^2}$, qui dans le cas précédent était négligeable devant $\frac{d^2\theta}{dx^2}$, doit être maintenu et les équations du problème sont :

(¹) Pour les lecteurs désirant approfondir cette Première Partie, je ne puis mieux faire que de les renvoyer au savant mémoire de M. Boussinesq.

$$\left\{\begin{array}{ll} \text{équation indéfinie : } \dfrac{K}{CV}\left(\dfrac{d^2\theta}{dx^2}+\dfrac{d^2\theta}{dy^2}\right)=\dfrac{d\theta}{dy}\,; & (1) \\ \text{conditions aux limites } \left\{\begin{array}{l} 1)\ \text{sur la plaque, c'est-à-dire } x=0, \\ \quad 0 \leq y \leq L : \theta=\theta_0=f(y)\,; \\ 2)\ \text{sur un cercle de rayon infini : } \theta=0. \end{array}\right. & \end{array}\right.$$

Ce qui revient à résoudre la question suivante :

« Trouver une solution θ de (1) prenant sur OA des valeurs données et s'annulant à l'infini. »

Dans la note des Comptes Rendus, M. Picard traite le problème suivant : « Trouver une intégrale de l'équation (1) continue à l'extérieur d'un contour *régulier* Γ, prenant des valeurs données sur ce contour et s'annulant à l'infini. »

On voit la différence essentielle entre le problème tel que le pose la théorie de la chaleur et celui résolu par M. Picard : d'un côté *un segment de droite OA* qui porte la donnée, de l'autre *un contour régulier* Γ ; des difficultés essentielles dont nous donnerons la raison plus loin proviennent de la présence des pointes en O et A, et la solution proposée par M. Picard ne peut être étendue au cas qui nous occupe qu'à la condition expresse de remplacer le segment de droite OA par un contour régulier : nous pourrions prendre par conséquent une ellipse très aplatie dont le grand axe serait OA (voir fig. 3).

Cette restriction faite, suivons la marche indiquée par M. Picard.

Posant

$$\frac{K}{CV}=C',$$

il vient :

$$\frac{d^2\theta}{dx^2}+\frac{d^2\theta}{dy^2}=\frac{1}{C'}\frac{d\theta}{dy}\ (C'>0)\,;$$

puis, faisant le changement de variables :

$$\theta=e^{\frac{y}{2C'}}\,v(x,y),$$

l'équation précédente devient :

$$\frac{d^2v}{dx^2}+\frac{d^2v}{dy^2}=\frac{v}{4C'^2}.$$

Choisissant convenablement les unités pour K, C, V, on peut supposer $2C' = 1$.

Avec ce changement de variables les équations du problème sont :

$$\left\{\begin{array}{ll} \text{équation indéfinie :} & \dfrac{d^2v}{dx^2}+\dfrac{d^2v}{dy^2}=v\,; \qquad (5) \\ \text{conditions aux limites} & \left\{\begin{array}{l} \textit{sur la courbe } \Gamma : v=e^{-y}\theta_0 \textit{ (fonction donnée) ;} \\ \textit{à l'infini : } \theta=e^{y}v=0, \end{array}\right. \end{array}\right.$$

ce qui se traduit ainsi : « Étant donnée l'équation (5), trouver une solution v prenant des valeurs données sur le contour Γ et telle que $e^y v$ soit NUL à l'infini. »

Tâchons de résoudre l'équation (5) ainsi que les conditions corrélatives à l'aide d'un potentiel de double couche.

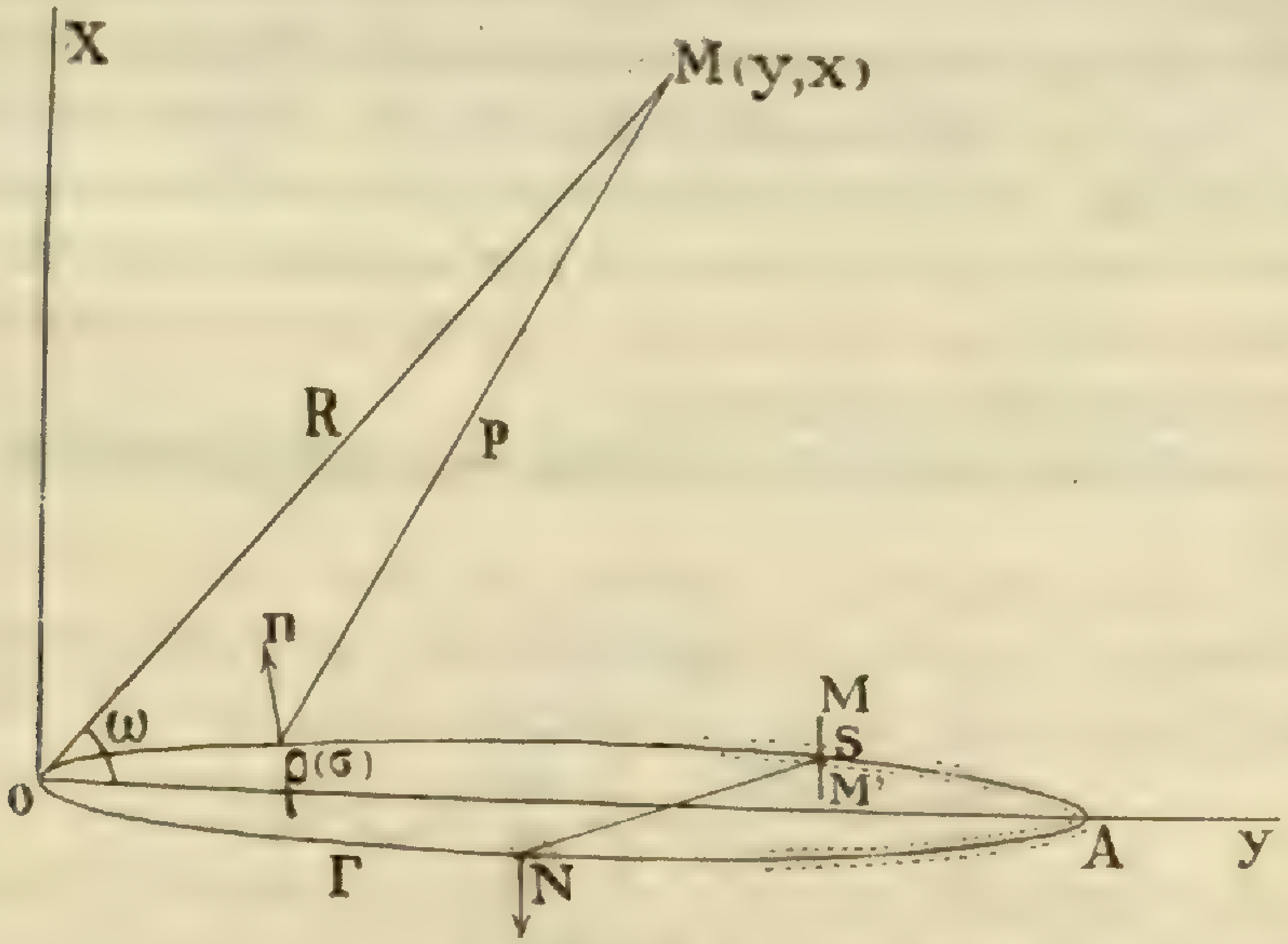


Fig. 3.

Imaginons qu'on ait étalé sur Γ une double couche de densité convenable, on pourra représenter la solution de (5) en un point quelconque du plan $M(x,y)$ par la valeur de ce potentiel au point considéré, la loi d'action, au lieu d'être $\log \frac{1}{r}$, comme dans l'attraction newtonienne, étant $u(r)$, $u(r)$ solution particulière de $\Delta^2 v = v$.

Dans ce but cherchons une intégrale particulière $u(r)$ de l'équation (5), intégrale fonction seulement de la distance r, s'annulant à l'infini et qui se comporte dans le voisinage de $r = 0$ comme $\log \frac{1}{r}$: ce problème n'est autre que celui qui correspond à l'équilibre calorifique d'une plaque isotrope indéfinie rayonnant au dehors avec une seule source et nulle à l'infini.

Cette solution $u(r)$ peut être représentée par l'intégrale définie

$$u(r) = \int_1^\infty \frac{e^{-zr}}{\sqrt{z^2-1}} dz.$$

En effet on connait la méthode de Laplace qui consiste à former pour l'équation :

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{du}{dr} - u = 0$$

une solution particulière en intégrale définie rentrant dans le type : $u = \int_p^q e^{-rz} f(z) dz$ où l'on choisira convenablement les deux limites *constantes* p et q et la fonction $f(z)$ (Cf. à ce sujet d'intéressantes applications de la méthode de Laplace : Picard, *Analyse*, tome III, pp. 372-370).

M. É. Picard énonce ensuite, *mais sans les démontrer*, les propriétés suivantes dont jouit la fonction $u(r)$ et qui sont essentielles pour la suite de cette étude.

Propriétés de la fonction $u(r)$

La fonction $u(r)$ jouit des propriétés suivantes :

1) $u(r)$ se comporte à l'origine comme $\log \frac{1}{r}$.

2) $u\sqrt{r}\, e^r$ tend vers $\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ pour r tendant vers l'infini.

3) $\frac{du}{dr}\sqrt{r}\, e^r$ tend vers $1 - \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ pour r tendant vers l'infini.

Dans aucun traité je n'ai rencontré la démonstration de ces propriétés ; j'ai tâché de la faire et me permets de proposer les solutions suivantes :

1. — *$u(r)$ se comporte dans le voisinage de l'origine comme $\log \frac{1}{r}$.*

Il suffit pour cela de démontrer que $\lim\limits_{r=0}\left(r\frac{du}{dr}\right) = -1$: égalité qui entraîne la proposition énoncée.

Or :

$$r\frac{du}{dr} = -\int_1^\infty \frac{zre^{-zr}}{\sqrt{z^2-1}}\,dz = -\int_r^\infty \frac{te^{-t}}{\sqrt{t^2-r^2}}\,dt$$

en posant $zr = t$.

Passons à la limite pour $r = 0$: il vient :

$$\lim_{r=0}\left(r\frac{du}{dr}\right) = -\int_0^\infty e^{-t}\,dt = -1.$$

La démonstration ainsi présentée manque de rigueur : raisonnons donc de la manière suivante ; soit ϵ une quantité aussi petite que l'on veut, mais fixe ; l'on peut écrire :

$$\int_r^\infty = \int_r^\epsilon + \int_\epsilon^\infty.$$

Dans l'intégrale : $\int_\epsilon^\infty$ nous pouvons faire $r = 0$ et l'on obtient :

$$\lim_{r=0}\int_\epsilon^\infty = e^{-\epsilon}.$$

Appliquons le théorème de la moyenne à $\int_r^\epsilon$.

$$\int_r^\epsilon \frac{te^{-t}}{\sqrt{t^2-r^2}}\,dt = \mathrm{M}(e^{-t})\int_r^\epsilon \frac{tdt}{\sqrt{t^2-r^2}} = \mathrm{M}(e^{-t})\left\{\sqrt{t^2-r^2}\right\}_r^\epsilon,$$

$\mathrm{M}(e^{-t})$ désignant la valeur moyenne de e^{-t} dans l'intervalle (r, ϵ). D'autre part, ϵ peut être pris de telle sorte que $\left\{\sqrt{t^2-r^2}\right\}_r^\epsilon$

soit plus petit que toute quantité donnée : ce qui prouve que sa limite est nulle pour $\epsilon = 0$. Ainsi la propriété énoncée est établie en toute rigueur.

2. — *$u\sqrt{r}\,e^r$ tend vers $+\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ pour $r = \infty$.*

Nous avons

$$u\sqrt{r}e^r = \int_1^\infty \frac{\sqrt{r}\,e^{-r(z-1)}}{\sqrt{z^2-1}}\,dz,$$

posant $z - 1 = t$,

$$u\sqrt{r}e^r = \int_0^\infty \frac{\sqrt{r}\,e^{-rt}}{\sqrt{t^2+2t}}\,dt.$$

Mais r étant positif, de même que t il vient à l'aide du changement de variables : $rt = w^2$.

$$u\sqrt{r}e^r = 2\int_0^\infty \frac{e^{-w^2}}{\sqrt{\frac{u^2}{r}+2}}\,dw.$$

Cherchons la limite de la dernière intégrale quand r tend vers l'infini. Écrivons :

$$\int_0^\infty = \int_0^L + \int_L^\infty.$$

L étant une quantité très grande, mais fixe.

L'on peut conclure immédiatement :

$$\lim_{r=\infty}\left[\int_0^L \frac{e^{-w^2}}{\sqrt{\frac{w^2}{r}+2}}\,dw\right] = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^L e^{-w^2}\,dw.$$

Reste à étudier :

$$\int_L^\infty \frac{e^{-w^2}}{\sqrt{\frac{w^2}{r}+2}}\,dw,$$

w et r tendant simultanément vers l'∞.

Mais alors de deux choses l'une :

$$\left\{\begin{array}{l}\text{ou le rapport } \dfrac{w^2}{r} \text{ reste borné} \\ \text{ou le rapport } \dfrac{w^2}{r} \text{ augmente au delà de toute limite.}\end{array}\right.$$

Envisageons la première hypothèse : dans ce cas on peut toujours trouver deux nombres b et c tels que dans l'intervalle $(\mathrm{L} < w < +\infty)$ l'on ait :

$$b < \frac{w^2}{r} < c.$$

D'où la suite d'inégalités :

$$\frac{1}{\sqrt{c+2}} \int_{\mathrm{L}}^{\infty} e^{-w^2}\, dw < \int_{\mathrm{L}}^{\infty} \frac{e^{-w^2}}{\sqrt{\frac{w^2}{r} + 2}}\, dw < \frac{1}{\sqrt{b+2}} \int_{\mathrm{L}}^{\infty} e^{-w^2}\, dw.$$

D'autre part, $\int_0^x e^{-w^2} dw$ étant une fonction *continue* pour *toute valeur de* x, l'intégrale $\int_{\mathrm{L}}^{\infty} e^{-w^2} dw$ pour L suffisamment grand peut être aussi petite qu'on veut et l'on conclut :

$$\lim_{r=\infty} \left[\int_{\mathrm{L}}^{\infty} \frac{e^{-w^2}}{\sqrt{\frac{w^2}{r} + 2}}\, dw \right] = 0.$$

Le cas de $\frac{w^2}{r}$ augmentant indéfiniment se traite de même sans plus de difficulté, et la dernière conclusion subsiste.

L'on a donc :

$$\lim_{r=\infty} \left[u\sqrt{r}\, e^r \right] = \frac{2}{\sqrt{2}} \int_0^{\infty} e^{-w^2}\, dw = +\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

3. — $\frac{du}{dr} \sqrt{r} e^r$ *tend vers* $-\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ *pour* $r = \infty$.

L'on a :

$$e^r \sqrt{r} \frac{du}{dr} = - \int_1^{\infty} \frac{z\sqrt{r}\, e^{-r(z-1)}}{\sqrt{z^2 - 1}}\, dz$$

et, posant $z - 1 = t$,

$$\frac{du}{dr}\sqrt{r}\, e^{r} = -\int_0^\infty \frac{\sqrt{r}\, e^{-rt}}{\sqrt{t^2+2t}}\, dt - \int_0^\infty \frac{t\sqrt{r}\, e^{-rt}}{\sqrt{t^2+2t}}\, dt.$$

La première intégrale est celle qui vient d'être étudiée.

Il nous suffit d'établir que la limite de la dernière intégrale est nulle pour $r = \infty$.

Avec le changement de variables

$$rt = w^2,$$

il vient :

$$\int_0^\infty \frac{t\sqrt{r}\, e^{-rt}}{\sqrt{t^2+2t}}\, dt = \frac{2}{r}\int_0^\infty \frac{w^2 e^{-w^2}}{\sqrt{\frac{w^2}{r}+2}}\, dw.$$

Par un raisonnement analogue à celui employé précédemment on établit que lorsque r tend vers l'infini,

$$\int_0^\infty \frac{w^2 e^{-w^2}}{\sqrt{\frac{w^2}{r}+2}}\, dw$$

se comporte comme

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^\infty w^2 e^{\ w^2}\, dw = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\, .$$

Donc

$$\lim_{v=\infty}\left[\frac{2}{r}\int_0^\infty \frac{w^2 e^{-w^2}}{\sqrt{\frac{w^2}{r}+2}}\, dw\right] = 0.$$

Par conséquent il reste :

$$\lim_{r=\infty}\left[\frac{du}{dr} e^{r}\sqrt{r}\right] = -\lim_{r=\infty}\left[u e^{r}\sqrt{r}\right] = -\sqrt{\frac{\pi}{2}}\, .$$

Remarque. — Il est intéressant de constater que l'on peut obtenir encore l'expression de la limite de $\frac{du}{dr}\sqrt{r}\, e^{r}$ pour $r = \infty$, de la manière suivante en appliquant la règle de l'Hopital.

Soient P la limite de $ue^{r}\sqrt{r}$ pour $r=\infty$, Q la limite de $\frac{du}{dr}e^{r}\sqrt{r}$ pour $r=\infty$, limite que nous supposons différente de 0.

Ceci posé, il est aisé de démontrer que $Q = -P$.

En effet, l'on a :

$$\frac{1}{ue^{r}\sqrt{r}} = e^{-r}\, r^{-\frac{1}{2}}$$

qui, pour $r=\infty$, prend la forme $\frac{0}{0}$.

Appliquant la règle de l'Hopital, il vient :

$$\lim_{r=\infty}\left(\frac{1}{ue^{r}\sqrt{r}}\right)=\frac{1}{P}=\lim_{r=\infty}\left[-\frac{e^{-r}\, r^{-\frac{1}{2}}}{\frac{du}{dr}}-\frac{1}{2}\,\frac{e^{-r}\, r^{-\frac{3}{2}}}{\frac{du}{dr}}\right],$$

c'est-à-dire

$$\frac{1}{P}=-\frac{1}{Q}-\frac{1}{2}\,\frac{1}{r}\,\frac{1}{Q}.$$

Et puisque nous supposons $Q \neq 0$, il reste pour $r=\infty$,

$$P=-Q\,; \qquad Q=-\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,.$$

Les propriétés dont jouit la fonction $u(r)$, propriétés d'ailleurs *essentielles* pour la suite des raisonnements étant ainsi établies, nous pouvons passer à l'expression de la solution du problème sous la forme d'une sorte de potentiel de double couche.

Expression de la solution du problème

Appelons $\rho(\sigma)$ la densité convenablement choisie de la couche double étalée sur Γ, la loi d'action étant $u(r)$.

Le potentiel en un point quelconque du plan $M(x, y)$ dû à l'ensemble des actions exercées par la double couche sur ce point, a pour expression :

$$v=\int_{\Gamma}\rho(\sigma)\,\frac{du}{dn}\,d\sigma.$$

Or

$$\frac{du}{dn} = \frac{du}{dr}\frac{dr}{dn} = -\frac{du}{dr}\cos(r, n),$$

il vient :

$$v = -\int_\Gamma \rho(\sigma)\frac{du}{dr}\cos(r, n)d\sigma.$$

Or nous avons démontré que dans le voisinage de $r = 0$, $u(r)$ se comportait comme $\log\frac{1}{r}\cdot$

D'autre part, l'on sait (d'Adhémar, *Problème de Dirichlet et Neumann*) que le potentiel logarithmique jouit des propriétés suivantes :

1. Il est discontinu pour le passage à travers la courbe Γ, et l'on a :

$$v_i = v_s + \pi\rho(s)\,; \qquad v_e = v_s - \pi\rho(s),$$

v_e désigne la valeur limite de v quand M tend vers S en restant à l'*extérieur* de Γ ;

v_i désigne la valeur limite de v quand M tend vers S en restant à l'*intérieur* de Γ ;

v_s désigne la valeur de v au point S lui-même.

2. La dérivée normale est *continue* pour le passage à travers Γ, ou encore, d'une façon plus précise puisque les dérivées normales de v n'ont pas nécessairement des limites sur la courbe Γ, on a :

$$\lim_{Ms = M's = 0}\left[\left(\frac{dv}{dn}\right)_M - \left(\frac{dv}{dn}\right)_{M'}\right] = 0,$$

M et M′ désignant deux points sur la normale, l'un intérieur, l'autre extérieur et équidistants de S (voir fig. 3).

Puisque nous avons démontré que la fonction $u(r)$ se comportait comme $\log\frac{1}{r}$ dans le voisinage de $r=0$, les propriétés qui viennent d'être énoncées pour le potentiel de double couche logarithmique subsistent évidemment pour le pseudo-potentiel de double couche de loi d'action $u(r)$.

Vérifions donc que l'intégrale : $v = -\int_\Gamma \rho(\sigma)\frac{du}{dr}\cos(r, n)d\sigma$

où $\rho(\sigma)$ est une densité convenable, permet de résoudre le problème proposé.

α) Et d'abord la fonction v représentée par cette intégrale définie satisfait à l'équation indéfinie :

$$\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{d^2v}{dy^2} = v. \tag{5}$$

Cela résulte de la façon même dont nous avons choisi $u(r)$.

β) La fonction v ainsi déterminée satisfait aux conditions définies aux limites.

En effet constatons que :

$$e^y v = 0 \text{ pour } r = \infty.$$

L'on a démontré plus haut que :

$$\lim_{r=\infty} \left[\frac{du}{dr} e^r \sqrt{r}\right] = -\sqrt{\frac{\pi}{2}},$$

$$\text{donc pour } r = \infty, \frac{du}{dr} \text{ est de l'ordre de } \frac{e^{-r}}{\sqrt{r}};$$

d'autre, part la densité $\rho(\sigma)$ est supposée finie en tous les points de la courbe Γ.

Il suit de là que pour $r = \infty$, $v = -\int_\Gamma \rho(\sigma) \frac{du}{dr} \cos(r, n)\, d\sigma$ est de l'ordre de : $\frac{e^{-r}}{\sqrt{r}}$ ou, si l'on veut, de l'ordre de $\frac{e^{-R}}{\sqrt{R}}$: R désignant la distance du point $M(x, y)$ à l'origine.

Donc v s'annule à l'∞ ; cela ne suffit pas : en effet, la température $\theta = e^y v$ s'annulant à l'∞, nous devons avoir :

$$e^y v = 0 \text{ à l'infini.}$$

Or pour le point M très éloigné : $e^y v$ est de l'ordre de : $\frac{e^{-R(1-\cos\omega)}}{\sqrt{R}}$; ce qui montre, d'une façon évidente, que la manière dont $\theta = e^{y} v$ s'annule à l'infini varie avec la direction suivie par le point M, c'est-à-dire avec ω.

En particulier si $\omega = 0$, $\theta = e^{y} v$ s'annule comme $\frac{1}{\sqrt{R}}$

si $\omega = \frac{\pi}{2}$, $\theta = e^{y} v$ s'annule comme $\frac{e^{-R}}{\sqrt{R}}$

d'où l'interprétation physique intéressante : « La température de la masse fluide indéfinie diminue bien plus rapidement suivant la direction normale au plateau que suivant la direction du plateau lui-même. »

Dans tous les cas, quelle que soit la manière dont le point M s'éloigne à l'infini, l'on a toujours $\theta = e^{y} v$ qui tend vers 0 ; et ainsi nous avons bien vérifié que la fonction :

$$v = -\int_{\Gamma} \rho(\sigma) \frac{du}{dr} \cos(r, n)\, d\sigma$$

satisfait à l'une des deux conditions définies aux limites du problème.

γ) Le seul point qui nous reste à établir c'est que v prend sur la courbe Γ la suite des valeurs données : $e^{-y}\theta_0$.

Pour cela reportons-nous à l'égalité : $v_e = v_s - \pi\,\rho(s)$.

v_s est la valeur du potentiel de double couche au point s lui-même, c'est-à-dire :

$$v_s = -\int_{\Gamma} \rho(\sigma) \frac{du}{dr} \cos(r, n)\, d\sigma$$

r désignant la distance du point s à un point N variable sur la courbe Γ.

D'autre part v_e est la suite des valeurs données sur Γ : $f(s)$.

D'où l'équation fonctionnelle de Fredholm qui nous permettra de déterminer la densité inconnue $\rho(s)$:

$$\pi\rho(s) + \int_{\Gamma} \rho(\sigma) \frac{du}{dr} \cos(r, n)\, d\sigma = -v_e = f(s).$$

Remarque. — Nous pouvons maintenant donner la raison pour laquelle nous avons dû remplacer le segment de droite OA par la courbe Γ (ellipse aplatie), autrement dit, arrondir les pointes en O et A.

En effet le noyau : $\frac{du}{dr}\cos(r, n)$ est fini et déterminé tant que r est différent de 0 ; mais que se passe-t-il pour $r = 0$?

L'on a vu que $\lim\limits_{r=0}\left(r\frac{du}{dr}\right) = -1$; donc dans le voisinage de $r = 0$ le noyau : $\frac{du}{dr}\cos(r, n)$ se comporte comme $\frac{\cos(r, n)}{r}$, et cette dernière expression n'est autre que la *courbure* de la courbe au point s considéré.

Or si le contour Γ est *régulier*, c'est-à-dire ne présente pas de pointes, la courbure en chaque point est finie et déterminée : par suite, le *noyau* de l'équation fonctionnelle : $\frac{du}{dr}\cos(r, n)$ ne devient jamais infini et la méthode de Fredholm est *applicable*.

Soit donc plus généralement l'équation fonctionnelle :

$$\rho(s) + \frac{\lambda}{\pi}\int_\Gamma \rho(\sigma)\frac{du}{dr}\cos(r, n)\,d\sigma = \frac{f(s)}{\pi}$$

et tâchons d'obtenir $\rho(s)$ sous la forme d'un développement ordonné par rapport aux puissances de λ.

$$\rho(s) = \rho^{(0)}(s) + \lambda\rho^{(1)}(s) + \ldots + \lambda^n\rho^{(n)}(s).$$

La méthode des « approximations successives » de M. Picard nous donne la suite d'équations :

$$\left\{\begin{array}{l}
\rho^{(0)}(s) = \frac{f(s)}{\pi} \\[2ex]
\rho^{(1)}(s) = -\frac{1}{\pi}\int_\Gamma \rho^{(0)}(\sigma)\frac{du}{dr}\cos(r, n)\,d\sigma \\[2ex]
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\[2ex]
\rho^{(n)}(s) = -\frac{1}{\pi}\int_\Gamma \rho^{(n-1)}(\sigma)\frac{du}{dr}\cos(r, n)\,d\sigma \\[2ex]
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}\right.$$

Nous obtiendrons ainsi la solution *formelle* du problème proposé en faisant $\lambda = 1$.

Cette solution formelle sera donc :

$$\rho(s) = \rho^{(0)}(s) + \rho^{(1)}(s) + \ldots + \rho^{(n)}(s) + \ldots$$

Pour que ce développement représente la solution *effective* du problème, il suffit de s'assurer que la série en λ obtenue converge dans un cercle dont le rayon soit > 1.

La démonstration d'un rayon de convergence > 1 sera faite si nous prouvons les deux propositions suivantes :

1. La fonction en λ, $\rho(s\,;\,\lambda)$ n'a pas de pôles *réels* entre (-1) et $(+1)$: de plus, ni (-1) ni $(+1)$ ne sont des pôles.

2. La fonction en λ, $\rho(s\,;\,\lambda)$ n'a pas de pôles *imaginaires.*

En effet, la théorie de l'équation fonctionnelle de Fredholm nous apprend que la solution de l'équation

$$\rho(s) + \frac{\lambda}{\pi} \int_\Gamma \rho(\sigma) \frac{du}{dr} \cos(r, n) d\sigma = \frac{f(s)}{\pi}$$

est une fonction *méromorphe* en λ.

I. — *Il n'y a pas de pôles* RÉELS *entre (-1) et $(+1)$; de plus, ni (-1) ni $(+1)$ ne sont des pôles.*

Désignons par λ_0 le pôle le plus voisin de l'origine.

D'après la théorie de l'équation fonctionnelle de Fredholm, l'équation sans second membre :

$$\rho(s) + \frac{\lambda_0}{\pi} \int_\Gamma \rho(\sigma) \frac{du}{dr} \cos(r, n) d\sigma = 0$$

admet pour ρ une solution *non identiquement nulle.*

Cette équation homogène équivaut, en vertu des équations

$$v_i = v_s + \pi\rho(s)\,; \qquad v_e = v_s - \pi\rho(s)$$

à l'égalité :

$$v_i - v_e = \lambda_0 (v_i + v_e) \tag{6}$$

Or, en vertu de la *continuité des dérivées normales* au passage à travers Γ, l'on a

$$\frac{dv_i}{dn} = \frac{dv_e}{dn} \tag{7}$$

Multiplions les deux membres de (6) par $\frac{dv_i}{dn} = \frac{dv_e}{dn}$ et intégrons suivant Γ.

Il vient :

$$(1-\lambda_0)\int_\Gamma v_i \frac{dv_i}{dn}\, dv = (1+\lambda_0)\int_\Gamma v_e \frac{dv_e}{dn}\, dv = 0 \qquad (8)$$

D'autre part, la formule classique de Green donne :

$$\iint_S \left[\left(\frac{dv}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dv}{dy}\right)^2\right] dxdy = -\int_\Gamma v_i \frac{dv_i}{dn}\, d\sigma$$
$$-\iint_S v\Delta_2 v dxdy$$

S désignant l'aire intérieure à Γ (fig. 4).

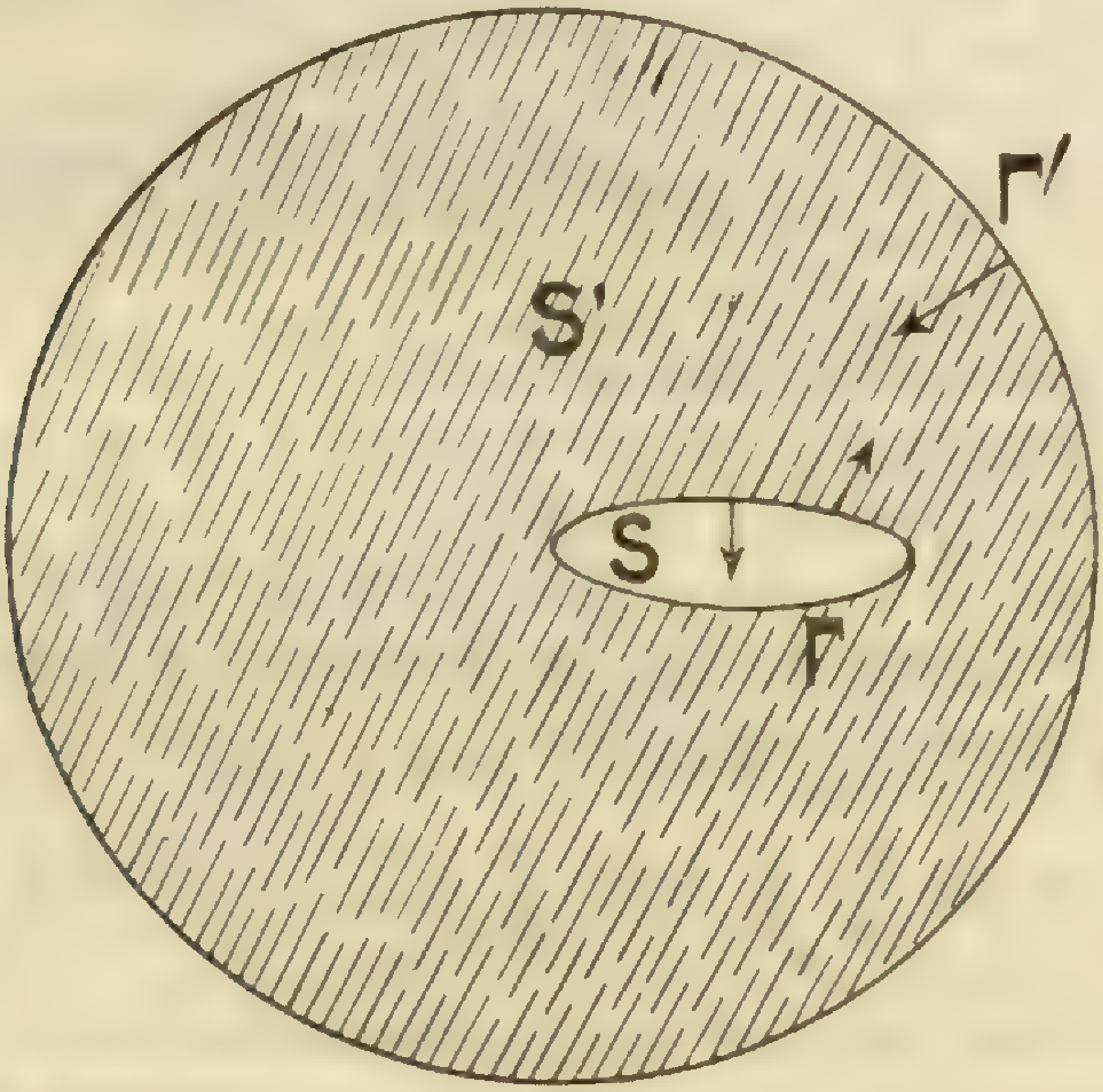


Fig. 4.

Or, en vertu de la relation $\Delta_2 v = v$,
il vient

$$\int_\Gamma v_i \frac{dv_i}{dn}\, d\sigma = -\iint_S \left[\left(\frac{dv}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dv}{dy}\right)^2 + v^2\right] dxdy \qquad (9)$$

ce qui prouve que $\int_\Gamma v_i \frac{dv_i}{dn}\, dv$ est essentiellement *négatif*.

Ensuite, considérant la surface S′ comprise entre la courbe Γ et un cercle Γ′ de rayon très grand, la même formule de Green donne :

$$\iint_{S'}\left[\left(\frac{dv}{dx}\right)^2+\left(\frac{dv}{dy}\right)^2\right]dxdy=-\int_{\Gamma+\Gamma'}v\frac{dv}{dn}d\sigma$$

$$-\iint_{S}v\Delta_2 vdxdy.$$

Je dis que :

$$\int_{\Gamma'}v\frac{dv}{dn}d\sigma=0.$$

En effet, l'on a vu qu'à l'infini v se comporte comme $\frac{e^{-R}}{\sqrt{R}}$;

donc $\frac{dv}{dn}$ se comporte comme

$$\frac{d}{dR}\left(\frac{e^{-R}}{\sqrt{R}}\right)=\frac{e^{-R}}{R^{\frac{3}{2}}}\left(R-\frac{1}{2}\right);$$

de plus $\int_{\Gamma'}d\sigma$ est de l'ordre de R.

Donc $\int_{\Gamma'}v\frac{dv}{dn}d\sigma$ est de l'ordre du *produit* :

$$\frac{e^{-R}}{\sqrt{R}}\cdot\frac{e^{-R}}{R^{\frac{3}{2}}}\cdot\left(R-\frac{1}{2}\right)\cdot R$$

c'est-à-dire de l'ordre de :

$$\left(e^{-2R}-\frac{e^{-2R}}{2R}\right);$$

ce qui prouve bien que : $\int_{\Gamma'}v\frac{dv}{dn}d\sigma=0$ à l'infini.

Il reste

$$\iint_{S'}\left[\left(\frac{dv}{dx}\right)^2+\left(\frac{dv}{dy}\right)^2\right]dxdy=-\int_{\Gamma}v\frac{dv}{dn}d\sigma$$

$$-\iint_{S'}v\Delta_2 vdxdy.$$

Remarquons que dans l'expression $\int_\Gamma v \frac{dv}{dn} d\sigma$ la direction positive de la normale est supposée prise vers l'*extérieur* de Γ ; si nous comptons comme positive au contraire la normale dirigée vers l'*intérieur* de Γ, la formule précédente devient :

$$+\int_\Gamma v_e \frac{dv_e}{dn} d\sigma = \iint_{S'} \left[\left(\frac{dv}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dv}{dy}\right)^2 + v^2\right] dxdy \quad (10)$$

d'où il résulte que $\int_\Gamma v_e \frac{dv_e}{dn} d\sigma$ est essentiellement *positif*.

Cela posé, résolvons l'équation (8) par rapport à λ_0 ; on a :

$$\lambda_0 = \frac{A^2 + B^2}{A^2 - B^2} \quad (11)$$

en posant :

$$\int_\Gamma v_i \frac{dv_i}{dn} d\sigma = -A^2 ; \quad \int_\Gamma v_e \frac{dv_e}{dn} d\sigma = +B^2.$$

Dès lors, pour que $\lambda_0 = 1$ puisse être un pôle, il faudrait $B \equiv 0$, ce qui est impossible.

En effet l'égalité (10) entraîne : $v \equiv 0$ à l'*extérieur* de Γ, par suite l'on aurait $\frac{dv_e}{dn} = 0$; donc aussi $\frac{dv_i}{dn} = 0$ en vertu de

$$\frac{dv_i}{dn} = \frac{dv_e}{dn}.$$

Donc de l'égalité (9) on conclut $v \equiv 0$ à l'*intérieur* de Γ, c'est dire que $v \equiv 0$ dans tout le plan : or une double couche étalée sur Γ et donnant lieu à un potentiel identiquement nul en tout point du plan doit avoir sa densité $\equiv 0$; donc $\rho(s) \equiv 0$.

D'où nous concluons qu'il est impossible que $\lambda_0 = 1$ soit un pôle.

De même, pour que $\lambda_0 = -1$ fût un pôle il faudrait $A \equiv 0$; par des considérations analogues à celles qui viennent d'être développées, nous devrions conclure : $\rho(s) \equiv 0$; résultat impossible si $\lambda_0 = -1$ était un pôle ; d'où contradiction évidente.

Enfin $\lambda_0 < 1$ ne peut être un pôle, à moins que A et B ne soient nuls simultanément : ce qui nous amènerait encore à l'identité $\rho(s) \equiv 0$, nouvelle contradiction.

Donc nous avons bien démontré notre première proposition : *Il n'y a pas de pôles réels entre (— 1) et (+ 1) ; de plus, ni (— 1) ni (+ 1) ne sont des pôles.*

II. — *La fonction $\rho(s\,;\lambda)$ n'a pas de pôles* IMAGINAIRES.

Soit $\lambda_0 = \alpha + i\beta$ $(\beta \neq 0)$ un pôle imaginaire et montrons que c'est impossible.

Si λ_0 est un pôle, l'on a :

$$v_i - v_e = \lambda_0\,(v_i + v_e).$$

Si $\lambda_0 = \alpha + i\beta$, il est évident que la solution, si elle existe, sera :

$$v = \mathrm{P} + i\mathrm{Q}.$$

Séparant d'abord le réel et le complexe, l'on obtient :

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{P}_i - \mathrm{P}_e &= \alpha(\mathrm{P}_i + \mathrm{P}_e) - \beta(\mathrm{Q}_i + \mathrm{Q}_e) \\ \mathrm{Q}_i - \mathrm{Q}_e &= \alpha(\mathrm{Q}_i + \mathrm{Q}_e) + \beta(\mathrm{P}_i + \mathrm{P}_e) \end{aligned}\right. \qquad (12)$$

En vertu de la continuité des dérivées normales $\dfrac{dv_i}{dn} = \dfrac{dv_e}{dn}$, l'on a :

$$\frac{d\mathrm{P}_i}{dn} = \frac{d\mathrm{P}_e}{dn}\,; \qquad \frac{d\mathrm{Q}_i}{dn} = \frac{d\mathrm{Q}_e}{dn}.$$

Multiplions la première des égalités (12) par $\dfrac{d\mathrm{Q}_i}{dn} = \dfrac{d\mathrm{Q}_e}{dn}$, la seconde de ces égalités par $\dfrac{d\mathrm{P}_i}{dn} = \dfrac{d\mathrm{P}_e}{dn}$; intégrant suivant le contour Γ et *retranchant*, il vient :

$$\left.\begin{aligned} (1-\alpha)\int_\Gamma \left(\mathrm{P}_i\,\frac{d\mathrm{Q}_i}{dn} - \mathrm{Q}_i\,\frac{d\mathrm{P}_i}{dn}\right) d\sigma - (1+\alpha)\int_\Gamma \left(\mathrm{P}_e\,\frac{d\mathrm{Q}_e}{dn} - \mathrm{Q}_e\,\frac{d\mathrm{P}_e}{dn}\right) d\sigma \\ = -\,\beta\left[\int_\Gamma \left(\mathrm{P}_i\,\frac{d\mathrm{P}_i}{dn} + \mathrm{P}_e\,\frac{d\mathrm{P}_e}{dn} + \mathrm{Q}_i\,\frac{d\mathrm{Q}_i}{dn} + \mathrm{Q}_e\,\frac{d\mathrm{Q}_e}{dn}\right) d\sigma\right]. \end{aligned}\right\} \quad (13$$

Or

$$\int_\Gamma \left(\mathrm{P}_i\,\frac{d\mathrm{Q}_i}{dn} - \mathrm{Q}_i\,\frac{d\mathrm{P}_i}{dn}\right) d\sigma = \iint_{\mathrm{S}} [\mathrm{P}_i\Delta_2\mathrm{Q}_i - \mathrm{Q}_i\Delta_2\mathrm{P}_i]\,dx\,dy.$$

S étant l'aire intérieure limitée par le contour Γ.

Mais en vertu de l'égalité $\Delta_2 v = v$:

$$\Delta_2 P_i = P_i\,; \qquad \Delta_2 Q_i = Q_i.$$

D'où

$$\int_\Gamma \left(P_i \frac{dQ_i}{dn} - Q_i \frac{dP_i}{dn} \right) d\sigma = 0.$$

Par un raisonnement identique on établirait :

$$\int_\Gamma \left(P_e \frac{dQ_e}{dn} - Q_e \frac{dP_e}{dn} \right) d\sigma = 0.$$

Dès lors l'égalité (13) se réduit, puisque β est supposé ± 0, à

$$\left.\begin{aligned} &\int_\Gamma P_i \frac{dP_i}{dn} d\sigma + \int_\Gamma P_e \frac{dP_e}{dn} d\sigma + \int_\Gamma Q_i \frac{dQ_i}{dn} d\sigma \\ &\qquad + \int_\Gamma Q_e \frac{dQ_e}{dn} d\sigma = 0. \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Reprenons les égalités (12) ; multiplions la première par $\frac{dP_i}{dn} = \frac{dP_e}{dn}$, la seconde par $\frac{dQ_i}{dn} = \frac{dQ_e}{dn}$; intégrant suivant Γ et *ajoutant*, il vient :

$$\left.\begin{aligned} &(1-\alpha)\left[\int_\Gamma P_i \frac{dP_i}{dn} d\sigma + \int_\Gamma Q_i \frac{dQ_i}{dn} d\sigma\right] \\ &= (1+\alpha)\left[\int_\Gamma P_e \frac{dP_e}{dn} d\sigma + \int_\Gamma Q_e \frac{dQ_e}{dn} d\sigma\right] \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

et en tenant compte de (14) :

$$\left.\begin{aligned} &\int_\Gamma P_i \frac{dP_i}{dn} d\sigma + \int_\Gamma Q_i \frac{dQ_i}{dn} d\sigma \\ &= \int_\Gamma P_e \frac{dP_e}{dn} d\sigma + \int_\Gamma Q_e \frac{dQ_e}{dn} d\sigma. \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Des relations (14) et (16) on déduit :

$$\left\{\begin{aligned} &\int_\Gamma P_i \frac{dP_i}{dn} d\sigma + \int_\Gamma Q_i \frac{dQ_i}{dn} d\sigma = 0 \\ &\int_\Gamma P_e \frac{dP_e}{dn} d\sigma + \int_\Gamma Q_e \frac{dQ_e}{dn} d\sigma = 0. \end{aligned}\right.$$

Or, d'après (9),

$$\int_\Gamma P_i \frac{dP_i}{dn} d\sigma \text{ et } \int_\Gamma Q_i \frac{dQ_i}{dn} d\sigma$$

sont essentiellement négatifs. L'on doit donc avoir séparément

$$\begin{aligned} &\int_\Gamma P_i \frac{dP_i}{dn} d\sigma \equiv 0 \\ &\int_\Gamma Q_i \frac{dQ_i}{dn} d\sigma \equiv 0. \end{aligned} \tag{17}$$

De même, en vertu de (10) et par un raisonnement identique, on obtient :

$$\int_\Gamma P_e \frac{dP_e}{dn} d\sigma = 0\,; \qquad \int_\Gamma Q_e \frac{dQ_e}{dn} d\sigma = 0. \tag{18}$$

La considération des équations (9), (10), (17), (18) nous amène à conclure :

$$P_i \equiv 0, \quad Q_i \equiv 0, \quad P_e \equiv 0, \quad Q_e \equiv 0,$$

d'où $v \equiv 0$ dans tout le plan.

Si v est identiquement nul dans tout le plan, $\rho(s) \equiv 0$; ce qui ne pourrait être si $\lambda_0 = \alpha + i\beta$ était un pôle.

Donc la seconde proposition : *Il n'y a pas de pôles imaginaires* est établie.

Conclusion. — La conclusion est aisée : la solution de l'équation fonctionnelle a son premier pôle à *une distance de l'origine* > 1.

Par suite, la série

$$\rho(s) = \rho^{(0)}(s) + \lambda\rho^{(1)}(s) + \cdots + \lambda^n \rho^{(n)}(s) + \cdots$$

représentera bien la solution du problème proposé en y faisant $\lambda = 1$.

La solution non seulement *formelle* mais *effective* du problème est donc la série :

$$\rho(s) = \rho^{(0)}(s) + \rho^{(1)}(s) + \cdots + \rho^{(n)}(s) + \cdots$$

Remarques. — I. Il est évident qu'au lieu d'employer la méthode des « approximations successives » on aurait pu mettre la solution sous la forme de Fredholm et écrire :

$$\rho(s) = \frac{f(s)}{\pi} - \lambda \int_\Gamma \frac{D_1(s, \sigma)}{D(\lambda)} \frac{f(\sigma)}{\pi} d\sigma,$$

en y faisant $\lambda = 1$, car $\lambda = 1$ n'est pas une valeur singulière ; les deux déterminants D et D_1 ont les significations classiques connues. Mais D et D_1 ne sont point faciles à former : aussi, paraît-il que dans le cas présent la solution obtenue par voie « d'approximations successives » se présente sous une forme plus élégante que celle de Fredholm ; il convient toutefois de remarquer que la solution du problème, sous forme de série ordonnée par rapport aux puissances de λ, les coefficients successifs étant $\rho^0(s)$, $\rho^1(s)$, ..., $\rho'^n(s)$, ..., n'est valable qu'à l'intérieur de la circonférence ayant l'origine pour centre, le rayon étant égal à la distance de l'origine au pôle le plus rapproché ; au contraire, la solution sous la forme de Fredholm convient pour tout le plan de la variable λ, sauf pour les valeurs singulières de λ : la solution sous la forme de Fredholm est donc plus générale.

II. Dans une note récente des Comptes rendus de l'Académie des Scciences (décembre 1909), M. Lichtenstein s'est proposé de déterminer les intégrales de l'équation type elliptique :

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} + a\frac{du}{dx} + b\frac{du}{dy} + cu = f,$$

par leurs valeurs le long d'un contour fermé dans le cas des pointes. Il y aurait donc lieu de se demander si l'analyse de M. Lichtenstein ne résout pas le problème proposé en le prenant tel que le donne la théorie de la chaleur, c'est-à-dire en prenant *le segment OA* au lieu de *l'ellipse aplatie* Γ que nous avons été obligé de lui substituer.

Il me semble que la question doit être tranchée par la négative. En effet, la méthode de M. Lichtenstein ne paraît pas pouvoir s'appliquer, à moins de modifications sérieuses, au cas du problème étudié. Il existe, en effet, entre le problème de Lichtenstein et le problème proposé des différences essentielles qu'il convient de signaler.

1° M. Lichtenstein traite le cas du problème *intérieur* : ce qui nous intéresse ici, c'est le problème *extérieur*.

2° M. Lichtenstein suppose que l'angle α des courbes frontières au point singulier du contour est compris entre 0 et 2π, $0 < \alpha < 2\pi$; or ici précisément aux deux pointes du segment OA, l'angle α est égal à 2π.

3° Enfin M. Lichtenstein suppose qu'à la pointe du contour qu'il considère le noyau reste *borné*, ou, à supposer que le noyau y devienne infini, que son ordre d'infinitude est < 1 : ce qui n'est pas réalisé dans le cas présent, le noyau se comportant au point singulier comme la courbure en ce point.

Il semble donc bien que l'analyse de M. Lichtenstein devrait être sensiblement modifiée pour qu'elle pût s'appliquer au cas présent.

III. Dans la première partie de ce travail nous avons dit que le résultat pratique intéressant du problème était le calcul de la quantité de chaleur enlevée au corps par le courant fluide dans l'unité de temps, quantité dite « pouvoir refroidissant » du courant sur le corps.

Nous avons signalé les résultats, à la fois simples et vérifiés par l'expérience obtenus, par M. Boussinesq pour le cas d'un fluide *mauvais conducteur* ; dans cette hypothèse le « pouvoir refroidissant » du courant sur le corps était proportionnel à $\sqrt{\frac{KCV}{L}}$, L étant la longueur du trajet des filets fluides sur le corps.

Séduit par la simplicité des résultats obtenus par M. Boussinesq, je me suis demandé ce que deviendrait le « pouvoir refroidissant » pour un fluide *bon conducteur* : la loi serait-elle aussi simple ?

On pourrait peut-être s'en rendre compte dans le cas particulier suivant.

Supposons que le plateau soit indéfini dans les deux sens : de la sorte les pointes gênantes O et A sont rejetées à l'infini ; de plus, supposons que la température donnée sur la plaque soit une fonction simple de y de la forme $\frac{1}{1+y^2}$ ou $\frac{1}{\cos \operatorname{hyp} y}$, de telle sorte qu'elle s'annule aux deux extrémités infinies.

Si l'on fait ces restrictions, la méthode précédente est applicable et l'on peut, semble-t-il, s'efforcer dans ce cas d'effectuer avec des chances de succès les calculs des intégrales qui donnent les différents coefficients de la série ; ce résultat une fois atteint, il se pourrait qu'une loi susceptible d'une interprétation physique intéressante fût mise en évidence : c'est un point sur lequel nous espérons pouvoir revenir (1).

---

(1) Je renvoie le lecteur, en ce qui concerne la Seconde Partie de ce travail, à l'excellente brochure de M. d'Adhémar : *Problème de Dirichlet et de Neumann*, où les questions relatives à l'équation de Fredholm sont traitées avec beaucoup de clarté et d'élégance.

Application de la théorie des erreurs de l'auteur à la compensation des coordonnées des sommets dans les levés topographiques

PAR

P.-J.-ÉD. GOEDSEELS
Administrateur-Inspecteur de l'Observatoire royal de Belgique
Professeur à l'Université catholique de Louvain

1. AVERTISSEMENT

Nous avons publié, en 1909, dans un livre intitulé *Théorie des erreurs d'observation* (3^e édition), le résultat de longues études sur cette branche si importante des sciences mathématiques appliquées.

Nous avons exposé notamment, dans cet ouvrage, un procédé de calcul auquel nous avons donné le nom de *méthode la plus approximative*, et qui permet, étant données 1° une série d'équations linéaires dont les seconds membres sont affectés d'erreurs, 2° les limites de ces erreurs, de déterminer, pour chaque inconnue, l'intervalle minimum (I, S) des valeurs possibles de cette inconnue. Cet intervalle est tel que si l'on attribue à l'inconnue n'importe quelle valeur inférieure à I ou supérieure à S, une ou plusieurs des erreurs inconnues affectant les équations dépassent nécessairement les limites données. Nous avons exposé, dans le même ouvrage, une *méthode* dite *de l'approximation minima* permettant de trouver les valeurs minima en dessous desquelles les observateurs ne peuvent, sous peine d'absurdité, fixer les susdites limites.

Nous avons aussi exposé la méthode des moindres carrés, en nous plaçant à un point de vue nouveau, sans faire aucune hypothèse sur la répartition des erreurs, et nous sommes arrivé à cette conclusion que cette méthode ne vaut ni la méthode la plus approximative ni celle de l'approximation minima, mais peut néanmoins procurer certains avantages.

Nous aurions pu traiter le cas, assez rare quoi qu'on en dise, où les erreurs des seconds membres des équations données obéissent à une certaine loi exponentielle, et où il est possible, par suite, de trouver les valeurs les plus probables des inconnues par l'application des moindres carrés. Nous y avons renoncé : 1° parce que ces valeurs les plus probables ne peuvent être admises que dans le cas où elles sont comprises dans les intervalles (I, S) de la méthode la plus approximative ; 2° parce qu'on doit dès lors commencer toujours par déterminer ces intervalles (I, S) afin de pouvoir rejeter éventuellement les valeurs les plus probables inférieures à I ou supérieures à S, et, comme telles, manifestement fausses ; 3° parce que, dans la pratique, les valeurs plus approximatives $\frac{1}{2}(I + S)$ sont généralement si voisines de la vérité, qu'après les avoir calculées, on renonce à entreprendre encore les calculs laborieux des moindres carrés.

Si nous ne nous faisons illusion, les méthodes la plus approximative et de l'approximation minima détrôneront un jour toutes les autres. Mais une transformation si radicale ne peut évidemment se réaliser qu'à la longue. Elle doit s'imposer surtout par des exemples concrets, pris dans la pratique courante.

C'est pourquoi nous nous proposons d'exposer ici une application que nous avons expérimentée nous-même, avec succès, pour la compensation des erreurs dans les levés topographiques, et de montrer ainsi que nos méthodes, rigoureuses en théorie, sont parfaitement appropriées aux exigences de la pratique.

2. ÉTAT DE LA QUESTION

Le levé topographique d'un terrain par les procédés scientifiques consiste à choisir sur ce terrain un réseau de points plus ou moins rapprochés les uns des autres, à rapporter ces points à un système d'axes coordonnés rectangulaires OXYZ, dont l'axe OZ est vertical, et à déterminer, pour chacun des points du réseau, les coordonnées X, Y, Z.

Les topographes enseignent que, si l'on veut éviter l'accumulation des erreurs, dans la détermination des coordonnées des points topographiques, on doit *passer du simple au composé*. Ils entendent par là qu'on doit : 1° déterminer d'abord avec soin un réseau de points du premier ordre, peu nombreux et très espacés ; 2° compenser définitivement ces points ; 3° appuyer, sur ce premier réseau, des points du second ordre que l'on compense à leur tour, et ainsi de suite.

Il est évident que le topographe, de même que tout praticien, doit proportionner ses efforts à l'importance du but à atteindre. Il est évident aussi que tous les points d'un terrain n'ont pas la même importance au point de vue topographique.

Il est incontestable, dès lors, que si un topographe déterminait, avec le même soin, tous les points d'un levé, il gaspillerait inutilement son temps et ses peines à des objets tout à fait secondaires.

Mais il est faux qu'on doive compenser successivement les divers ordres de points pour éviter l'accumulation des erreurs. Ce résultat ne peut être atteint pleinement que d'une seule manière : en considérant simultanément toutes les équations résultant de toutes les observations effectuées au cours d'un levé, et en appliquant à l'ensemble de toutes ces équations la méthode la plus approximative exposée dans notre théorie des erreurs d'observation ou, au besoin, la méthode moins bonne, des moindres carrés.

Malheureusement, le nombre de points considérés dans un levé topographique est généralement si grand que l'application de ce procédé logique est impraticable. Qu'il nous suffise de signaler à l'appui de cette affirmation que le levé à l'échelle de 1/2500 d'un carré d'un kilomètre de côté, dans les environs de Louvain, en pays un peu accidenté, a nécessité la détermination de 600 points et, par suite, de 1800 coordonnées.

On a donc bien dû se résigner à trouver un moyen, non d'éviter l'accumulation des erreurs, mais d'échapper, tant bien que mal, aux immenses calculs inhérents aux méthodes logiques de compensation.

Ce moyen consiste à compenser les erreurs par groupes isolés, en considérant successivement des points de divers ordres.

Le problème qui se pose ainsi, un certain nombre de fois, au cours d'un levé topographique est le suivant :

Entre deux points, $M_u(X_u, Y_u, Z_u)$ et $M_v(X_v, Y_v, Z_v)$, appartenant à un groupe compensé, ou à deux groupes compensés différents, on a intercalé une série de points intermédiaires $m_1(x_1\, y_1, z_1)$, $m_2(x_2, y_2, z_2)$, $m_3(x_3, y_3, z_3)$ ..... $m_s(x_s, y_s, z_s)$, ... $m_t(x_t, y_t, z_t)$.

A cet effet, on a déterminé, au moyen d'instruments *ad hoc*, les différences successives entre les coordonnées de même espèce, et, en désignant par c la coordonnée x, y ou z, on a obtenu une série d'équations,

$$\begin{aligned} c_1 - C_u &= d_1 + r_1, \\ c_2 - c_1 &= d_2 + r_2, \\ c_3 - c_2 &= d_3 + r_3, \\ &\dots\dots \\ c_s - c_{s-1} &= d_s + r_s, \\ &\dots\dots \\ C_v - c_t &= d_{t+1} + r_{t+1}, \end{aligned} \qquad (1)$$

contenant les inconnues proprement dites $c_1, c_2, \ldots, c_s, \ldots, c_t$, et des résidus inconnus $r_1, r_2, r_3, \ldots, r_s, \ldots, r_t, r_{t+1}$.

Un cas particulier, qui se présente assez fréquemment, est celui où, partant d'un point M_u et ne pouvant rejoindre un autre point M_v, on revient au point de départ M_u, et où l'on a, par suite, $C_v = C_u$.

Dans un cas comme dans l'autre, il s'agit de trouver les valeurs les plus approximatives des inconnues proprement dites $c_1, c_2, c_3 \ldots, c_s, \ldots, c_t$, connaissant les approximations respectives $\theta', \theta_1, \theta_2, \theta_3, \ldots, \theta_s, \ldots, \theta_{t+1}, \theta''$ de $C_u, r_1, r_2, r_3, \ldots, r_s, \ldots, r_{s+1}, C_v$.

3. Approximation minima

Les quantités d_s sont généralement obtenues par des relations telles que :

$$d_s = D_s^h \cos \alpha,$$
$$d_s = D_s^h \sin \alpha,$$
$$d_s = D_s^h \operatorname{tg} p,$$

dans lesquelles l'erreur sur D_s^h est prépondérante, et a une approximation de la forme $\epsilon|D^h|$, proportionnelle à la valeur absolue de D_s^h. Le coefficient de proportionnalité ϵ est l'approximation par unité de distance.

L'approximation d'un résidu quelconque r_s des équations (1) est donc $\epsilon\ |d_s|$, excepté pour les erreurs r_1 et r_{t+1}, dont les approximations doivent être augmentées respectivement de θ' et θ'', par suite des erreurs possibles de C_u et C_v.

Nous désignerons par δ_s la valeur absolue de d_s.

Les approximations de r_1, r_s et r_{t+1} seront donc respectivement égales à :

$$\theta' + \epsilon\delta_1,$$
$$\epsilon\delta_s,$$
$$\theta'' + \epsilon\delta_{t+1}.$$

La détermination de ϵ doit évidemment être basée sur l'étude approfondie des instruments et des tables numériques dont on a fait usage, sur le degré d'habileté et les dispositions des opérateurs, sur les circonstances plus ou moins favorables dans lesquelles on a fait le levé, en un mot sur un examen complet de toutes les causes d'erreur.

Il appartient donc aux observateurs d'indiquer la valeur de ϵ qui convient pour leurs travaux.

Seulement ils peuvent se tromper dans cette évaluation. Ils peuvent surtout se faire illusion sur le degré de précision de leur travail.

Notre méthode, dite de l'*approximation minima*, constitue à ce point de vue un excellent moyen de contrôle, puisqu'elle permet de trouver une limite inférieure en dessous de laquelle on ne peut choisir ϵ, sous peine d'absurdité évidente.

La quantité ϵ étant choisie au delà de cette limite inférieure, il reste à déterminer les valeurs correspondantes des coordonnées inconnues.

La détermination de la limite inférieure de ϵ fait l'objet de la suite du présent paragraphe.

Pour qu'un système de valeurs, par exemple à quatre inconnues c_1, c_2, c_3, c_4, soit possible, il faut et il suffit qu'il vérifie les relations :

$$-\epsilon\delta_1 - \theta' < c_1 - C_u - d_1 < \epsilon\delta_1 + \theta', \tag{2}$$

$$-\epsilon\delta_2 < c_2 - c_1 - d_2 < \epsilon\delta_2, \tag{3}$$

$$-\epsilon\delta_3 < c_3 - c_2 - d_3 < \epsilon\delta_3, \tag{4}$$

$$-\epsilon\delta_4 < c_4 - c_3 - d_4 < \epsilon\delta_4, \tag{5}$$

$$-\epsilon\delta_5 - \theta'' < C_v - c_4 - d_5 < \epsilon\delta_5 + \theta''. \tag{6}$$

La limite inférieure de la variable ϵ est la plus petite valeur de cette variable qui vérifie les relations ci-dessus.

On voit immédiatement, en additionnant les relations membre à membre, que cette limite doit vérifier aussi la relation :

$$-\epsilon\,[\delta] - \theta' - \theta'' + [d] < C_v - C_u < \epsilon[s] + \theta' + \theta'' + [d].$$

Mais rien ne nous autorise à affirmer que cette condition soit suffisante, et nous devons éliminer successivement c_1, c_2, c_3, c_4 pour arriver à la solution du problème.

Pour éliminer l'inconnue c_1 des relations (2), (3), ..., (6) il suffit de l'éliminer des deux premières, les seules qui la contiennent, et de joindre au résultat de cette élimination, les quatre dernières relations, indépendantes de c_1 dès le début.

En isolant c_1 dans les relations (2) et (3), il vient :

$$C_u + d_1 - \epsilon\delta_1 - \theta' < c_1 < C_u + d_1 + \epsilon\delta_1 + \theta',$$

$$c_2 - d_2 - \epsilon\delta_2 < c_1 < c_2 - d_2 + \epsilon\delta_2.$$

Pour que ces deux relations puissent être satisfaites par une valeur de c_1, il faut et il suffit qu'on ait :

$$C_u + d_1 - \epsilon\delta_1 - \theta' < C_u + d_1 + \epsilon\delta_1 + \theta',$$

$$C_u + d_1 - \epsilon\delta_1 - \theta' < c_2 - d_2 + \epsilon\delta_2,$$

$$c_2 - d_2 - \epsilon\delta_2 < C_u + d_1 + \epsilon\delta_1 + \theta',$$

$$c_2 - d_2 - \epsilon\delta_2 < c_2 - d_2 + \epsilon\delta_2.$$

La première et la dernière de ces inégalités reviennent à

$$\epsilon > 0. \tag{7}$$

Les deux autres peuvent être réunies sous la forme :

$$\begin{aligned} & C_u + (d_1 + d_2) - \theta' - \epsilon(\delta_1 + \delta_2) \\ & < C_u + (\delta_1 + \delta_2) + \epsilon(\delta_1 + \delta_2) + \theta'. \end{aligned} \tag{8}$$

Les inégalités (2), (3), ..., (6) peuvent donc être remplacées par les inégalités (4), (5), (6), (7) et (8).

En isolant c_2 dans l'inégalité (4) celle-ci devient :

$$c_3 - d_3 - \epsilon\delta^3 < c_2 < c_3 - d_3 + \epsilon\delta_3,$$

et donne, par sa combinaison avec la relation (8) :

$$\begin{gathered} C_u + (d_1 + d_2) - \theta' - \epsilon(\delta_1 + \delta_2) \\ < C_u + (d_1 + d_2) + (\delta_1 + \delta_2) + \theta'. \\ C_u + (d_1 + d_2) - \theta' - \epsilon(\delta_1 + \delta_2) < c_3 - d_3 + \epsilon\delta_3, \\ c_3 - d_3 - \epsilon\delta_3 < C_u + (d_1 + d_2) + \epsilon(\delta_1 + \delta_2) + \theta', \\ c_3 - d_3 - \epsilon\delta_3 < c_3 - d_3 + \epsilon\delta_3. \end{gathered}$$

La première et la dernière de ces inégalités donnent de nouveau :

$$\epsilon > 0.$$

Les deux autres peuvent être réunies sous la forme :

$$\begin{aligned} & C_u + (d_1 + d_2 + d_3) - \theta' - \epsilon(\delta_1 + \delta_2 + \delta_3) \\ & < c_3 < C_u + (d_1 + d_2 + d_3) + \theta' + \epsilon(\delta_1 + \delta_2\ \delta_3). \end{aligned} \tag{9}$$

Les inégalités (4), (5), (6), (7) et (8) peuvent donc être remplacées par les inégalités (5), (6), (7) et (9).

L'élimination de c_3 entre les relations (5) et (9) et ainsi de suite conduit au système :

$$\begin{gathered} \epsilon > 0, \\ C_u + [d] - \theta' - \theta' - \epsilon[\delta] < C_v < C_u + [d] + \theta' + \theta'' + \epsilon[\delta]. \end{gathered}$$

En isolant ϵ dans cette dernière relation il vient finalement les trois inégalités simples :

$$\begin{aligned} &\epsilon > 0, \\ &\epsilon > \frac{C_u - C_v + [d] - \theta' - \theta''}{[\delta]}, \qquad (10) \\ &\epsilon > \frac{C_v - C_u - [d] - \theta' - \theta''}{[d]}. \end{aligned}$$

La plus petite valeur de ϵ est donc le plus grand des trois seconds membres ci-dessus.

Dans les opérations topographiques on commence généralement par faire abstraction des erreurs r_1, r_2, r_3, r_4, r_5 qui figurent dans les équations (1) et par calculer, dans cette supposition, des valeurs dites *provisoires, primitives* ou *observées* pour les inconnues C_1, C_2, C_3, C_4, et pour C_v.

En désignant ces valeurs par c'_1, c'_2, c'_3, c'_4, C'_r, on a :

$$\begin{aligned} c'_1 &= C_u + d_1, \\ c'_2 &= C_u + d_1 + d_2, \\ c'_3 &= C_u + d_1 + d_2 + d_3, \\ c'_4 &= C_u + d_1 + d_2 + d_3 + d_4, \\ C'_v &= C_u + d_1 + d_2 + d_3 + d_4 + d_5. \end{aligned}$$

La ligne $M_u m_1 m_2 m_3 m_4 M_v$ s'appelle une traverse. On dit qu'elle part du point M_u et se ferme au point M_v.

La différence $(C_v - C'_r)$ ou $\{C_v - C_u - [d]\}$ s'appelle l'*erreur de fermeture* de la traverse, pour la coordonnée C. La valeur absolue de cette erreur s'appelle l'*erreur absolue de fermeture.*

Si nous désignons l'erreur de fermeture par F, les relations (10) deviennent :

$$\begin{aligned} &\epsilon > 0, \\ &\epsilon > \frac{F - \theta' - \theta''}{[\delta]}, \\ &\epsilon > \frac{-F - \theta' - \theta''}{[\delta]}. \end{aligned}$$

La plus grande des deux quantités $\frac{F - \theta' - \theta''}{[\delta]}$ et $\frac{-F - \theta' - \theta''}{[\delta]}$ est $\frac{|F| - \theta' - \theta''}{[\delta]}$.

Si elle est positive, elle est la limite inférieure de ϵ. Cette limite est nulle dans le cas contraire.

4. Exemple numérique

Une traverse ABCDEGLQM part d'un point A et ferme sur un point M dont les coordonnées ont été déterminées par une triangulation. Nous nous occuperons de la coordonnée z.

Le z du point A vaut $60^{m},000$ avec une approximation $\theta' = 0^{m},1000$. Les valeurs successives de d_3 trouvées par l'observateur sont : (— 6,465), (— 3,630), (— 0,674), (— 0,568), (6,432), (19,623), (0,407) et (1,206).

Il renseigne $\epsilon = 0,01$.

Il s'agit de vérifier si ce renseignement est admissible.

Pour effectuer les calculs de l'espèce, ainsi que tous les autres calculs topographiques, il est absolument nécessaire, si l'on veut éviter les erreurs et la fatigue, de faire usage d'imprimés *ad hoc* disposés systématiquement pour la facilité des calculs.

Si nous avions exclusivement en vue la détermination de la limite inférieure de ϵ, nous pourrions imaginer un imprimé très simple. Mais comme on poursuit généralement les calculs, pour obtenir les valeurs les plus approximatives des inconnues, nous ferons usage d'un imprimé unique permettant de continuer les opérations. Cet imprimé comprend une série de cases rangées horizontalement.

Il suffit de suivre à la lettre les instructions ci-après qui accompagnent l'imprimé.

Dans les calculs où l'on aura exclusivement en vue la détermination de la limite inférieure de ϵ, on suivra les instructions 1°, 2°, 3°, 4°.

Pour le 5° on se bornera à inscrire les valeurs de d_s ; le reste de ce numéro sera remplacé par le calcul des valeurs de $[\delta]_s$.

On se conformera ensuite au n° 6, et on terminera par le calcul de $m = \frac{|F| - \theta' - \theta''}{[\delta]}$, comme nous l'avons fait aux deux dernières rangées de l'imprimé.

Nous avons trouvé 0,00171 pour limite inférieure de ϵ. Le nombre 0,010 donné par l'observateur est donc parfaitement admissible.

INSTRUCTIONS POUR LA COMPENSATION DES COORDONNÉES PAR LA MÉTHODE LA PLUS APPROXIMATIVE OU DE L'APPROXIMATION MINIMA

1° On inscrit, en tête de l'imprimé, les lettres désignant les points de la traverse et la coordonnée X, Y ou Z dont on va s'occuper.

2° On inscrit, dans les premières colonnes, des rangées de cinq colonnes ; en dessous de la notation P^t, les lettres désignant le point de départ, les sommets intermédiaires, et le point de fermeture de la traverse. A chaque point correspond une rangée de cinq colonnes.

3° A la première ligne de la quatrième colonne on inscrit les notations C_u pour le point de départ, c'_s pour les points intermédiaires, et C_v pour le point de fermeture. En dessous de C_v on inscrit C'_v et en dessous de C'_v, la lettre F désignant l'erreur de fermeture.

4° Dans la même colonne, des deux rangées qui suivent celle du point de fermeture, on inscrit les notations λ', $2\lambda'$, $[\theta]$, $|F|$, $2\lambda''$ et λ'', $|F|$, $-\theta'$, Δ', $-\theta''$, Δ'' et m.

5° Dans la troisième colonne, on inscrit les valeurs successives de d_s. Si l'on veut déterminer l'approximation minima, m, on inscrit en outre, à droite des notations $[\delta]_s$, les sommes des valeurs absolues de d_s.

6° Dans la cinquième colonne, on inscrit à droite des lettres C_u, C_v, c'_1, $c'_2, \ldots$, C'_v, F, les nombres correspondants. On fera particulièrement attention au signe de F, qui vaut $C_v - C'_v$.

La quantité $|F|$, erreur absolue de fermeture, sera répétée dans l'avant-dernière rangée à droite de $|F|$.

Si l'on veut calculer l'approximation minima, m, on répète encore $|F|$ dans la dernière rangée, et on y inscrit $-\theta'$ et $-\theta''$. On calcule enfin $\Delta' = |F| - \theta'$, puis $\Delta'' = \Delta' - \theta''$, et $m = \Delta'' : [\delta]$.

Dans la troisième colonne on inscrit d'abord la valeur de θ', à droite du θ_s de la première rangée, puis les valeurs successives de θ_s ou $\epsilon\delta_s$, ensuite la valeur de θ'' au-dessus du dernier θ_s et enfin les valeurs successives de $[\theta]_s$ (y compris θ' et θ''). On répète la valeur du dernier $[\theta]_s$ à droite de la notation $[\theta]$ dans la cinquième colonne de la rangée qui suit le point de fermeture.

7° Dans la même rangée on inscrira les nombres $2\lambda' = [\theta] - |F|$, $2\lambda'' = [\theta] + |F|$, λ' et λ''.

8° On cherche le dernier point de première espèce, c'est-à-dire le dernier des points pour lesquels on a $[\theta]_s < \lambda'$.

On remplace pour ce point la notation c'_s par c_s. En dessous de cette notation on inscrit l'abréviation *app.* de approximation, et on inscrit à droite la valeur $[\theta]_s$ de cette approximation. On répète les mêmes opérations pour les autres points de première espèce.

9° On cherche ensuite le dernier point de deuxième espèce, c'est-à-dire de ceux pour lesquels $[\theta]_s$ est compris entre λ' et λ''.

Les inscriptions relatives à ces points sont différentes selon que F est négatif ou positif.

a) $F < o$.

On marque dans la quatrième colonne, en dessous de c'_s, les notations $-[\theta]_s$, I', λ', c_s et *app.* On inscrit à côté de chaque notation, le nombre correspondant, en faisant bien attention au signe — de $[\theta]_s$ et aux relations $I' = c'_s - [\theta]_s$, $c_s = I' + \lambda'$ et *app.* $= \lambda'$.

On répète les mêmes opérations pour les autres points de deuxième espèce.

b) $F > o$.

On marque dans la quatrième colonne, en dessous de c'_s, les notations $[\theta]$, S', λ', c_s et *app.*On inscrit, à côté de chaque notation, le nombre correspondant, en tenant compte des relations : $S' = c'_s + [\theta]_s$, $c_s = S' - \lambda'$ et *app.* $= \lambda'$.

10° On passe ensuite aux points de troisième espèce.

Dans la quatrième colonne, en dessous de c'_s, on marque F, c_s, $[\theta]$, $-[\theta]_s$ et *app.* A droite de F on inscrit l'erreur de fermeture avec son signe.

A droite de c_s on inscrit $c'_s + F$. Puis on inscrit $[\theta]$, $-[\theta]_s$ et *app.* $= [\theta] - [\theta]_s$.

TRAVERSE : ABCDEGLQM

COMPENSATION DE LA COORDONNÉE : Z

Pt A	d_s $[\delta]_s$		C_u	60,000
	θ_s $[\theta]_s$			
Pt B	d_s $[\delta]_s$	— 6,465	c'_s	53,535
	θ_s $[\theta]_s$			

TRAVERSE : ABCDEGLQM *(suite)*

COMPENSATION DE LA COORDONNÉE Z

Pt C	d_s	— 3,630	c'_s	49,905
	$[\delta]_s$	10,095		
	θ_s			
	$[\theta]_s$			
Pt D	d_s	— 0,674	c'_s	49,231
	$[\delta]_s$	10,769		
	θ_s			
	$[\theta]_s$			
Pt E	d_s	— 0,568	c'_s	48,664
	$[\delta]_s$	11,337		
	θ_s			
	$[\theta]_s$			
Pt G	d_s	6,432	c'_s	55,095
	$[\delta]_s$	17,769		
	θ_s			
	$[\theta]_s$			
Pt L	d_s	19,623	c'_s	74,718
	$[\delta]_s$	37,392		
	θ_s			
	$[\theta]_s$			

TRAVERSE : ABCDEGLQM *(suite)*

Compensation de la coordonnée Z

P^t Q	d_s	0,407	c'_s	75,125
	$[\delta]_s$	37,799		
	θ_s			
	$[\theta]_s$			
P^t M	d_s	1,206	C_v	76,253
	$[\delta]_s$	39,005	C'_v	76,331
			F	— 0,078
	θ_s			
	$[\theta]_s$			
P^t	d_s		λ'	
	$[\delta]_s$		$2\lambda'$	
			$[\theta]$	
			$\lvert F\rvert$	0,078
	θ_s		$2\lambda''$	
	$[\theta]_s$		λ''	
P^t	d_s		$\lvert F\rvert$	0,078
	$[\delta]_s$		$-\theta'$	— 0,001
			Δ'	0,077
			$-\theta''$	— 0,010
	θ_s		Δ''	0,067
	$[\theta]_s$		m	0,00171
P^t	d_s	67000		$\dfrac{39005}{0,00171}$
	$[\delta]_s$	39005		
		279950		
		273035		
	θ_s	69150		
	$[\theta]_s$			

5. COMPENSATION D'UNE TRAVERSE PAR LA MÉTHODE LA PLUS APPROXIMATIVE

Considérons les coordonnées de même espèce C_u, C_v, c_1, c_2, ..., c_s, ..., c_t, correspondant à une traverse $M_u\, m_1\, m_2 \ldots m_s \ldots m_t\, M_v$. Désignons par θ_1, ..., θ_2, ..., θ_s, ..., θ_t les approximations des valeurs observées d_1, d_2, ..., d_s, ..., d_t.

Pour que des valeurs soient possibles pour les inconnues, il faut et il suffit qu'elles vérifient les relations :

$$\begin{gathered}
-\theta_1 < c_1 - C_u - d_1 < \theta_1, \\
-\theta_2 < c_2 - c_1 - d_2 < \theta_2, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
-\theta_s < c_s - c_{s-1} - d_s < \theta_s, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
-\theta_t < c_t - c_{t-1} - d_t < \theta_t, \\
-\theta_{t+1} < C_v - c_t - d_{t+1} < \theta_{t+1}.
\end{gathered}$$

La valeur la plus approximative de chaque inconnue c_s est le point milieu $\frac{1}{2}(S + I)$ du plus petit intervalle (I, S) qui contient toutes les valeurs de c_s vérifiant les inégalités ci-dessus, et l'approximation de ce point milieu est $\frac{1}{2}(S - I)$.

Pour trouver les quantités I et S correspondant à une inconnue quelconque c_s il suffit d'éliminer toutes les autres entre les inégalités ci-dessus.

En éliminant c_1, c_2, ..., c_{s-1} entre les s premières inégalités, et de c_{s+1}, c_{s+2} ..., c_t entre les inégalités suivantes d'après la méthode la plus approximative en suivant la marche qui a déjà été expliquée au paragraphe 2, en désignant de plus les sommes $(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s)$, $(\theta_1 + \theta_2 \ldots + \theta_{t+1})$, $(d_1 + d_2 \ldots d_s)$ et $(d_1 + d_2 \cdots + d_{t+1})$ par $[\theta]_s$, $[\theta]$, $[d]_s$ et $[d]$, on trouve :

$$\begin{gathered}
C_u + [d]_s - [\theta]_s < c_s < C_u + [d]_s + [\theta]_s, \\
C_v + [d]_s + [\theta]_s - [d] - [\theta] < c_s < C_v + [d]_s - [\theta]_s - [d] + [\theta].
\end{gathered}$$

Les valeurs c'_s et C'_v dites *observées*, et l'erreur de fermeture F sont les quantités définies par les relations :

$$c'_s = C_u + [d]_s.$$
$$C'_v = C'_u + [d],$$
$$F = C_v - C'_v.$$

En posant :

$$I' = c'_s - [\theta]_s,$$
$$S' = c'_s + [\theta]_s,$$
$$I'' = S' + F - [\theta],$$
$$S'' = I' + F + [\theta],$$

les deux dernières inégalités prennent la forme :

$$I' < c_v < S',$$
$$I'' < c_r < S''.$$

Le plus petit intervalle (I, S) qui contient c_v s'obtient en prenant pour I la plus grande des deux quantités I' et I'', et pour S, la plus petite des deux quantités S' et S.

Connaissant S et I l'on calcule la valeur la plus approximative $\frac{1}{2}(S + I)$, et son approximation $\frac{1}{2}(S - I)$.

Si on trouvait pour S une valeur inférieure à I, on devrait en conclure que les approximations fournies par les observateurs sont absurdes.

Lorsque les valeurs données pour les approximations sont bonnes, quatre cas peuvent se présenter, savoir :

$I' > I''$, $S' < S''$, et par suite $I = I'$, $S = S'$;
$I' > I''$, $S'' < S'$, id. $I = I'$, $S = S''$;
$I'' > I'$, $S' < S''$, id. $I = I''$, $S = S'$;
$I' > I'$, $S' < S'$, id. $I = I''$, $S = S''$.

Les inconnues rentrant dans le premier de ces cas seront dites de *première espèce*. Celles qui rentreront dans l'un ou l'autre des deux cas suivants seront dites de *deuxième espèce*. Celles qui rentreront dans le dernier cas seront dites de *troisième espèce*.

Pour les inconnues de première espèce, les inégalités $I' > I''$, $S' < S''$, sont :

$$c'_s - [\theta]_s > c'_s + [\theta]_s + F - [\theta],$$
$$c' + [\theta]_s < c'_s - [\theta]_s + F + [\theta].$$

On en déduit :

$$[\theta]_s < \frac{[\theta] - F}{2},$$

$$[\theta]_s < \frac{[\theta] + F}{2},$$

et, en désignant par λ' l'expression $\frac{[\theta] - |F|}{2}$, on peut résumer les inégalités ci-dessus dans la seule relation :

$$[\theta]_s < \lambda'.$$

Cette relation caractérise donc les inconnues de première espèce. La valeur la plus approximative de ces inconnues est $\frac{S' + I'}{2} = c'_s$, et son approximation est $\frac{S' - I'}{2} = [\theta]_s$.

Pour les inconnues de deuxième espèce il y a deux cas à considérer :

Dans le cas $I' > I''$, $S' < S''$ où

$$c'_s - [\theta]_v > c'_s\,[\theta]_v + F - [\theta],$$
$$c'_s + [\theta]_s + F + [\theta] < c'_s + [\theta]_s,$$

on a :

$$[\theta]_s < \frac{[\theta] - F}{2},$$

$$[\theta]_s > \frac{[\theta] + F}{2}.$$

Pour que ce cas puisse se présenter, on doit nécessairement avoir :

$$[\theta] + F < [\theta] - F,$$

ou

$$F < 0.$$

Alors les deux inégalités précédentes limitant les valeurs de $[\theta]_s$ peuvent s'écrire :

$$[\theta]_s < \frac{[\theta] + |F|}{2},$$

$$[\theta]_s > \frac{[\theta] - |F|}{2},$$

ou, en désignant $\frac{[\theta] + |F|}{2}$ par λ'' :

$$[\theta]_s < \lambda'',$$
$$[\theta]_s > \lambda'.$$

La valeur la plus approximative de c_s, $\frac{S'' + I'}{2}$, vaut :

$$I' + \lambda',$$

et a pour approximation λ'.

Dans le cas $I'' > I'$, $S' < S''$ ou

$$c'_s + [\theta]_s + F - [\theta] > c'_s - [\theta]_s,$$
$$c'_s + [\theta]_s < c_s - [\theta]_s + F + [\theta],$$

on a :

$$[\theta]_s > \frac{[\theta] - F}{2},$$
$$[\theta]_s < \frac{[\theta] + F}{2}.$$

Pour que ce cas puisse se présenter, on doit nécessairement avoir :

$$[\theta] - F < [\theta] + F,$$

ou

$$F > 0.$$

Alors les deux inégalités précédentes, limitant les valeurs de $[\theta]_s$, peuvent s'écrire :

$$[\theta]_s > \frac{[\theta] - |F|}{2},$$
$$[\theta]_s < \frac{[\theta] + |F|}{2},$$

ou, comme dans le cas précédent :

$$[\theta]_s < \lambda'',$$
$$[\theta]_s > \lambda'.$$

La valeur la plus approximative de c_s, $\frac{I'' + S'}{2}$, vaut :

$$S' - \lambda',$$

et a encore pour approximation $\frac{[\theta] - |F|}{2}$ ou λ'.

En résumant les deux cas que nous venons de traiter nous voyons que, pour les inconnues de deuxième espèce, l'approximation vaut λ' dans les deux cas.

Mais la valeur la plus approximative varie selon que l'erreur de fermeture est positive ou négative. Pour une erreur négative la valeur la plus approximative est égale à $(I' + \lambda')$. Pour une erreur positive c'est $(S' - \lambda')$.

Pour les inconnues de troisième espèce correspondant à $I'' > I'$, $S'' < S'$ ou

$$c'_s + [\theta]_s + F - [\theta] > c'_s - [\theta]_s,$$
$$c'_s - [\theta]_s + F + [\theta] < c'_s + [\theta]_s,$$

on a :

$$[\theta]_s > \frac{[\theta] - F}{2},$$

$$[\theta]_s > \frac{[\theta] + F}{2},$$

ou

$$[\theta]_s > \frac{[\theta] + |F|}{2}.$$

La valeur la plus approximative de c_s est $\frac{S'' + I''}{2}$. Elle vaut $c_s + F(C)$ et a pour approximation $\{[\theta] - [\theta]_s\}$.

6. Exemple numérique

Nous avons traité, comme exemple numérique, la traverse ABCDEGLQM dont il a déjà été question précédemment.

Il a suffi, à cet effet, de suivre à la lettre les instructions jointes à l'imprimé pour résoudre le problème.

L'imprimé est combiné de manière qu'on puisse déterminer en même temps la limite inférieure de ϵ.

TRAVERSE : ABCDEGLQM

Compensation de la coordonnée Z

P^t A	d_s		C_u	60,000
	$[\delta]_s$			
	θ_s	0,001		
	$[\theta]_s$			
P^t B	d_s	— 6,465	C_s	53,535
	$[\delta]_s$		*app*	0,066
	θ_s	0,065		
	$[\theta]_s$	0,066		
P^t C	d_s	— 3,630	C_s	49,905
	$[\delta]_s$	10,095	*app*	0,102
	θ_s	0,036		
	$[\theta]_s$	0,102		
P^t D	d_s	— 0,674	C_s	49,231
	$[\delta]_s$	10,769	*app*	0,109
	θ_s	0,007		
	$[\theta]_s$	0,109		
P^t E	d_s	— 0,568	C_s	48,663
	$[\delta]_s$		*app*	0,115
	θ_s	0,006		
	$[\theta]_s$	0,115		

TRAVERSE : ABCDEGLQM *(suite)*

COMPENSATION DE LA COORDONNÉE Z

$\mathrm{P^t}$ G	d_s	6,432	C_s	55,095
	$[\delta]_s$	17,769	$-[\theta]_s$	$-0{,}179$
			I'	54,916
			λ'	0,162
	θ_s	0,064	C_s	55,078
	$[\theta]_s$	0,179	*app*	0,162
$\mathrm{P^t}$ L	d_s	19,623	C'_s	74,718
	$[\delta]_s$	37,392	F	$-0{,}078$
			C_s	74,640
			$[\theta]$	0,401
	θ_s	0,196	$-[\theta]_s$	$-0{,}375$
	$[\theta]_s$	0,375	*app*	0,026
$\mathrm{P^t}$ Q	d_s	0,407	C'_s	75,125
	$[\delta]_s$	37,799	F	$-0{,}078$
			C_s	75,047
			$[\theta]$	0,401
	θ_s	0,004	$-[\theta]_s$	$-0{,}379$
	$[\theta]_s$	0,379	*app*	0,022
$\mathrm{P^t}$ M	d_s	1,206	C_v	76,253
	$[\delta]_s$	93,005	C'_v	76,331
			F	$-0{,}078$
	θ''	0,010		
	θ_s	0,012		
	$[\theta]_s$	0,401		
$\mathrm{P^t}$	d_s		λ'	0,162
	$[\delta]_s$		$2\lambda'$	0,323
			$[\theta]$	0,401
			$\vert F \vert$	0,078
	θ_s		$2\lambda''$	0,479
	$[\theta]_s$		λ''	0,240

TRAVERSE : ABCDEGLOM *(suite)*

COMPENSATION DE LA COORDONNÉE Z

	d_s		$\lvert F \rvert$	0,078
	$[\delta]_s$		$-\theta'$	$-0{,}001$
P^t			Δ'	0,077
			$-\theta''$	0,010
	θ_s		Δ''	0,067
	$[\theta]_s$		m	0,00171
	d_s	67000		39005
	$[\delta]_s$	39005		0,00171
P^t		279950		
		273035		
	θ_s	69150		
	$[\theta]_s$			

7. RÉSOLUTION DU PROBLÈME PAR LA MÉTHODE DES MOINDRES CARRÉS

Pour trouver les valeurs les plus approximatives des inconnues, par exemple des quatre inconnues c_1, c_2, c_3, c_4, répondant à des équations telles que

$$\begin{aligned} c_1 - C_u &= d_1 + r_1, \\ c_2 - c_1 &= d_2 + r_2, \\ c_3 - c_2 &= d_3 + r_3, \\ c_4 - c_3 &= d_4 + r_4, \\ C_v - c_4 &= d_5 + r_5, \end{aligned}$$

on doit connaître les approximations de r_1, r_2, r_3, r_4 et r_5.

Lorsque ces approximations sont inconnues, ou ne sont pas suffisamment bien connues pour qu'on puisse se baser sur elles pour effectuer la compensation des erreurs, on doit trouver, pour faire cette compensation, un autre procédé que la méthode la plus approximative.

Supposons qu'on ait recours à la méthode des moindres carrés et qu'on attribue une même approximation inconnue, M, aux résidus r_1, r_2, r_3, r_4, r_5.

Avant d'appliquer le procédé aux équations données, nous allons simplifier ces dernières en faisant usage de valeurs approximatives des inconnues, et en remplaçant les inconnues proprement dites par les accroissements h_1, h_2, h_3, h_4 qu'il convient d'ajouter aux valeurs approximatives.

Pour obtenir ces dernières nous résolvons quatre des équations, par exemple les quatre premières, en faisant abstraction des résidus. Nous obtenons ainsi les valeurs c'_1, c'_2, c'_3, c'_4 que nous avons déjà rencontrées sous le nom de valeurs observées.

Posons donc :

$$\begin{aligned} c_1 &= c'_1 + h_1 = C_u + d_1 + h_1, \\ c_2 &= c'_2 + h_2 = C_u + d_1 + d_2 + h_2, \\ c_3 &= c'_3 + h_3 = C_u + d_1 + d_2 + d_3 + h_3, \\ c_4 &= c'_4 + h_4 = C_u + d_1 + d_2 + d_3 + d_4 + h_4. \end{aligned}$$

Les équations proposées deviennent :

$$\begin{aligned} h_1 &= 0 + r_1, \\ h_2 - h_1 &= 0 + r_2, \\ h_3 - h_2 &= 0 + r_3, \\ h_4 - h_3 &= 0 + r_4, \\ -h_4 &= -F + r_5. \end{aligned}$$

Les équations finales des moindres carrés sont :

$$\begin{aligned} 2h_1 - h_2 \;.\;.\;.\;.\;.\; &= 0, \\ -h_1 + 2h_2 - h_3 \;.\;.\; &= 0, \\ .\;.\; - h_2 + 2h_3 - h_4 &= 0, \\ .\;.\;.\;.\; - h_3 + 2h_4 &= F, \end{aligned}$$

et donnent pour valeurs finales :

$$h_1 = \frac{F}{5}, \quad h_2 = \frac{2F}{5}, \quad h_3 = \frac{3F}{5}, \quad h_4 = \frac{4F}{5}.$$

D'une manière générale, en désignant par t le nombre des inconnues c_s, on a :

$$h_s = s\frac{F}{t+1}, \quad c_s = c'_s + s\frac{F}{t+1}.$$

C'est le procédé qui est habituellement employé par les topographes.

Si nous l'appliquons à l'exemple numérique à sept inconnues, traité précédemment, nous trouvons :

$$h_1 = -\frac{0{,}078}{8} = -0{,}00975, \qquad c_1 = 53{,}525,$$
$$h_2 = \ .\ .\ .\ .\ = -0{,}01950, \qquad c_2 = 49{,}885,$$
$$h_3 = \ .\ .\ .\ .\ = -0{,}02925, \qquad c_3 = 49{,}202,$$
$$h_4 = \ .\ .\ .\ .\ = -0{,}03900, \qquad c_4 = 48{,}625,$$
$$h_5 = \ .\ .\ .\ .\ = -0{,}04875, \qquad c_5 = 55{,}046,$$
$$h_6 = \ .\ .\ .\ .\ = -0{,}05850, \qquad c_6 = 74{,}582,$$
$$h_7 = \ .\ .\ .\ .\ = -0{,}06825, \qquad c_7 = 75{,}057.$$

Si nous comparons ces valeurs finales aux valeurs les plus approximatives trouvées précédemment, nous voyons que la valeur c_6 sort de l'intervalle (I, S), ou :

$$74{,}614 \ldots 74{,}666.$$

Cette valeur finale est donc absurde.

Ce fait ne constitue pas une exception. Il se présente très souvent lorsqu'on applique les moindres carrés à la compensation des traverses topographiques, principalement pour les points voisins du point de départ et du point de fermeture et qui, par suite, sont le mieux déterminés.

Par conséquent, en compensant une traverse par les moindres carrés, comme nous l'avons fait ci-dessus et comme cela se pratique du reste couramment, c'est-à-dire en répartissant uniformément l'erreur de fermeture sur les intervalles entre les sommets successifs, on s'expose toujours à trouver des valeurs finales qui seraient manifestement absurdes si l'on connaissait l'approximation commune des résidus r_1, r_2, ...

On peut évidemment objecter à ce qui précède que, sans connaître les approximations des résidus, on peut néanmoins leur attribuer des approximations proportionnelles aux seconds membres des équations au lieu de leur attribuer une approximation unique.

Voyons à quel résultat on est conduit ainsi :

$$
\begin{aligned}
c_1 &= C_u + d_1 + r_1,\\
c_2 - c_1 &= d_2 + r_2,\\
c_3 - c_2 &= d_3 + r_3,\\
c_4 - c_3 &= d_4 + r_4,\\
- c_4 &= - C_v + d_5 + r_5,
\end{aligned}
$$

ou, en les simplifiant comme précédemment :

$$
\begin{aligned}
h_1 &= 0 + r_1,\\
h_2 - h_1 &= 0 + r_2,\\
h_3 - h_2 &= 0 + r_3,\\
h_4 - h_3 &= 0 + r_4,\\
- h_4 &= - F + r_5.
\end{aligned}
$$

Les résidus r_1, r_2, r_3, r_4, r_5 ont des approximations respectives $\epsilon\delta_1$, $\epsilon\delta_2$, $\epsilon\delta_3$, $\epsilon\delta_4$, $\epsilon\delta_5$ dans lesquelles δ_1, δ_2, δ_3, δ_4, δ_5 sont les valeurs absolues respectives de d_1, d_2, d_3, d_4, d_5.

En divisant les équations respectivement par δ_1, δ_2, δ_3, δ_4, δ_5 et en désignant les quantités $\frac{1}{\delta_1}, \frac{1}{\delta_2}, \ldots, \frac{1}{\delta_5}, \frac{r_1}{\delta_1}, \frac{r_2}{\delta_2}, \ldots, \frac{r_5}{\delta_5}$ par Δ_1, $\Delta_2, \ldots, \Delta_5$, ς_1, $\varsigma_2, \ldots, \varsigma_5$, on obtient une nouvelle série d'équations dans lesquelles les seconds membres ont la même approximation inconnue ϵ :

$$
\begin{aligned}
\Delta_1 h_1 &= 0 + \varsigma_1,\\
\Delta_2 h_2 - \Delta_2 h_1 &= 0 + \varsigma_2,\\
\Delta_3 h_3 - \Delta_3 h_2 &= 0 + \varsigma_3,\\
\Delta_4 h_4 - \Delta_4 h_3 &= 0 + \varsigma_4,\\
- \Delta_5 h_4 &= - F\Delta_5 + \varsigma_5.
\end{aligned}
$$

Les équations finales correspondantes sont :

$$
\begin{aligned}
(\Delta_1^2 + \Delta_2^2)h_1 - \Delta_2^2 h_2 &= 0,\\
- \Delta_2^2 h_1 + \Delta_2^2 + \Delta_3^2)h_2 - \Delta_3^2 h_3 &= 0,\\
- \Delta_3^2 h_2 + (\Delta_3^2 + \Delta_4^2)h_3 - \Delta_4^2 h_4 &= 0,\\
- \Delta_4^2 h_3 + (\Delta_4^2 + \Delta_5^2)h_4 &= F\Delta_5^2,
\end{aligned}
$$

et les valeurs finales :

$$h_1 = F\frac{\delta_1\delta_1}{[\delta\delta]},$$

$$h_2 = F\frac{\delta_1\delta_1 + \delta_2\delta_2}{[\delta\delta]},$$

$$h_3 = F\frac{\delta_1\delta_1 + \delta_2\delta_2 + \delta_3\delta_3}{[\delta\delta]},$$

$$h_4 = F\frac{\delta_1\delta_1 + \delta_2\delta_2 + \delta_3\delta_3 + \delta_4\delta_4}{[\delta\delta]}.$$

Si nous appliquons ce procédé à l'exemple numérique, nous obtenons en forçant les fractions :

$$\begin{aligned}
h_1 &= -0{,}007 \quad , \quad c_1 = 53{,}528\\
h_2 &= -0{,}009 \quad , \quad c_2 = 49{,}896\\
h_3 &= -0{,}009 \quad , \quad c_3 = 49{,}222\\
h_4 &= -0{,}009 \quad , \quad c_4 = 49{,}644\\
h_5 &= -0{,}016 \quad , \quad c_5 = 55{,}079\\
h_6 &= -0{,}078 \quad , \quad c_6 = 74{,}640\\
h_7 &= -0{,}078 \quad , \quad c_7 = 75{,}047
\end{aligned}$$

Aucune de ces valeurs n'est absurde.

Le remède a donc réussi dans ce cas-ci. Mais cet avantage est purement fortuit et n'existe pas toujours et, comme le procédé corrigé comporte des calculs plus laborieux que la méthode la plus approximative, rien ne nous engage à lui accorder la préférence.

8. Résolution du problème par l'approximation minima

Nous venons de voir que la méthode des moindres carrés peut être appliquée à la compensation d'une traverse, lorsque les approximations des mesures sont inconnues. Mais nous avons vu aussi qu'en l'appliquant à ce problème on s'expose à trouver des valeurs compensées qui peuvent être reconnues absurdes lorsqu'on parvient à se rendre compte des approximations des mesures topographiques.

Il n'est cependant pas possible de compenser la traverse par la méthode la plus approximative qui exige la connaissance des approximations.

La méthode de l'approximation minima enserre les résidus dans le plus petit intervalle possible ($-m$, $+m$). Elle rend aussi proche que possible de zéro le plus grand résidu, abstraction faite du signe.

Par conséquent, si l'on désigne par e une valeur quelconque admissible pour l'approximation ϵ et, par suite, supérieure à l'approximation minima m, les résidus correspondant à m, étant compris dans l'intervalle ($-m$, $+m$), sont compris, *à fortiori*, dans l'intervalle ($-e$, $+e$).

Dès lors si, ne connaissant pas la valeur e qu'il convient d'attribuer à ϵ, on adopte les solutions finales correspondant à m, on peut être certain que ces solutions ne seront jamais absurdes quelle que soit l'approximation ϵ qu'il conviendra un jour aux observateurs d'assigner à leurs mesures.

Dans ces conditions, la méthode de l'approximation minima s'impose, de préférence aux moindres carrés, chaque fois que l'approximation ϵ sera inconnue, ou ne sera pas connue avec une certitude suffisante pour qu'on puisse baser la compensation d'une traverse sur la connaissance de ϵ.

Nous avons vu précédemment comment on détermine l'approximation minima m.

Nous avons vu aussi comment on calcule, à l'aide d'un imprimé systématique, les valeurs finales les plus approximatives, connaissant une approximation ϵ. Il suffit donc d'appliquer l'imprimé au cas $\epsilon = m$.

Nous avons vu que, si la quantité $\frac{|F| - \theta' - \theta''}{[\delta]}$ est supérieure à zéro, elle est la limite inférieure m de ϵ.

Un cas remarquable est celui où l'on peut négliger $\theta' + \theta''$ en présence de $|F|$.

Dans ce cas, la limite m vaut $\frac{|F|}{[\delta]}$.

Pour appliquer à ce cas les inégalités nécessaires et suffisantes trouvées au paragraphe 4, pour une inconnue quelconque c_s :

$$C_u + [d]_s - [\theta]_s < c_s < C_u + [d_s] + [\theta]_s,$$
$$C_v + [d]_s + [\theta]_s - [d] - [\theta] < c_s < C_v + [d]_s - [\theta]_s - [d] + [\theta],$$

il suffit de remplacer $[\theta]_s$ et $[\theta]$ par leurs valeurs respectives $m\,[\delta]_s$ et $m\,[\delta]$, ou $|F|\,\frac{[\delta]_s}{[\delta]}$ et $|F|$.

On obtient ainsi :

$$C_u + [d]_s - |F|\,\frac{[\delta]_s}{[\delta]} < c_s < C_u + [d]_s + |F|\,\frac{[\delta]_s}{[\delta]},$$

$$C_v + [d]_s + |F|\,\frac{[\delta]_s}{[\delta]} - [d] - |F| < c_s < C_v + [d]_s - |F|\,\frac{[\delta]_s}{[\delta]} - [d] + |F|.$$

Nous avons d'autre part :

$$C'_v = C_u + [d],$$
$$F = C_v - C'_v,$$

et, par suite :

$$C_v = F + C_u + [d].$$

En remplaçant C_v par cette valeur, et $C_u + [d]_s$ par sa valeur c'_s, dans la deuxième des dernières inégalités elles deviennent :

$$c'_s - |F|\,\frac{[\delta]_s}{[\delta]} < c_s < c'_s + |F|\,\frac{[\delta]_s}{[\delta]},$$

$$c'_s + F - |F| + |F|\,\frac{[\delta]_s}{[\delta]} < c_s < c'_s + F + |F| - |F|\,\frac{[\delta]_s}{[\delta]}.$$

Dans le cas où F est positif, ces inégalités se réduisent à :

$$c'_s - F\,\frac{[\delta]_s}{[\delta]} < c_s < c'_s + F\,\frac{[\delta]_s}{[\delta]}$$

$$c'_s + F\,\frac{[\delta]_s}{[\delta]} < c_s < c'_s + 2F - F\,\frac{[\delta]_s}{[\delta]}.$$

Puisque c_s est à la fois inférieur et supérieur à $c'_s + F\,\frac{[\delta]_s}{[\delta]}$ et que $\frac{F}{[\delta]}$ vaut m, on a nécessairement :

$$c_s = c'_s + m\,[\delta]_s.$$

Dans le cas où F est négatif, les inégalités se réduisent à :

$$c'_s - m[\mathfrak{d}]_s < c_s < c'_s + m[\mathfrak{d}]_s,$$
$$c'_s + 2F + m[\mathfrak{d}]_s < c_s < c'_s - m[\mathfrak{d}]_s,$$

et l'on a certainement :

$$c_s = c'_s - m[\mathfrak{d}]_s.$$

Par conséquent, dans le cas où l'on peut négliger $\theta' + \theta''$ en présence de $|F|$ il n'est pas nécessaire de faire la compensation au moyen de l'imprimé.

Il suffit d'ajouter la correction $m[\mathfrak{d}]_s$ à chaque valeur observée c_s si l'erreur de fermeture est positive, et de retrancher cette même quantité si l'erreur de fermeture est négative.

9. EXEMPLE NUMÉRIQUE

Nous traitons ci-après, comme exemple numérique, la traverse ABCDEGLQM que nous avons compensée précédemment par la méthode la plus approximative.

A cet effet, nous employons la même méthode en prenant pour approximation le minimum 0,00171 trouvé précédemment. Nous reproduisons du reste sur le tableau, les calculs qui ont permis de trouver ce minimum.

Toutes les valeurs finales c_s sont comprises dans les intervalles $](c_s - app), (c_s + app)[$ trouvés par la méthode la plus approximative appliquée à l'approximation $\epsilon = 0{,}01$ donnée par l'observateur compétent.

TRAVERSE : ABCDEGLQM

COMPENSATION DE LA COORDONNÉE Z

Pt A	d_s		C_u	60,000
	$[\delta]_s$			
	θ_s	0,001		
	$[\theta]_s$			
Pt B	d_s	— 6,465	c'_s	53,535
	$[\delta]_s$		$-[\theta]_s$	— 0,012
			I'	53,523
			λ'	0,000
	θ_s	0,0111	c_s	53,523
	$[\theta]_s$	0,0121	*app*	0,000
Pt C	d_s	— 3,630	c'_s	49,905
	$[\delta]_s$		$-[\theta]_s$	— 0,018
			I'	49,887
			λ'	0,000
	θ_s	0,0062	c_s	49.887
	$[\theta]_s$	0,0183	*app*	0,000
Pt D	d_s	— 0,674	c'_s	49,231
	$[\delta]_s$	10,769	$-[\theta]_s$	— 0,019
			I'	49,212
			λ'	0,000
	θ_s	0,0012	c_s	49,212
	$[\theta]_s$	0,0195	*app*	0,000
Pt E	d_s	— 0,568	c'_s	48,663
	$[\delta]_s$	11,337	$-[\theta]_s$	— 0,021
			I'	48,642
			λ'	0,000
	θ_s	0,0010	c_s	48,642
	$[\theta]_s$	0,0205	*app*	0,000

TRAVERSE : ABCDEGLQM *(suite)*

COMPENSATION DE LA COORDONNÉE Z

P^{t} G	d_s	— 6,432	c'_s	55,095
	$[\delta]_s$	17,769	$-[\theta]_s$	— 0,033
			l'	55,062
			λ'	0,000
	θ_s	0,0120	c_s	55,062
	$[\theta]_s$	0,0325	*app*	0,000
P^{t} L	d_s	19,623	c'_s	74,718
	$[\delta]_s$	37,392	$-[\theta]_s$	— 0,066
			l'	74,652
			λ'	0,000
	θ_s	0,0336	c_s	74,652
	$[\theta]_s$	0,0664	*app*	0,000
P^{t} Q	d_s	0,407	c'_s	75,125
	$[\delta]_s$	37,799	$-[\theta]_s$	— 0,067
			l'	75,058
			λ'	0,000
	θ_s	0,0007	c_s	75,058
	$[\theta]_s$	0,0668	*app*	0,000
P^{t}	d_s	1,206	C_v	76,253
	$[\delta]_s$	39.005	C'_v	76,331
			F	— 0,078
	θ''	0,0100		
	θ_s	0,0021		
	$[\theta]_s$	0,078		
P^{t}	d_s		λ'	0,000
	$[\delta]_s$		$2\lambda'$	0,000
			$[\theta]$	0,078
			$\|F\|$	0,078
	θ_s		$2\lambda''$	0,156
	$[\delta]_s$		λ''	0,078

TRAVERSE : ABCDEGLQM *(suite)*

COMPENSATION DE LA COORDONNÉE Z

	d_s		$\|F\|$	0,078
	$[\delta]_s$		$-\theta'$	$-0,001$
P^t			Δ'	0,077
			$-\theta''$	$-0,010$
	θ_s		Δ''	0,067
	$[\delta]_s$		m	0,00171
	d_s	67000		39005
	$[\delta]_s$	39000		0,00171
P^t		279950		
		273035		
	θ_s	69150		
	$[\theta]_s$			

LA POPULATION DU LIMBOURG

par l'**Abbé J. CLAERHOUT**

CHAPITRE PREMIER

ANTHROPOLOGIE DU LIMBOURG

La population du Limbourg se présente comme un amalgame de deux races, en entendant par race, un ensemble d'individus, caractérisés par les mêmes qualités physiques, dont les principales sont la structure du crâne, la forme du visage et du nez, la couleur des yeux et des cheveux, la taille.

La question des races relève de l'anthropologie : elle doit être examinée sans aucun sentiment de nationalité, sans aucune préoccupation d'origine ethnique.

I. — *La race Nordique*

Nous rencontrons sur le sol du Limbourg les représentants de la race Nordique, caractérisée par un crâne dolichocéphale, une peau claire, des yeux bleus, des cheveux blonds, l'occiput saillant, un visage ovale, un nez effilé et une taille élevée.

La race Nordique est représentée dans cette province de deux manières.

On y trouve d'abord un certain nombre de types purs, qui réunissent tous les caractères attribués à la race Nordique.

Il est impossible de donner le nombre approximatif de ces types purs, comme M. Ammon l'a fait pour le grand-duché de Bade, parce que personne n'a entrepris, sur le Limbourg, une enquête anthropologique assez minutieuse.

Voici les caractères d'un type de la race Nordique, dont M. Houzé a exposé le portrait à l'Exposition de Bruxelles en 1897 : peau claire, yeux bleus, cheveux blonds, face orthognathe, occiput saillant, profil du nez rectiligne, pointe du nez horizontale, indice céphalique 72,08, indice nasal 62,50, indice facial supérieur 56,93, taille 1^{m},71 : ce sont les caractéristiques d'un beau spécimen de la race Nordique ([1]).

Nous rencontrons aussi dans le Limbourg la race Nordique, noyée dans la masse de la population, disséminée, avec ses caractères, dans l'ensemble du peuple limbourgeois ([2]).

Nous n'avons pu relever les proportions pour tous les caractères ; contentons-nous de discerner les plus importants.

Il y a d'abord l'indice céphalique.

Nous autorisant des paroles suivantes de M. Deniker : « Il faut avoir un certain nombre de crânes, de 10 à 30 au moins, suivant l'homogénéité de la population, pour pouvoir discerner les éléments constitutifs d'une population donnée, en tant qu'ils se manifestent dans les caractères crâniens » ([3]), nous avons effectué quelques mensurations sur le vivant et nous avons pu constituer une série de 30 sujets, pris au hasard, originaires de différents endroits de la province et appartenant à la petite bourgeoisie et à la classe ouvrière.

Nous suivons la nomenclature de Broca ; notre série contient 3 dolichocéphales, 7 sous-dolichocéphales, 10 mésaticéphales, 6 sous-brachycéphales et 4 brachycéphales.

Nos observations ont abouti à ce résultat très curieux que les dolichocéphales, les mésaticéphales et les brachycéphales se partagent la province en proportions équivalentes.

Il ressort de notre tableau que la province compte 33,33 °/₀ de dolichocéphales, 33,33 °/₀ de mésaticéphales et 33,33 °/₀ de brachycéphales.

([1]) Houzé, II, p. 57. Voir la bibliographie à la fin du mémoire. Nous ne citons que le nom de l'auteur, avec un n° d'ordre s'il y a plus d'un ouvrage du même auteur.

([2]) W. Z. Ripley, pp. 103 à 130.

([3]) J. Deniker, *Les races et les peuples de la terre*. Paris, 1900, p. 70.

Voici le tableau de nos mensurations :

Numéros d'ordre	LIEUX D'ORIGINE	Diamètre transversal	Diamètre antéro-postérieur	Indice céphalique craniométrique (En retr. 2 unités)
1	Herstappe	172	196	85,75
2	Velm	163	196	81,16
3	Ulbeek	152	189	78,42
4	Borloo	158	192	80,29
5	Petit-Brogel	161	199	78,90
6	Maeseyck	158	196	78,61
7	Hasselt	168	196	83,71
8	Neeroeteren	162	186	85,09
9	Saint-Trond	158	198	77,79
10	Tongres	163	196	81,16
11	Tongres	170	206	80,52
12	Saint-Trond	158	194	79,44
13	Herck-Saint-Lambert	149	192	75,60
14	Opglabbeek	150	196	74,53
15	Eelen	156	192	79,25
16	Dilsen	160	181	86,39
17	Saint-Trond	148	192	75,08
18	Kessenich	150	199	73,37
19	Achel	148	178	81,14
20	Rothem	146	180	79,11
21	Bassenge	166	202	80,17
22	Lowaige	156	196	77,59
23	Maeseyck	152	198	74,76
24	Asch	160	198	78,80
25	Ulbeek	153	192	77,86
26	Meeuwen	148	184	78,43
27	Alken	162	206	76.64
28	Saint-Trond	152	187	79,28
29	Martenslinde	148	187	77,14
30	Diepenbeek	159	205	75,56

Si nous attribuons la moitié des mésaticéphales à l'influence de la dolichocéphalie, nous pouvons, en considérant l'indice céphalique, regarder la moitié de la population comme appartenant à la race Nordique.

M. Houzé a obtenu autrefois 57,69 % de têtes longues (¹). Il nous en coûte d'être en contradiction avec ce maître autorisé de l'anthropologie en Belgique; nous souhaitons que le résultat auquel nous sommes arrivé ait pour effet de stimuler le zèle des savants et de provoquer de nouvelles investigations ; nous doutons cependant que leurs résultats ébranlent gravement nos conclusions.

Passons à l'examen de la taille.

Les tailles au-dessus de la moyenne et surpassant $1^m,65$ se rencontrent au Limbourg dans la proportion de 68,11 %, d'après les mensurations des miliciens et des volontaires de 1902 à 1906, âgés de 20 ans et plus.

Les tailles élevées au-dessus de $1^m,70$ s'y remarquent dans la proportion de 34,55 % ; aucune province ne fournit des chiffres aussi élevés (²).

D'une enquête personnelle sur la couleur des yeux et des cheveux, résultent les données suivantes :

Il y a 40 % d'yeux bleus ; si nous y ajoutons 22 % d'yeux verts et 2 % d'yeux gris, le type clair prédomine dans la proportion de 64 %.

Nous avons trouvé 42 % de cheveux blonds ; 28 fois sur 100 cas, les yeux bleus sont associés aux cheveux blonds : d'où ressort une fréquence de 28 % du type Nordique quand nous tenons compte de la coloration des yeux et des cheveux.

II. — *La race Alpine*

Le Limbourg est habité aussi par les représentants de la race Alpine, caractérisée par un crâne brachycéphale, la peau bistre, des yeux marrons, des cheveux châtains plus ou moins foncés, l'occiput arrondi, un visage rond, l'indice nasal platyrhinien et la taille moins élevée.

(¹) Houzé, II, p. 57.
(²) Vervaeck, p. 34.

A côté des types purs, dont nous ne connaissons pas la proportion, on peut observer les caractères de cette race, épars dans l'ensemble de la population.

Nous rencontrons 33,33 % de brachycéphales, la proportion est plus élevée que celle de 19,23 %, obtenue par M. Houzé (1). On s'en étonnera moins si l'on se rappelle que M. Houzé signale 40,37 % de brachycéphales dans le village de Mendonck (2) (Flandre Orientale) et que les districts de Graenland et de Thelemarken, en Norvège, donnent respectivement 36,6 % et 32,3 % de brachycéphales (3).

En faisant pencher la moitié des mésaticéphales vers la brachycéphalie, nous pouvons considérer la moitié de la population du Limbourg, comme brachycéphale.

Les tailles au-dessous de la moyenne de 1m,65 apparaissent au Limbourg dans la proportion de 31,85 %, parmi les miliciens et les volontaires de 20 ans et plus, de 1902 à 1906 (4).

Notre enquête a fourni 36 % d'yeux bruns, 40 % de cheveux châtain foncé. Dans 12 cas sur 100 les yeux bruns sont associés aux cheveux châtain foncé, ce qui donne pour le type Alpin, le plus foncé, une fréquence de 12 %.

CHAPITRE II

ETHNOLOGIE DU LIMBOURG

Nous connaissons au Limbourg quatre couches de civilisations. Au néolithique, à la civilisation des Celtes et des Belgo-Romains est superposée la civilisation franque.

La population actuelle renferme vraisemblablement à doses plus ou moins perceptibles les descendants des néolithiques, des Celtes, des Belgo-Romains et des Francs.

---

(1) Houzé, II, p. 57.

(2) E. Houzé, *Enquête anthropologique sur le village de Mendonck*, dans BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ D'ANTHROPOLOGIE DE BRUXELLES, tome XV, 1896-1897, p. 15. Bruxelles, 1897.

(3) ZENTRALBLATT FÜR ANTHROPOLOGIE, tome X, 1905, p. 154. Braunschweig, 1905.

(4) Vervaeck, p. 34.

Essayons de relever quelques traces de ces quatre civilisations.

I. — *Les Néolithiques du Limbourg*

Nous ne pensons pas que le Limbourg ait été peuplé, pendant les diverses phases du paléolithique, malgré quelques silex à facies paléolithique qu'on puisse y avoir récoltés çà et là.

Voici les noms des endroits dans lesquels on a découvert des silex néolithiques : Emael, Smeermaes, Haelen, Neeritter, Lanaeken, Molenheersel, Zonhoven, Genck, Hechtel, Hasselt (¹), etc.

Les premiers vestiges d'habitations palafittiques ont été trouvés à Herck-Saint-Lambert et à Bassenge (²), notre ami, M. De Puydt, a découvert un de ces fameux villages à fonds de cabanes du célèbre groupement des fonds de cabanes de la Hesbaye.

On y a recueilli des spécimens de poterie néolithique ornementée, comme dans les stations lacustres de la Suisse et les villages néolithiques de Grossgartach en Allemagne, de Lengyel en Hongrie et de Butmir en Bosnie.

Les néolithiques se livraient à l'agriculture : les débris de poterie recueillis à Bassenge portent, incrustées dans la pâte, des empreintes de graines de céréales et notamment du *triticum dicoccum*.

L'époque néolithique fut caractérisée par une immense poussée de tribus brachycéphales venues d'Asie, qui constituent le noyau de la race Alpine.

Ces néolithiques brachycéphales préaryens, dont le nom et la langue nous sont inconnus, ont aussi peuplé le Limbourg, et leurs descendants nous fournissent vraisemblablement le fond brachycéphale de la population limbourgeoise.

L'hypothèse qui les rapproche des Mongoloïdes s'appuie peut-être sur ce fait curieux de l'existence de plusieurs types sur lesquels on relève le teint jaunâtre, la physionomie orientale, les

---

(¹) Ubaghs, pp. 41-43 ; De Puydt, III, p. LXXII ; Stroobant, p. 20.

(²) De Puydt, II, p. LXXX.

pommettes saillantes et parfois les yeux bridés, qui les font ressembler aux Japonais.

M. Hervé signale le même type primitif et atavique parmi les populations des Cévennes, de l'Ardèche et de la Haute-Loire (1).

II. — *Les Celtes du Limbourg*

Le Limbourg a été habité par des populations celtiques. Considérons d'abord les invasions des Celtes, pour noter ensuite quelques traces de leur civilisation, rencontrées sur le territoire limbourgeois.

1. **Invasions celtiques** (2). — Essayons d'établir deux propositions concernant l'invasion des Celtes.

La patrie primitive des Celtes, d'où ils ont émigré vers les quatre coins de l'horizon, aux époques d'Hallstatt et de la Tène, se trouve sur les rives du Main.

Les Gaulois se sont établis en Belgique, vers l'an 700 avant l'ère chrétienne.

Voici comment on peut le prouver.

Ils ne peuvent être venus en Belgique beaucoup plus tard, parce qu'il résulte de plusieurs textes des premiers géographes grecs que, vers l'an 500 avant J.-C., les Gaulois étaient déjà parvenus au midi de la Gaule, d'où ils débordèrent en Espagne vers la même époque.

Ils ne peuvent avoir franchi le Rhin, pour envahir la Belgique, plus de 700 ans avant l'ère chrétienne, parce que cette invasion a été précédée des faits suivants, dont on peut approximativement fixer la date :

Vers l'an 900 avant J.-C., les Celtes avaient déjà envahi les Iles Britanniques ; vers cette époque, les Grecs se rendaient aux Iles Britanniques, pour y chercher l'étain nécessaire à la fabrication du bronze : l'étain leur était fourni par des peuplades celtiques, car ils donnaient à ce métal, le nom celtique de κασσιτερος. Ces peuplades celtiques n'ont pas connu la permutation du *q* indogermanique en *p* celtique : c'est une preuve que cette permutation ne s'était pas encore effectuée vers l'an 900 avant l'ère chrétienne. Elle a donc eu lieu plus tard ; toutefois elle s'est opérée avant l'invasion gauloise en Belgique, car les Celtes, qui se sont établis en Belgique, ont semé partout sur leurs pas les vestiges du changement du *q* indogermanique en *p* celtique (¹).

---

(1) L'ANTHROPOLOGIE, tome XVIII, 1907, p. 416. Paris 1907.

(2) d'Arbois de Jubainville, tome II, pp. 278 et suiv.

Comme ces phénomènes linguistiques, qui ont suivi l'invasion des Celtes dans les Iles Britanniques et précédé l'invasion des Celtes en Belgique, ne s'effectuent que lentement, nous plaçons vers l'an 700 avant l'ère chrétienne, l'invasion des Celtes, des premiers aryens blonds, qui ont amené l'usage plus généralisé des métaux et soumis les néolithiques de la Belgique à leur domination.

Il résulte du témoignage de César que la Belgique a connu une seconde invasion de Celtes, venus des pays rhénans. Les Belges ont expulsé les Gaulois, pour occuper définitivement la Belgique, sous le nom des peuples mentionnés par César.

Les Éburons occupaient le Limbourg et les Aduatiques y possédaient une forteresse.

Vers quelle époque les Belges ont-ils conquis la Belgique ?

M. d'Arbois de Jubainville assigne à cette conquête la date de l'an 300 av. J.-C., sans fournir aucun argument à l'appui de cette assertion.

2. **Réminiscences celtiques**. — L'archéologie et la toponymie nous révèlent quelques traces de l'occupation celtique.

La belle découverte d'Eygenbilsen démontre que le commerce des Étrusques s'étendait jusqu'aux populations celtiques du Limbourg (²).

Signalons la découverte du village celtique de Neerhaeren sur le territoire de la commune de Reckheim (³).

Les emplacements des habitations étaient marqués par de véritables pavements formés de pierres plates non taillées et de cailloux de diverses dimensions, choisis avec soin pour boucher les interstices.

(¹) Hirt, tome I, p. 168.

(²) Houzé, II, p. 115.

(³) De Puydt, I, p. CCLXXIII.

La poterie recueillie en abondance se compose de débris en pâte grossière.

Les demeures étaient en clayonnage, ce qui est prouvé par la présence de débris de terre brûlée, avec empreintes caractéristiques. On a découvert, aux environs, des restes d'urnes funéraires de formes variées et de dimensions peu communes.

Notre savant collègue, M. Dens, membre de la commission des fouilles de la Société d'archéologie de Bruxelles, a exploré plusieurs tombelles de la Campine limbourgeoise, dans lesquelles il a récolté une abondante moisson d'urnes funéraires de l'époque d'Hallstatt.

On a découvert des urnes funéraires de l'âge du fer à Beeringen, à Bocholt, à Genck, à Haelen, à Kessenich, à Lillo, à Lummen, à Overpelt, à Petit-Brogel, à Schuelen et à Zeelhem (1).

Nous rencontrons dans le répertoire onomastique du Limbourg quelques noms intéressants, qui nous fournissent des vestiges précieux de la présence des Celtes sur le territoire de cette province. En voici des exemples :

Brogel. Ce nom dérive, par le suffixe diminutif *lo*, du radical celtique *Brogi* qui signifie un canton, un champ, un bois dans un enclos *(umzäunter Bezirk)*. Comparez le vieux français *breuil*, le flamand *broel* et *bruiel* (2).

Cambe. On lit dans un document de 1166 : *Tria bonuaria terre apud Isern que cambe terra nuncupatur* (3). Ce mot *Cambe* se rattache à de nombreux noms de lieux, de même forme, cités par Holder (4), Cramer (5) et Förstemann (6) ; il dérive du thème celtique *cambo*, courbe, et indique l'aspect du terrain.

Le Démer. Le Démer s'appelait *Tamara* en 915 (7). Plusieurs rivières portent le même nom, ou un nom analogue, dans les régions celtiques. Taylor (8) affirme que *Tamara* signifie eau tranquille : il n'explique pas où il trouve l'adjectif *tam*, dont ni

---

(1) A. de Loë, pp. 25-28.

(2) Holder, I, p. 619.

(3) Piot, I, p. 112.

(4) Holder, I, p. 714.

(5) Cramer, I, p. 101.

(6) Förstemann, II, p. 350.

(7) Kurth, I, p. 458.

(8) Taylor, p. 144.

Holder, ni Whitley Stokes ne soupçonnent l'existence. Holder (¹) rapproche le nom du sanscrit *tămara*, qui signifie eau. Nous ne possédons pas encore du nom de cette rivière une explication satisfaisante, bien que nous puissions le reconnaître comme celtique.

Le Geer. Une ancienne forme du nom de cette rivière est *Jacara* (²) (805), mot que nous traduisons par eau saine, de *ara* eau et *jakkos* (³), sain, thème représenté en plusieurs langues celtiques. Après avoir trouvé cette étymologie, nous avons constaté que Holder (⁴) rapproche le nom de la rivière limbourgeoise du même radical celtique, et nous avons appris que cette rivière, là où elle n'est pas contaminée par les eaux industrielles, est, en effet, réputée pour la limpidité de ses eaux. Que signifie le mot *Ger*, dans *Gerbac* (927)? Provient-il de *Jacara*, par l'intermédiaire de la forme *Jaira* (1105) et la chute de la médiane *k*, ou bien est-ce un second nom, un nom germanique du cours d'eau, identique au *Gerbach* allemand, de *gero* (⁵), angle, ruisseau dont le cours présente de nombreuses sinuosités?

Halmael. M. Kurth (⁶) estime qu'il est difficile, sinon impossible, de déterminer le sens du suffixe onomastique *mael*. Nous proposons l'étymologie suivante : *mael* est un vocable qui doit son origine et sa signification au thème celtique *mailo* (⁷), d'où dérivent l'adjectif irlandais *mael*, l'adjectif breton *moel*, l'adjectif kymr. *mail*, chauve, et le substantif irlandais *maile*, calvitie. Le mot *mael* désignerait donc, par son origine celtique, un endroit aride et dénudé. *Hal* signifie sec (⁸). *Halmael* serait donc le lieu sec et aride, dénué de toute végétation. *Dormael* (Brabant) et *Hermalle* (Liége), *Harimala* (779) ont une origine et une signification identiques : *Har* (⁹) comme *dor* sont deux adjectifs qui

---

(¹) Holder, II, p. 1713.
(²) Kurth, I, p. 451.
(³) Whitley Stokes, p. 222.
(⁴) Holder, II, p. 4.
(⁵) Arnold, p. 115.
(⁶) Kurth, I, p. 337.
(⁷) Whitley Stokes, p. 204 ; Holder, II, p. 390.
(⁸) Jellinghaus, p. 40.
(⁹) Jellinghaus, p. 40.

signifient sec. Nous ne pouvons donc plus dire, avec MM. Kurth et Grandgagnage, que les recherches ne nous ont appris que ce que le nom de *Hermalle* ne peut pas être : son étymologie est devenue claire. La nature de la plaine de *Male*, située aux portes de Bruges, et qui a donné son nom au comte Louis de Male, justifie notre interprétation. *Emael, Heimala* (1) en 1131, constitue pour ainsi dire une tautologie : c'est la bruyère aride. *Wychmael, Wicmale* (2) (1107) est la bruyère habitée : *Wic* est le mot celtique et germanique *vikos*, *vicus*, lieu habité. *Vechmael*, *Vechtmaele* (3) (1237) est la bruyère que l'on rencontre à proximité du confluent de deux ruisseaux. On rattache le mot *Vecht* (4) au radical des mots *voegen*, *fügen*, et on remarque que le nom de *Vecht* est porté par plusieurs cours d'eau, qui résultent du confluent de rivières ou de ruisseaux.

HEUSDEN. C'est un nom de village assez répandu, qui apparaît parfois sous la forme *Husduna* (5), dans laquelle le nom germanique de la maison est associé au mot celtique *dûnon*, qui signifie bourg, forteresse. Le nom désigne peut-être les premières demeures féodales, établies sur une motte, au milieu d'une mare et défendues par une palissade.

MECHELEN. Ce nom apparut autrefois sous diverses formes, dont les plus importantes sont *Machlinium* et *Maghlinia*. On a proposé plusieurs étymologies de ce nom de lieu ; Förstemann estime qu'elles ne sont pas dignes d'être mentionnées. Nous ignorons si l'étymologie que nous allons donner a déjà été proposée ; aura-t-elle un meilleur sort que les autres ? Voici, à notre avis, le sens de *Machlinium* : ce nom désigne une grande mare, un grand étang. Nous y trouvons le thème celtique *magô* (6), j'augmente, irlandais *mogh*, grand, et le mot *linn* (7), étang, mare, marécage, qui se rencontre dans plusieurs langues celtiques. Qu'on se souvienne de la station palustre découverte à Malines et du *Neckerspoel* de cette même ville, et qu'on considère que tous les lieux qui portent le nom *Machlinium* sont situés sur les rives d'un cours d'eau où les prairies alluvionnaires qui bordent les rivières étaient autrefois des marécages. N'est-ce pas le même mot *linn* que l'on rencontre dans *Marlinne*, le nom d'un village que le peuple appelle *Quaedmechelen ?...*

---

(1) Kurth, I, p. 339.
(2) Kurth, I, p. 341.
(3) Kurth, I, p. 341.
(4) Jellinghaus, p. 154 ; Vercoullie, Franck, Kluge, *in verbis*.
(5) Förstemann, II, p. 820.
(6) Whitley Stokes, p. 197.
(7) Whitley Stokes, p. 248.

III. — *Les Belgo-Romains du Limbourg*

Sous la domination des maîtres du monde, ce sont les Tongres et les Toxandres (1), qui occupent le Limbourg, y habitent des villas, y possèdent des terres ou les cultivent comme colons, après leur service dans les légions romaines, mentionné dans nombre d'inscriptions (2).

Quels sont ces peuples ?

Certains auteurs les considèrent comme des Germains transplantés sur le territoire des Éburons, par les empereurs romains, mais nous préférons admettre avec des auteurs mieux avisés, que le nom collectif de Tongres (3) désigne les restes des Éburons et des Aduatiques, échappés à l'extermination de ces tribus et que les Toxandres sont issus du groupe oriental des Ménapiens.

Leurs cités faisaient partie de la Germanie inférieure.

Quand on découvre les traces de la civilisation romaine au Limbourg, ce sont les ANNALES des sociétés d'archéologie qui enregistrent les découvertes et c'est à ces corps scientifiques qu'est dévolue la tâche de scruter le sol, de multiplier les investigations, de rechercher les vestiges des temps belgo-romains. Que d'endroits sont encore à explorer et n'ont pas livré leurs secrets aux chercheurs ! Une province, qui offre, aux quatre coins, des souvenirs de l'époque romaine, comme Tongres (4), la seconde ville de la Germanie inférieure après Cologne, comme le Tessenderloo des

---

(1) **Bremer, p. 152.**

(2) **Vanderkindere, pp. 44 et suiv.**

(3) **Bremer, p. 5.**

(4) **Vanderkindere, p. 47.**

Texandres, comme Montenaeken et Kessenich, constitue un champ fécond pour les explorateurs et recèle dans son sein la promesse d'abondantes moissons, digne de stimuler le zèle d'un archéologue éclairé, qui travaille, non pour se former une collection, mais pour enrichir les Musées, accroître le patrimoine scientifique de la patrie belge et appuyer les recherches des historiens.

Montenaeken (1) est la villa de Montinius, devenue le noyau d'un centre d'habitation, et *Kessenich,* par le même suffixe celtique *acum*, est la propriété de Castinius et non de Cassinius, comme M. Kurth le présume (2) ; le faubourg de Bonn, qui porte le même nom, s'appelait autrefois *Kestenich* (3).

IV. — *Les Francs du Limbourg*

Les Francs ont occupé le Limbourg par infiltration, par une colonisation lente et continue.

Ils lui ont donné leur langue : que de Belges ignorent encore que l'une de nos langues nationales est la langue de ces Francs qui ont donné leur nom à la France et civilisé l'Occident !

Ils y ont imprimé à leurs villages un cachet nettement germanique, par le groupement des fermes, d'après le *Dorfsystem ;* leurs habitations rurales offrent les plus beaux spécimens de la ferme franque, par la disposition des bâtiments autour d'une cour carrée et fermée.

Les squelettes des Francs et leurs crânes, dolichocéphales en majorité, reposent avec la francisca, le glaive, la lance, le bouclier, les fibules émaillées et la poterie franque, dans les cimetières francs qu'on a découverts dans le Limbourg et notamment aux environs de Tongres et à Neerhaeren (4). Si l'on n'a pas découvert plus de tombes franques, ce n'est point qu'elles n'existent pas, comme l'affirme M. Stroobant (¹), mais c'est que le zèle des explorateurs laisse à désirer dans ces régions...

---

(1) Kurth, I, p. 508.

(2) Kurth, II, p. 485.

(3) Cramer, p. 46. — On peut apprécier chaque année les résultats des fouilles en consultant le BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE ET LITTÉRAIRE DU LIMBOURG.

(4) Houzé, I, p. 3.

Les Francs ont pris possession, pas à pas, du territoire de la province : le fait est attesté par le témoignage de l'histoire ; les empereurs Constance et Julien combattent les Saliens dans la Toxandrie, où ils se sont répandus.

Le fait de cette pénétration se dégage en outre du mélange des Ripuaires avec les Saliens, prouvé par la diffusion du *ch* haut-franc, qui remplace le *k* bas-franc des autres régions flamandes.

Nous croyons que cette lente expansion peut se démontrer en outre par l'étude de la toponymie. Les Francs se sont établis en Flandre par la conquête ; les noms des villages nous y transmettent comme des documents précieux les noms des lignages francs, qui se sont partagé le territoire conquis.

Il y a beaucoup plus de noms patronymiques en Flandre que dans le Limbourg. L'onomastique limbourgeoise ressemble à celle des contrées allemandes, dans lesquelles les Germains ont lentement succédé aux Celtes ; elle nous dépeint la nature du territoire, l'aspect du sol, plus qu'elle ne nous présente les noms des lignages à qui les marches sont tombées en partage.

Jetons un rapide coup d'œil sur cette toponymie pour en discerner quelques éléments, interpréter quelques noms et recueillir quelques souvenirs de nos glorieux ancêtres : ils ont souvent la valeur d'un document historique et d'un témoignage ethnologique.

Bur. Ce mot signifie (²) demeure, habitation, de la racine *bheu* (³), bâtir.

En 1139, le village de *Borloo* (⁴) porte le nom de *Burloo :* c'est le *loo,* caractérisé par un groupement d'habitations.

Dans le même document, le village de *Zepperen* (⁵) s'appelle *Septemburiæ.* Zepperen et Zevenkote, dans la Flandre Occidentale, sont par conséquent deux noms identiques.

Glind. Ce mot désigne la séparation formée de lattes, entre

(¹) Stroobant, p. 35.
(²) Förstemann, II, p. 334.
(³) Vercoullie, in v° *boer.*
(⁴) Piot, I, p. 50.
(⁵) Piot, I, p. 50.

deux champs (1). Il nous donne la signification du nom de *Gelinden,* appelé *Glynden* (2) en 1305, qu'on rencontre aussi en Westphalie.

HAAR. Ce vocable désigne (3) une légère éminence aride. Il apparaît dans le nom du lieu qui s'appelait *Haire*, vers 964 (4). M. Piot croit que c'est le nom primitif de la commune de *Heers ;* nous croyons plutôt qu'il s'agit de *Haren,* nom d'une commune du Limbourg, que les Germains connaissent aussi en Westphalie.

HAL. Hal (5) signifie sec, aride. Plusieurs lieux portent le nom de *Halen* (6) en Westphalie ; *Haelen* s'écrit *Halen* en 741 (7) : c'est la bruyère aride.

HEIM. Le *heim* franc si connu s'associe rarement au Limbourg avec le nom d'un lignage. Il sert parfois de suffixe à un nom propre : c'est le chef de famille, le père qui représente les enfants et le maître qui représente les serviteurs et les ouvriers de la communauté.

Brusthem est l'habitation près du sol crevassé (8).

Gingelom s'appelle *Gingelehem* (9) en 1139 : c'est l'habitation de *Gingilo*, *Gangilo,* nom d'homme, le diminutif de *Gango* (10).

Kerkom se lit *Kirchheim* dans le même document de 1139.

Sussen, *Susheym* (11) en 1264, est comme le *Susenheim* de Förstemann, la demeure du Franc Suso. Ce nom est à ajouter à la liste des noms en *heim* (12) de M. Kurth.

HOR. Le vocable *hor* (13), signifie marais. *Horebeke* est le ruisseau, qui traverse une région marécageuse.

Horpmael s'appelle toujours *Horpala* (14) dans les anciens documents. Le vocable doit-il son origine à des pieux fixés dans un marais et nous rappelle-t-il le souvenir d'une station palustre? C'est à l'archéologie qu'est dévolue la tâche de justifier notre interprétation.

---

(1) Jellinghaus, p. 36,

(2) Piot, I, 422.

(3) Jellinghaus, p. 40.

(4) Piot, I, p. 6.

(5) Jellinghaus, p. 40.

(6) Jellinghaus, p. 40.

(7) Piot, I, p. 2.

(8) Förstemann, II, p. 308.

(9) Piot, I, p. 49.

(10) Förstemann, II, p. 551.

(11) Piot, I, p. 308 ; Förstemann, II, p. 1338.

(12) Kurth, I, p. 259.

(13) Förstemann, I, p. 761.

(14) Kurth, I, p. 340.

Ing. Le pluriel de la désinence *ing* est *ingen*. En toponymie, il désigne le village où habitent les descendants de l'homme, qui est nommé dans le déterminatif du vocable (¹).

Bassenge est la forme romane de *Bitsingen ;* c'est l'équivalent de *Bitziberg*, appelé autrefois *Puzzinberg* que Förstemann rapproche de *Buzingen,* par l'umlaut de *u* en *i*. Les *Buzingen* sont les descendants de Bozo (²)..

Beeringen est l'habitation des descendants de Bero.

Beringen s'appelle *Berinchgie* en 1208 (³). C'est une forme corrompue. Elle dérive du nom propre Bibo (⁴).

Roclenge est la forme romane de *Rokkelingen :* c'est le nom des descendants de Rokkilo, diminutif de Roko (⁵).

Sarchinium est le nom primitif de Saint-Trond, auquel M. Kurth attribue à tort une physionomie celtique (⁶). C'est la forme latinisée de *Serkingen, Sarkingen*. *Sarkingen* ne peut dériver de *Sarchinium,* comme M. Kurth le suppose, puisque ce nom s'explique de la manière la plus claire dans l'onomastique germanique. Förstemann cite le nom franc de *Saro* et note les deux diminutifs *Saracho* (⁷), forme de *Sarko* et *Sarchilo, Sarhilo, Sarilo.* Les *Sarkingen* sont les descendants de *Sarko ;* un lignage de Sarkingen habitait aussi le village westflamand de Zerkeghem, *Sarkingenheim.*

Link. Le mot *link* (⁸) désigne une bande de terrain : il apparaît dans *Linckhout*, comme bande de terrain boisée.

Loo. Le mot *loo* (⁹) si souvent usité dans la plus ancienne topo-

---

(¹) Jellinghaus, p. 79.
(²) Förstemann, I, p. 278.
(³) Piot, I, p. 161.
(⁴) Förstemann, II, p. 213.
(⁵) Jellinghaus, p. IV.
(⁶) Kurth, I, pp. 302, 468, 562.
(⁷) Förstemann, I, p. 1074.
(⁸) Jellinghaus, p. 94.
(⁹) Jellinghaus, p. 95.

nymie germanique, désigne une éminence boisée, au milieu de bas-fonds. *Kilianus* (¹) l'appelle : *locus altus, adjacens stagnis, torrentibus aut paludibus.*

Looz est la forme romane de *Loon* qui est le datif pluriel de *Loo* (²).

Beverloo est le *loo* des castors.

Exel s'appelle *Escele* (³) en 1161 : *loo* apparaît souvent sous la forme de *le*, dans les désinences des noms de lieux. M. Jellinghaus cite de nombreux exemples. *Exel* est le *loo*, planté de frênes.

Schuelen s'appelle *Sconelo* (⁴) en 1107. C'est comme les *loo* du même nom de Drenthe et de Westphalie, le beau *loo* (⁵).

Spalbeek. *Spal* entre peut-être dans la composition de ce vocable, avec la signification qu'Arnold lui assigne, comme contraction de *Spanelo* (⁶), le *loo* du bois de charpente.

MAR. Le mot *mar* (⁷), *mer* désigne une eau stagnante, une mare que l'on peut considérer comme un étang et qui donne facilement naissance à un marais.

Melveren s'appelle *Merweles*, dans un document de 1107 (⁸). Nous découvrons dans la seconde partie de ce vocable, le mot *welle* (⁹), qui désigne une source à laquelle on vient puiser de l'eau, une source servant de *wadriscapum*, *waterschep*. *Merwele* ou *Marwelle* est donc le *waterschep* qui a la forme d'une mare, d'un étang. *Merwelle, Merwele, Mervele* est devenu *Melveren*, par la transposition des lettres *l* et *r*. Le nom de Melveren serait irréductible, si l'on ne possédait pas l'ancienne forme.

MENA. *Mena* (¹⁰) est un suffixe qui entre dans la composition des noms des cours d'eaux, avec la signification de conduite d'eau, *Leitung*.

(¹) Kilianus, *sub verbo*.
(²) Jellinghaus, p. 100.
(³) Piot, I, p. 103.
(⁴) Piot, I, p. 30.
(⁵) Jellinghaus, p. 100.
(⁶) Arnold, p. 120.
(⁷) Jellinghaus, p. 130.
(⁸) Piot, I, p. 31.
(⁹) Jellinghaus, p. 131.
(¹⁰) Jellinghaus, p. 148.

Lummen s'écrit *Lummene* (¹) dans un document de 1351. C'est comme *Lumbeke* (²), le ruisseau qui coule en murmurant bruyamment. Au cours du temps un *p* paragogique s'est joint à la première syllabe et a transformé le nom en *Lumpne,* forme qui se voit dans plusieurs documents, notamment en 1350 (³).

RODE. *Rode* est le *Neubruch in der Mark* (⁴), le sol défriché pour augmenter les champs du village franc.

Kinroy est le sol défriché du bois de sapin, de l'ancien haut-franc *kien*, *pinus* (⁵), et *Stockroy* (⁶) est le sol défriché de la futaie.

TERE, TRE, DERE, DOREN. Ce mot signifie arbre. *Helchteren* s'écrit *Haletra* (⁷) en 1107. Ce nom, assez répandu, apparaît en Westphalie sous la forme de *Halahtre* (⁸), qui signifie arbre sacré. Les Francs païens rendaient un culte aux arbres. Voici ce que Saint-Audoën rapporte des prédications de Saint-Éloi : « N'allumez point de lumières aux temples, aux pierres, aux sources, aux *arbres*... Ne cherchez pas de remèdes aux fontaines, aux *arbres sacrés*... (⁹) »

Meldert est connu comme *Meldere* en 1146 (¹⁰). Nous rapprochons ce nom de celui de *Melboum* (¹¹), cité par Förstemann. Le nom doit son origine au vieux haut-franc, *melboum*, mot qui désigne le *Mastixbaum*, un *lentiscus.*

VILARI. Le radical *vilari* (¹²), allem. *Weiler*, est emprunté aux langues romanes ; on le rencontre comme suffixe dans certains noms de lieux et il subsiste aussi comme nom de lieu par lui-même.

Wilderen, qui s'écrit *Wilre* (¹³) en 1065, est comme le *Wilre* (¹⁴).

(¹) Piot, I, p. 518.
(²) Jellinghaus, p. 143.
(³) Piot, I, p. 510.
(⁴) Jellinghaus, p. 112.
(⁵) Förstemann, II, p. 874.
(⁶) Jellinghaus, p. 125.
(⁷) Jellinghaus, p. 12.
(⁸) Jellinghaus, p. 12.
(⁹) Vanderkindere, p. 275.
(¹⁰) Piot, I, p. 71.
(¹¹) Förstemann, II, p. 1013.
(¹²) Förstemann, II, p. 1529.
(¹³) Piot, I, p. 22.
(¹⁴) Förstemann, II, p. 1533.

cité par Förstemann, le vocable *vilari*, *Weiler*, avec la signification de hameau.

Voorde. *Voorde* (¹), en allem. *Furt*, est le passage sur l'eau. *Stevoort* s'appelle *Stainford* (²) en 1155 : c'est le gué pavé (³) qui résiste au courant de l'eau.

BIBLIOGRAPHIE

Wilhelm Arnold. *Ansiedelungen und Wanderungen deutscher Stämme*. Zweite Ausgabe. Marburg, 1881.

Otto Bremer. *Ethnographie der Germanischen Stämme*. Zweiter Abdruck. Sonderabdruck aus der zweiten Auflage von Pauls Grundriss der Germanischen Philologie. Strassburg, 1904.

Franz Cramer. *Rheinische Ortsnamen aus vorrömisscher und römischer Zeit*. Düsseldorf, 1901.

H. d'Arbois de Jubainville. *Les premiers habitants de l'Europe*. Seconde édition, deux tomes. Paris, 1894.

A. de Loë. *Quelles sont les découvertes relatives à l'âge de bronze et au premier âge du fer, qui ont été faites jusqu'ici en Belgique et quelles sont les conséquences à en tirer ?* Rapport présenté à la première section du Congrès de Bruxelles de 1891. Bruxelles, 1891.

M. De Puydt. *Les emplacements d'habitations protohistoriques de la bruyère de Neerhaeren, commune de Reckheim*, dans Bulletin de la Société d'Anthropologie de Bruxelles, tome XXVII, 1908. Bruxelles, 1908, I.

M. De Puydt. *Fonds de cabanes néolithiques de la Hesbaye. Agglomération de l'Épinette, Ibid.*, tome XXV, année 1906. Bruxelles, 1907, II.

M. De Puydt. *Hache-marteau de Genck, Ibid.*, tome XXVI, année 1907. Bruxelles, 1908, III.

E. Förstemann. *Altdeutsches Namenbuch*. Erster Band. *Personennamen*. Nordhausen, 1856, I.

E. Förstemann. *Altdeutsches Namenbuch*. Zweiter Band. *Ortsnamen*. Nordhausen, 1859, II.

J. Franck. *Etymologisch Woordenboek der nederlandsche Taal*. 's Gravenhage, 1892.

H. Hirt. *Die Indogermanen*. Erster Band. Strassburg, 1905.

Alfred Holder. *Altceltischer Sprachschatz*. Erster Band, A.-H. Leipzig, 1896. — Zweiter Band, I-T. Leipzig, 1904.

(¹) Jellinghaus, p. 34.
(²) Piot, I, p. 75.
(³) Kurth, I, p. 359.

E. Houzé. *Les Francs des cimetières de Belgique*, dans Bulletin de la Société d'Anthropologie de Bruxelles, tome XVI, 1897-98. Bruxelles, 1897, I.

E. Houzé. *Les indices céphaliques des Flamands et des Wallons.* Bruxelles, 1882, II.

E. Houzé. *Les types ethniques de la Belgique*, dans Bulletin de la Société d'Anthropologie de Bruxelles, tome XVI, 1897-1898. Bruxelles 1897, III.

H. Jellinghaus. *Die Westfälischen Ortsnamen, nach ihren Grundwörtern.* Kiel und Leipzig, 1896.

Kiliani. *Etymologicum teutonicæ linguæ.* Utrecht, 1632.

Fr. Kluge. *Etymologisches Wörterbuch der Deutschen Sprache.* 4^{e} Auflage. Strassburg, 1889.

G. Kurth. *La frontière linguistique en Belgique et dans le nord de la France*, tome I. Bruxelles, 1896 ; tome II. Bruxelles, 1898.

Ch. Piot. *Cartulaire de l'Abbaye de St-Trond*, deux tomes. Bruxelles, 1870.

W.-Z. Ripley. *The races of Europe.* London, 1900.

L. Stroobant. *Quel est l'âge des tombelles de la Campine ?* Turnhaut, 1907.

Isaac Taylor. *Words and Places.* London, 1902.

Casimir Ubaghs. *Les ateliers ou stations dits préhistoriques de Sainte-Gertrude et Ryckholt.* Liége 1887.

L. Vanderkindere. *Introduction à l'histoire des institutions de la Belgique au moyen âge.* Bruxelles, 1890.

J. Vercoullie. *Beknopt etymologisch woordenboek der Nederlandsche taal.* Tweede uitgaaf. Gent, 1898.

D^{r} L. Vervaeck. *La taille en Belgique,* dans Mémoires de la Société d'Anthropologie de Bruxelles, tome XXVIII, 1909. Bruxelles, 1909.

Whitley Stokes. *Urkeltischer Sprachschatz.* Göttingen, 1894.

SUR
QUELQUES SYSTÈMES DE QUADRIQUES RÉGLÉES

PAR

J. NEUBERG

Un *système* de surfaces algébriques dont chacune est déterminée par la valeur d'un même paramètre variable, admet trois *caractéristiques* μ, ν, ρ qui sont respectivement le nombre des surfaces passant par un point *quelconque* P, ou tangentes à un plan *quelconque* π ou touchant une droite *quelconque* p.

La présente Note a pour objet des quadriques engendrées par une droite g qui se meut en s'appuyant sur trois droites *(directrices)* a, b, c dont l'une au moins est variable. Nous en rechercherons les caractéristiques, les *points singuliers*, les *plans singuliers* et les quadriques dégénérées.

Les droites g forment une *congruence ;* mais nous ne rattacherons pas notre étude à la *géométrie réglée.*

En appliquant le principe de dualité, on voit immédiatement que $\nu = \mu$. Remarquons également que $\rho = 2\mu$; car si une quadrique du système rencontre une droite p aux points L et L$'$, le point L ou L$'$ appartient à μ surfaces du système, de sorte que ces points sont liés par une correspondance (μ, μ) dont les 2μ coïncidences sont des points de contact de p avec des surfaces du système.

Pour abréger, nous désignerons par la lettre Σ chacun des systèmes que nous allons examiner. Nous rappelons aussi que la quadrique déterminée par trois directrices a, b, c dont les deux premières se coupent en un point D et dont la troisième rencontre le plan ab en E, se compose des plans Dc et ab, car les positions de g appartiennent à deux faisceaux situés dans ces plans et ayant pour centres respectivement D et E.

1. a *et* b *sont fixes*, c *est un rayon variable d'un faisceau.*

Soient C le centre et γ le plan du faisceau, A et B les points de rencontre de a et b avec γ.

Par un point *quelconque* P il passe une seule quadrique de Σ ; elle a pour directrices a, b et la droite joignant C au point d'intersection des trois plans Pa, Pb et γ. Par conséquent $\mu = \nu = 1$, $\rho = 2$.

Toutes les surfaces de Σ ont en commun les droites a, b, AB et l'intersection des plans Ca, Cb, de sorte que les points de ces droites sont des *points singuliers* de Σ et qu'un plan quelconque mené par l'une de ces droites est un plan *singulier*.

Les quadriques (a, b, CA) (1), (a, b, CB) se composent chacune de deux plans.

2. a *et* b *sont fixes*, c *est un rayon variable d'un système réglé donné* V.

La ligne d'intersection des plans Pa, Pb rencontre deux rayons c_1, c_2 du système (c) ; le point P appartient donc aux deux quadriques (a, b, c_1), (a, b, c_2) de Σ. Il en résulte : $\mu = \nu = 2$, $\rho = 4$.

Les quadriques (a, b, c_1), (a, b, c_2) coïncident lorsque P est situé sur une droite h qui s'appuie sur a et b et touche la quadrique V. Par un point quelconque A de a il passe deux droites h ; ce sont les tangentes menées de A à la conique suivant laquelle le plan Ab coupe V. Comme il passe également deux droites h par un point quelconque de b, la surface (h) est du quatrième ordre (2).

Il peut aussi arriver que les droites a, b, c_1, c_2 forment un quadruple hyperboloïdique. Dans ce cas, si A_1, A_2, B_1, B_2 sont les points de rencontre de a et b avec V, il passe par A_1 une droite l_1

---

(1) La notation (a, b, c) représente l'ensemble des droites s'appuyant à la fois sur les droites a, b, c.

(2) En général, *la droite qui joint deux éléments homologues de deux ponctuelles liées par une correspondance* (m, n) *engendre une surface d'ordre* m + n. De même, *l'intersection de deux éléments homologues de deux faisceaux de plans entre lesquels il existe une correspondance* (m, n), *engendre une surface d'ordre* m + n.

s'appuyant sur b, c_1 et c_2 ; l_1 est nécessairement une *directrice* du système (c) et passe, par exemple, par B_1. Semblablement, la droite $A_2B_2 \equiv l_2$ est une telle directrice. Supposons donc que a et b s'appuient sur deux directrices l_1, l_2, du système (c) sans être des rayons de ce système. Alors, toute droite g qui s'appuie sur a et b, rencontre V en deux points tels que les rayons c_1, c_2 du système (c) menés par ses points forment un quadruple hyperboloïdique avec a et b ; car nous avons déjà trois droites l_1, l_2, g qui rencontrent les droites a, b, c_1, c_2. On a maintenant $\mu = \nu = 1$, $\rho = 2$.

Revenons au cas général. Soient c_a, c'_a, c_b, c'_b les rayons du système (c) qui passent par A_1, A_2, B_1, B_2. Le système Σ comprend les quadriques dégénérées (a, b, c_a), (a, b, c'_a), (a, b, c_b), (a, b, c'_b).

Si V est un hyperboloïde, le système Σ comprend en général deux paraboloïdes. En effet, le plan mené par le centre de V parallèlement aux deux droites a et b coupe le cône asymptote suivant deux droites parallèles à deux rayons c_i, c'_i du système (c) ; les quadriques (a, b, c_i), (a, b, c'_i) sont des paraboloïdes.

Si V est un paraboloïde, un plan parallèle à la fois à a et b coupe le plan directeur du système (c) suivant une droite ; soit c_i le rayon de système (c) parallèle à cette droite. La quadrique (a, b, c_i) est le seul paraboloïde de Σ ; toutefois, si c_i était parallèle à a ou à b, la quadrique (a, b, c_i) se composerait de deux plans.

Si les deux droites a et b sont parallèles au plan directeur du paraboloïde V, il existe un rayon c_a du système (c) parallèle à a, et un rayon c_b parallèle à b. Toutes les surfaces du système Σ sont alors des paraboloïdes, à l'exception des quadriques dégénérées (a, b, c_a), (a, b, c_b).

3. a *est fixe,* b *et* c *sont des rayons homologues de deux faisceaux projectifs.*

Appelons B, C les centres et β, γ les plans de ces faisceaux. Les plans Pb, Pc se correspondent dans deux faisceaux projectifs ayant pour axes les droites PB, PC ; leur intersection engendre un cône quadratique. Le plan Pa coupe ce cône suivant deux droites qui s'appuient sur a et sur deux rayons homologues des faisceaux (b) et (c). Donc $\mu = \nu = 2$, $\rho = 4$.

Les droites g qui passent par un même point A de a, forment un cône quadratique ; tout plan mené par a contient donc deux droites g issues de A, à l'exception des deux plans tangents au cône menés par a ; chacun de ces derniers plans contient deux droites g confondues.

Les droites g qui sont situées dans un même plan δ passant par a, enveloppent une conique Δ ; car elles joignent les points homologues des deux ponctuelles projectives suivant lesquelles δ coupe les faisceaux (b) et (c). Cette conique fait partie du lieu d'un point P_1 tel que les deux droites g qui y passent coïncident ; tout plan mené par δ contient une telle conique, et tout point de a se trouve sur deux de ces courbes, d'après ce qu'on a vu ci-dessus. Il résulte de là que le lieu du point P_1 est une surface du quatrième ordre dont a est une ligne double.

L'enveloppe des droites g situées dans le plan aB se compose de deux points. En effet, si ce plan coupe β suivant le rayon b' et rencontre en C′ l'homologue c' de b', les droites menées par B ou par C′ dans le plan aB sont des droites g. Le plan aC jouit d'une propriété analogue.

Les plans qui projettent les faisceaux (b) et (c) à partir de la droite BC forment deux faisceaux projectifs, dont les plans doubles renferment des couples b_1c_1, b_2c_2 de rayons homologues de (b) et (c). Les quadriques (a, b_1, c_1), (a, b_2, c_2) sont constituées chacune par deux faisceaux de rayons. Le système Σ comprend encore deux autres quadriques dégénérées (a, b', c'), (a, b'', c'') ; b' et c' ont la signification déjà indiquée, et b'', c'' une signification analogue par rapport au plan aC.

Toutes les surfaces de Σ passent par B ; les plans tangents en ce point enveloppent un cône quadratique. En effet, le plan aB coupe le faisceau (c) suivant une ponctuelle qui est projetée à partir de B par un faisceau homographique avec le faisceau (b), et tout plan qui passe par deux rayons homologues de ces derniers faisceaux touche en B l'une des quadriques de Σ.

Toutes les surfaces de Σ touchent le plan β ; le lieu des points de contact est une conique. Car, si le plan β coupe le faisceau (c) suivant la ponctuelle u_c et la droite a en B_1, le faisceau qui projette u_c à partir de B_1 est homographique avec le faisceau (b), et les rayons homologues des deux derniers faisceaux se coupent sur une conique dont les points sont les points de contact de β avec les différentes quadriques de Σ.

4. a *est fixe,* b *et* c *sont des éléments homologues quelconques d'un faisceau de rayons et d'un système réglé qui sont projectifs.*

Les plans Pb, Pc sont des éléments correspondants d'un faisceau du premier ordre et d'un faisceau du second ordre qui sont projectifs ; leur intersection engendre un cône du troisième ordre, qui est coupé par le plan Pa suivant trois droites g. On en conclût que $\mu = \nu = 3$, $\rho = 6$.

On voit immédiatement que les droites g qui passent par un même point A de a, appartiennent à un cône du troisième ordre.

Les droites g situées dans un plan δ passant par a enveloppent une courbe ϵ de la troisième classe ; car elles joignent les éléments homologues de la ponctuelle du premier ordre et de celle du second ordre marquées sur δ par le faisceau (b) et par le système réglé (c).

Soient B le centre et β le plan du faisceau (b). Le plan aB coupe β suivant un rayon b' et rencontre le rayon homologue c' du système réglé (c) en un point C′. Toutes les droites menées par B ou C′ dans le plan aB sont des droites g ; elles ont pour enveloppe les deux points B, C′ ; mais B est à compter deux fois, parce qu'une droite menée par B rencontre en deux points le système réglé (c) et, par suite, correspond à deux rayons de (b).

Toutes les quadriques du système passent par B ; les plans tangents en ce point enveloppent un cône de la troisième classe. En effet, une droite quelconque menée par B dans le plan Ba rencontre en C_1, C_2 deux rayons c_1, c_2 du système (c) ; soient b_1, b_2 les rayons homologues du faisceau (b). Les plans C_1Bb_1, C_2Bb_2 touchent en B les quadriques (a, b_1, c_1), (a, b_2, c_2) ; comme ils joignent des éléments homologues de deux faisceaux de rayons liés par une correspondance (2, 1), ils enveloppent un cône de la troisième classe.

En appliquant le principe de dualité, on voit que le plan β touche toutes les quadriques du système Σ et que le lieu des points de contact est une cubique.

Trois quadriques dégénérées correspondent aux points de rencontre de a avec le plan β et avec le système réglé (c). Trois autres correspondent à des rayons du faisceau (b) qui rencontrent leurs homologues du système (c) ; car entre le faisceau (b) et celui qui projette à partir de B la ponctuelle du second ordre marquée par le système (c) sur le plan β, il existe une correspondance (2, 1) qui présente trois coïncidences.

5. a *est fixe,* b *et* c *sont des rayons homologues de deux systèmes réglés projectifs.*

Les plans Pb, Pc se correspondent dans deux faisceaux projectifs du second ordre ; leur intersection engendre un cône du quatrième ordre, qui est coupé par le plan Pa suivant quatre droites g. Donc $\mu = \nu = 4$, $\rho = 8$.

Les droites g qui passent par un même point de a appartiennent à un cône du quatrième ordre. Celles qui sont situées dans un même plan passant par a, enveloppent une courbe de la quatrième classe.

Le système Σ comprend huit quadriques dégénérées, qui correspondent aux quatre points de rencontre de a avec les systèmes réglés (b) et (c), et aux quatre points où concourent deux rayons homologues de ces systèmes réglés (1).

6. a, b, c *sont des rayons homologues de trois faisceaux de rayons projectifs* (2).

Appelons A, B, C les centres et α, β, γ les plans de ces faisceaux, entre lesquels nous ne supposons aucune relation particulière.

Les plans Pa, Pb, Pc se correspondent dans trois faisceaux projectifs qui ont pour axes les droites PA, PB, PC. L'intersection des plans Pa, Pb engendre un cône quadratique, et celle des plans Pa, Pc un second cône quadratique. Les trois génératrices communes à ces deux cônes, autres que la droite PA, s'appuient chacune sur trois rayons homologues des faisceaux (a), (b), (c). Par suite $\mu = \nu = 3$, $\rho = 6$.

Toutes les surfaces de Σ ont en commun les points A, B, C. Les

---

(1) Si l'on pose $P_r = A_r x + B_r y + C_r z + D_r t$, les droites b et c ont des équations de la forme

$$\begin{cases} P_1 + \lambda P_2 = 0, \\ P_3 + \lambda P_4 = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} P_5 + \lambda P_6 = 0, \\ P_7 + \lambda P_8 = 0. \end{cases}$$

En exprimant que les plans représentés par ces quatre équations ont un point commun, on obtient une équation du quatrième degré en λ.

(2) Nous avions déjà étudié ce cas dans les Wiskundige Opgaven, deel V, probl. II (1891) ; M. Kluyver y a traité le même problème par une autre méthode.

droites g passant par A appartiennent au cône quadratique W qui est engendré par l'intersection des plans Ab, Ac. Les plans tangents en A passent par un rayon du faisceau (a) et par la génératrice correspondante du cône W ; on en conclut qu'ils enveloppent un cône de la troisième classe.

Toutes les surfaces de Σ touchent les plans α, β, γ. Les droites g situées dans le plan α joignent les éléments homologues des deux ponctuelles projectives suivant lesquelles le plan α coupe les faisceaux (b), (c) ; donc elles enveloppent une conique η. Un rayon de (a) et la tangente correspondante de η se coupent sur une cubique, qui est le lieu des points de contact du plan α avec les quadriques de α.

La conique η est un lieu de points tels que deux des droites g qui passent en un tel point coïncident ; la troisième droite g s'appuie sur le rayon de (a) mené à ce point et sur les rayons homologues des faisceaux (b) et (c). Chacun des plans α, β, γ contient une conique jouissant de cette propriété. Les faisceaux de plans qui projettent (a) et (b) à partir de la droite AB sont homographiques. Un plan double de ces faisceaux contient deux rayons correspondants a', b' des faisceaux (a) et (b). Soit c' le rayon homologue de (c). La quadrique (a', b', c') se compose de deux plans. On voit facilement que le système Σ comprend, en général, six quadriques dégénérées.

7. a, b, c *sont des rayons homologues de deux faisceaux et d'un système réglé qui sont projectifs.*

Nous nous appuyons sur le lemme suivant :

Soient δ, δ', δ'' *trois plans variables qui passent par un même point P et dont les positions simultanées correspondent à une même valeur d'un paramètre* λ. *S'il passe par un même point Q* m *plans* δ, m' *plans* δ', m'' *plans* δ'' (¹), *il existe* m + m' + m'' *droites PU appartenant à trois positions simultanées de ces plans.*

En effet, les équations de ces plans sont de la forme

$$\alpha(x - x_1) + \beta(y - y_1) + \gamma(z - z_1) = 0,$$
$$\alpha'(x - x_1) + \beta'(y - y_1) + \gamma'(z - z_1) = 0,$$
$$\alpha''(x - x_1) + \beta''(y - y_1) + \gamma''(z - z_1) = 0,$$

(¹) En d'autres termes, les plans δ, δ', δ'' enveloppent trois cônes dont les classes sont respectivement m, m', m''.

où α, β, γ sont des fonctions de degré m de λ ; α', β', γ' des fonctions de degré m' ; α'', β'', γ'' des fonctions de degré m''. La condition que ces plans se coupent suivant une même droite, est :

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix} = 0 ;$$

elle est de degré $m + m' + m''$ en λ.

Nous avons déjà appliqué ce lemme pour $m = m' = m'' = 1$ dans le problème (6) et pour $m = 0$ dans les problèmes (3), (4) et (5).

Dans le cas actuel, les plans Pa, Pb, Pc correspondent à une même valeur d'un paramètre λ qui entre au premier degré dans les équations des plans Pa, Pb et au second degré dans celle du plan Pc qui enveloppe un cône quadratique. On en conclut que $\mu = \nu = 4$, $\rho = 8$.

Toutes les surfaces de Σ passent par les centres A, B des faisceaux (a), (b). Les droites g qui passent par A engendrent un cône du troisième ordre, et les plans tangents en A enveloppent un cône de la quatrième classe.

Toutes les surfaces de Σ touchent les plans α, β des faisceaux (a), (b). Les droites g du plan α joignent les éléments homologues des ponctuelles projectives du premier et du second ordre suivant lesquelles le plan α coupe le faisceau (b) et le système réglé (c) ; donc elles enveloppent une courbe de la troisième classe. Un point M de cette courbe jouit de la propriété que deux des quatre droites g qui y passent coïncident ; une troisième est encore située dans le plan α, et la quatrième s'appuie sur les rayons de (b) et (c) qui sont les homologues du rayon AM de (a).

Le lieu des points de contact du plan α est une courbe du quatrième ordre.

On a déjà vu que deux faisceaux projectifs de rayons (a), (b) contiennent deux couples de rayons homologues qui se coupent ; chacun de ces couples combiné avec le rayon homologue de (c) donne une quadrique dégénérée de Σ.

Le système (c) est coupé par le plan α suivant une ponctuelle du second ordre ; le faisceau qui projette cette ponctuelle à partir de A et le faisceau (*a*) sont liés par une correspondance (1, 2), dont les trois coïncidences sont des points où se rencontrent deux éléments homologues de (*a*) et (*c*). De là, trois nouvelles quadriques dégénérées de Σ. Trois autres s'obtiennent en combinant (*b*) et (*c*).

8. a, b, c *sont des éléments homologues d'un faisceau de rayons et de deux systèmes réglés projectifs.*

Les plans P*a*, P*b*, P*c*, qui se correspondent dans des faisceaux de plans des ordres 1, 2, 2, se coupent cinq fois suivant une même droite. Donc les caractéristiques de Σ sont maintenant 5, 5, 10.

Toutes les surfaces de Σ passent par le centre A du faisceau (*a*) et en touchent le plan α. Les droites *g* qui passent par A engendrent un cône du quatrième ordre ; les plans tangents en A enveloppent un cône de la cinquième classe. Les droites *g* situées dans le plan α enveloppent une courbe de la quatrième classe, car elles joignent les éléments homologues des ponctuelles du second ordre suivant lesquelles le plan α coupe les systèmes réglés (*b*) et (*c*) ; tout point de cette courbe jouit de la propriété que deux des cinq droites *g* qui y passent se confondent. Le lieu des points de contact de α avec les quadriques de Σ est une courbe du cinquième ordre.

Le plan de (*a*) contient trois points où se coupent des rayons éléments de (*a*) et (*b*), et trois autres où se coupent des rayons homologues de (*a*) et (*c*). On déduit de là six quadriques dégénérées de Σ.

Les systèmes (*b*), (*c*) ont quatre couples de rayons homologues qui se coupent ; ces couples correspondent également à des quadriques dégénérées de Σ.

9. a, b, c *sont des éléments homologues de trois systèmes réglés projectifs.*

Comme les plans P*a*, P*b*, P*c* enveloppent trois cônes de la seconde classe, les caractéristiques du système Σ sont 6, 6, 12.

Les droites *g* qui passent par un point du système (*a*) appartiennent à un cône du quatrième ordre. Celles qui sont situées dans un plan tangent à ce système enveloppent une courbe de la quatrième classe.

Le système Σ comprend douze quadriques dégénérées, qui correspondent aux points où deux rayons homologues de deux des systèmes réglés (*a*), (*b*), (*c*) se coupent.

Ces développements présentent quelques lacunes, que nous espérons combler en étudiant les congruences formées par les droites *g*.

TABLE DES MATIÈRES

PREMIÈRE PARTIE

DOCUMENTS ET COMPTES RENDUS

PAGES
Statuts 5
Règlement arrêté par le Conseil pour l'encouragement des recherches scientifiques 9
Lettres de S. S. Léon XIII au Président et aux membres de la Société scientifique de Bruxelles 11
Lettre de S. É. le Card. R. Merry del Val, secrétaire d'État de S. S. le Pape Pie X au Président de la Société scientifique de Bruxelles en réponse à l'adresse au Saint-Père 15
Listes des membres de la Société scientifique de Bruxelles (année 1910) 17
  Liste des membres fondateurs 17
  — des membres honoraires 18
  — générale . . , ... 20
  — géographique 46
  — des membres décédés 53
  — des membres inscrits dans les sections 54
  Membres du Conseil (1908-1909) 61
  — — (1909-1910) 62
  Bureaux des sections (1909-1910) 63
Sessions de 1909-1910 65
  Session du 28 octobre 1909, à Louvain. 65
    Séances des sections : Première section 65
      Seconde section 106
      Troisième section : séances extraordinaires du 24 juin et du 27 octobre 1909 136
      séance du 28 oct. 1909 . 137

PAGES
Quatrième section 146
Cinquième section 148
Sixième section 148
Assemblée générale 162
Conférence de M. J. J. Van Biervliet 162
Session du 27 janvier 1910, à Bruxelles 163
Séances des sections : Première section 163
Seconde section 182
Troisième section 187
Quatrième section 202
Cinquième section 221
Sixième section 221
Assemblée générale 226
Conférence de M. le V^te^ R. de Montessus de Ballore 226
Session des 5, 6 et 7 avril 1910, à Bruxelles 227
Séances des sections : Première section 227
Seconde section 233
Troisième section 248
Quatrième section 261
Cinquième section 293
Sixième section 293
Assemblée générale du 5 avril 1910 296
Rapport du Secrétaire général 296
Conférence du R. P. R. de Sinéty, S. J. 304
Assemblée générale du 6 avril 1910 304
Rapport sur la *Société bibliographique de Paris*, par M. le C^te^ Domet de Vorges 304
Conférence de M. le D^r^ D'halluin 307
Assemblée générale du 7 avril 1910 307
Rapport du Trésorier 307
Résultat des élections : Conseil général 308
Bureaux des sections 309
Questions de Concours 310
Conférence de M. l'Abbé Moreux 311
Liste des ouvrages offerts à la Société scientifique de Bruxelles du 1^er^ mai 1909 au 1^er^ mai 1910 312

COMMUNICATIONS DIVERSES

Sur la convergence des déterminants d'ordre infini, par M. le V^te^ R. d'Adhémar 65
Sur certaines notions fondamentales de mécanique, par M. E. Pasquier. 73
Un émule de Viète : Ludolphe van Ceulen, par le P. H. Bosmans, S. J. 81

PAGES

Sur la parabole de Kiepert, par M. J. Neuberg . . . 82

A propos de la navigation aérienne, par M. E. Pasquier . . . 88

Sur le point en ballon pendant la nuit ; détermination simultanée de la latitude et de la longitude par l'observation de deux hauteurs d'astres par M. le B^{on} G. de Béthune . . . 90

Méthode générale de détermination des racines des équations numériques, par M. le V^{te} R. de Montessus de Ballore . . . 94

De la quadruple pesée, par M. Éd. Goedseels . . . 103

Sur la légende de Galois, par M. P. Mansion . . . 104

A propos de l'atlas photographique du ciel, par M. Éd. Goedseels . . . 105

Sur le niveau à bulle de précision, par M. Éd. Goedseels . . . 105

Cas de foudroiement survenu à Koekelberg, par M. E. Vanderlinden . . . 106

Nouvelles remarques critiques au sujet de la théorie du timbre, par M. J. Delemer . . . 110

Recherches concernant l'action de l'effluve électrique sur la polymérisation des liquides par M. A. de Hemptinne . . . 111

Recherches sur les électrodes enveloppées, par M. le Chan. De Muynck 111

Une forme d'éclair remarquable, par le P. Schaffers, S. J. . . . 117

Sur le rayonnement très pénétrant observé dans l'air ; origine de ce rayonnement, par le P. Wulf, S. J. . . . 119

Visite des charbonnages de la société civile du Bois-du-Luc . . . 136

Visite des nouvelles serres coloniales de Laeken . . . 136

A la mémoire de M. le Chan. Swolfs, par M. Renier . . . 137

Rapport du P. L. Navas, S. J. et de M. A. Proost sur le mémoire de M. F. Meunier, intitulé : Contribution à la faune des diptères du copal récent de Zanzibar, de Madagascar et d'Accra . . . 137

Carte manuscrite du Congo Belge, par M. Maes . . . 137

Notes sur les coutumes de la vie familiale et juridique des Batétéla, par M. Maes en collaboration avec le C^{dt} Hutereau . . . 137

Quelques caractères lithologiques du marbre noir de Dinant, par M. Kaisin . . . 137

Nouveau microscope, par M. le D^{r} H. Lebrun . . . 137

Aperçu sur le jeu d'une faille normale, par M. le B^{on} L. Greindl . . . 138

Sur les premières découvertes de végétaux à structure conservée dans houiller belge, par M. Renier . . . 139

Travaux préliminaires dans le bassin houiller de la Campine, par le P. Schmitz, S. J. . . . 141

Notes sur la flore du Katanga, par M. É. De Wildeman . . . 141

Sur un dépouillement de 1900 empreintes de Blattidæ du Stéphanien de Commentry, par M. F. Meunier . . . 141

Contribution à la faune des Phoridæ du copal sub-fossile de Zanzibar, du copal récent de Zanzibar, d'Accra et de Madagascar, par M. F. Meunier . . . 144

Sur deux nouveaux Paléodictyoptères du Stéphanien de Commentry, par M. F. Meunier . . . 145

PAGES
Sur la valeur de la couche amylifère de la tige, et la théorie stélaire de Van Tieghem, par M. le Chan. Grégoire 146
La forêt congolaise et ses habitants, par M. Viaene 146
Présentation d'un mémoire en réponse à la question de concours : Monographie géographique de la Campine 146
Visite de l'hôpital Saint-Pierre, de l'Institut d'Anatomie et du nouvel Institut de Pathologie de Louvain 146
L'industrie des transports maritimes, par M. H. Mansion 148
Les ports de la côte nord-est de l'Angleterre, par M. Meuwissen . . . 148
Sur les moyens de communications à établir entre les deux rives de l'Escaut à Anvers, par M. R. Van der Mensbrugghe 148
A propos d'une visite à la Première Exposition internationale de l'Aéronautique à Paris (1909), par M. le B^on^ G. de Béthune 151
A propos des recherches récentes sur la constitution des aciers, par M. Renaud. 152
Sur le réglage des lunettes des niveaux, des théodolites et des instruments astronomiques, par M. Éd. Goedseels 152
Sur certaines notions fondamentales de la mécanique, par M. E. Pasquier. 163
Le système des sphères homocentriques comme origine du système des épicycles, par M. P. Mansion 163
Sur la parabole de Kiepert, par M. J. Neuberg. 168
Étant donnés deux tétraèdres $A_1A_2A_3A_4 \equiv T_a$, $B_1B_2B_3B_4 \equiv T_b$, peut-on les rendre homologiques ou hyperboloïdiques en imprimant à T_b une translation? par M. J. Neuberg 171
Sur les enveloppes qui ont un contact d'ordre supérieur, par M. Ch.-J. de la Vallée Poussin 174
Sur la vie de Grégoire de Saint-Vincent, par le P. Bosmans, S. J. 174
Raisons en faveur de la formule définitive de Gauss pour la mesure de la précision d'un système d'observations, par M. P. Mansion. . . . 174
Sur la probabilité d'amener *p* séries de *k* rouges consécutives dans une suite de *n* épreuves à la roulette, par le P. F. Willaert, S. J.. 179
Visite du laboratoire de M. Kläge, à Bruxelles 182
Rapport du P. Wulf, S. J., et de M. le V^te^ R. d'Adhémar sur le mémoire de M. Delemer, intitulé : La vibration pendulaire, son rôle véritable en acoustique 183
Sur le calcul du pouvoir refroidissant des courants fluides, par M. l'abbé Th. Annycke 181
Détermination du coefficient moyen de dilatation linéaire à l'aide du théodolite d'Hurlimann, par M. L.-N. Van de Vyver 183
Présentation d'un mémoire en réponse à la question de concours : La Campine 187
Rapport de M. Maes et du P. Van den Gheyn, S. J., sur le travail de M. Viaene : La forêt congolaise et ses habitants 188
Rapport de MM. Van Ortroy et Kaisin sur une série de cartes manuscrites du Congo Belge dressées par M. Maes. 188

PAGES
Osmylides exotiques (insectes névroptères) nouveaux, par le P. L. Navas, S. J. 188
Sur les brèches du houiller, par le P. Schmitz, S. J. 195
La population du Limbourg, par M. l'abbé Claerhout 195
Une nouvelle espèce de Paléodictyoptère (Sténodictyoptère Brongniart) du terrain houiller de Commentry, par M. F. Meunier 195
Aperçu sur les Chironomidæ du copal récent de Zanzibar et de Madagascar, par M. F. Meunier 196
Un Coniopterygidæ du copal récent de Togo, par M. F. Meunier . . . 198
Sur l'École d'agriculture coloniale et l'École coloniale pour femmes de Witzenhausen, par M. É. De Wildeman 199
Roches caractéristiques des Alpes Maritimes, par M. A. Proost. . . . 200
Notices relatives à des pièces manuscrites de la Bibliothèque Royale de Belgique, par le P. Van den Gheyn, S. J. 201
Troubles somatiques et mentaux caractéristiques de l'alcoolisme chronique, par M. le Dr Deroitte 202
Applications thérapeutiques du Radium, par M. le Dr Matagne 211
Conditions de succès de l'opération du bec-de-lièvre, par M. le Dr N. Moeller. 211
Des écoles d'infirmières ; leur but ; opportunité de leur extension ; difficultés à surmonter, par M. le Dr Van Swieten 219
Proposition d'une enquête concernant les marchés financiers, par M. F. Deschamps 221
Sur la théorie des mécanismes de distribution à commande par excentriques, par M. P. Daubresse 221
Sur quelques systèmes d'hyperboloïdes, par M. J. Neuberg 227
Sur la théorie mécanique du vol à voile, par M. de Monge 227
Sur une restitution de priorité en faveur d'un auteur anglais, de Morgan, par M. Casteels 228
Démonstration de la loi des grands nombres de Poisson, par M. P. Mansion 230
Sur quelques points de la théorie des covariants, par M. Ch.-J. de la Vallée Poussin 233
Analyse d'un mémoire présenté par M. Éd. Goedseels et intitulé : Application de la théorie des erreurs de l'auteur à la compensation des coordonnées des sommets des polygones et des traverses topographiques, par le P. F. Willaert, S. J. 233
Le tremblement de Provence et la théorie des tremblements de terre, par M. L. Fabry 234
Cause probable d'un accident singulier sur l'Escaut, à Anvers, par M. G. Van der Mensbrugghe 234
Sur les auréoles observées autour des conducteurs à haute tension, par le P. Schaffers, S. J. 237
Expériences sur l'inertie de la matière dans le mouvement relatif, par M. J. Delemer 241

PAGES
Rapport de M. J. Delemer et du P. Schaffers, S. J., sur le mémoire de M. l'abbé Th. Annycke, intitulé : Pouvoir refroidissant des fluides . . 246
Le tremblement de terre de Provence, par M. L. Fabry 249
Lettre de M. J.-H. Fabre au Secrétaire de la 3e section. 249
Sur l'utilité des cartes agrogéologiques, par M. A. Proost. 250
L'origine du nom de Wenduyne, par M. l'abbé Claerhout. 253
A propos d'une visite aux Musées de Bucarest, par M. le Cte Ad. de Limburg-Stirum 258
Quelques particularités de la *Carnegie Institution* de Washington, par le P. Van den Gheyn, S. J. 258
L'influence de l'enseignement des sciences naturelles dans la vie publique, par M. le Dr H. Lebrun 258
Sur le facies du Givétien, par M. le Chan. Bourgeat 258
Sur les Stratiomyidæ de l'ambre de la Baltique, par M. F. Meunier . . 258
Un nouveau Paléodictyoptère du terrain houiller de Commentry, par M. F. Meunier 259
Nouvelle espèce de Coniopterypidæ, par M. F. Meunier 260
Carte fluviale de la Lukénié (Congo Belge), par M. Denis Baudhuin et E. Viaene 261
Sur la philosophie dans ses rapports avec les sciences biologique et médicale, par le P. L. Boule, S. J. . , ... 261
Sur le port de Venise au moyen âge, par M. Ch. Terlinden 293
Seattle-Tacoma, dans le Puget-Sund, par M. M. Rondet-Saint 293
Trieste, Fiume et Venise, par M. M. Dewavrin. 293
L'administration des Ports, par le P. J. Charles, S. J. 293
Sur les aiguilles talonnables, par M. R. Van der Mensbrugghe 294

CONFÉRENCES

Vers la pédagogie expérimentale, par M. J. J. Van Biervliet. 162
L'aviation, hier, aujourd'hui, demain, par M. le Vte R. de Montessus de Ballore 226
Le monisme psychobiologique, par le P. R. de Sinéty, S. J. 304
La photographie à travers les corps opaques, par M. le Dr M. D'halluin . 307
Le soleil et ses influences, par M. l'Abbé Th. Moreux 311

QUESTIONS DE CONCOURS

Première section 227
Deuxième — 248
Troisième — 248
Sixième — 294

AUTEURS

d'Adhémar, 65. — Annycke, 183, 246. — Baudhuin, 261. — de Béthune, 90. 151. — Bosmans, 81, 174. — Boule, 261. — Casteels, 228. — Charles (J.), 293. — Claerhout, 195, 253. — Daubresse, 221. — Delemer, 110, 183, 241, 246. — De Muynck, 111. — Deroitte, 202. — Deschamps (F.), 221. — Dewavrin, 293. — De Wildeman, 141, 199. — D'halluin, 307. — Fabre, 249. — Fabry, 234. — Goedseels, 103, 105, 152, 233. — Grégoire, 146. — Greindl, 138. — de Hemptinne, 111. — Hutereau, 137. — Kaisin, 137, 188. — Lebrun, 137, 258. — de Limburg-Stirum, 258. — Maes, 137, 188. — Mansion (H.), 148. — Mansion (P.), 104, 174, 230. — Matagne, 211. — Meunier, 137, 141, 144, 145, 195, 196, 198, 259, 260. — Meuwissen, 148. — Moeller (N.), 211. — de Montessus (R.), 94, 226. — Moreux, 311. — Navas, 137, 188. — Neuberg, 82, 168, 171, 227. — Pasquier (E.), 73, 88, 163. — Proost, 137, 200, 250. — Renaud, 152. — Renier, 137, 139. — Rondet-Saint, 293. — Schaffers, 117, 237, 248. — Schmitz, S. J., 141, 195. — de Sinéty, 304. — Terlinden, 293. — de la Vallée, 174, 233. — Van Biervliet, 162. — Van den Gheyn, S. J., 201, 258. — Vanderlinden (E.), 106. — Van der Mensbrugghe (G.), 234. — Van der Mensbrugghe (R.), 148, 294. — Van de Vyver, 183. — Van Ortroy, 188. — Van Swieten, 219. — Viaene, 146, 261. — Willaert (F.), 179, 233. — Wulf, 119.

SECONDE PARTIE

MÉMOIRES

PAGES

L'électromètre bifilaire et ses applications, par le P. Th. Wulf, S. J. . 1

Un émule de Viète : Ludolphe van Ceulen, analyse de son *Traité du Cercle*, par le P. H. Bosmans, S. J. (1). 88

Contribution à la faune des diptères du copal récent de Zanzibar, de

---

(1) *Erratum :* La formule de la ligne 5 de la page 130 (43 du tiré à part) de ce mémoire : « $C_{158}\ 5x - 5x^3$ ... d'où C_{79}. », qui se trouve déjà à la page 129 (42 du tiré à part), avec l'indication erronée C_{135}, 4e ligne en commençant par le bas, est répétée ici par erreur et doit être biffée.

PAGES

Madagascar et d'Accra, par M. F. Meunier 140

La vibration pendulaire, son rôle véritable en acoustique, par M. J. Delemer 149

La valeur de la couche amylifère dans la tige et la théorie stélaire de Van Tieghem, par M. le Chan. Grégoire 164

Notes sur la flore du Katanga, par M. É. De Wildeman. 172

Deux particularités du glaciaire ancien de la Combe des Prés (Jura), par M. le Chan. Bourgeat 186

Notices de manuscrits de la Bibliothèque Royale de Belgique se rapportant aux sciences naturelles, par le P. Van den Gheyn, S. J. 191

Sur quelques caractères lithologiques du marbre noir de Dinant, par M. F. Kaisin 199

Les antiquités préhistoriques aux Musées de Vienne et de Budapest, par M. l'abbé J. Claerhout 212

Démonstration nouvelle d'un théorème fondamental de la théorie des covariants des formes binaires, par M. Ch.-J. de la Vallée Poussin. . 223

Sur le calcul du pouvoir refroidissant des courants fluides, par M. l'abbé Th. Annycke 230

Application de la théorie des erreurs de l'auteur à la compensation des coordonnées des sommets dans les levés topographiques, par M. Éd. Goedseels 257

La population du Limbourg, par M. l'abbé J. Claerhout 288

Sur quelques systèmes de quadriques réglées, par M. J. Neuberg . . . 308

AUTEURS

Annycke, 230. — Bosmans, 88. — Bourgeat, 186. — Claerhout, 212, 288. — Delemer, 149. — De Wildeman, 172. — Goedseels, 257. — Kaisin, 199. — Meunier, 140. — Neuberg, 308. — de la Vallée Poussin, 223. — Van den Gheyn, S. J., 191. — Wulf, 1.

REVUE DES QUESTIONS SCIENTIFIQUES

PUBLIÉE PAR

LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE DE BRUXELLES

TROISIÈME SÉRIE

Cette revue de haute vulgarisation, fondée en 1877 par la Société scientifique de Bruxelles, se compose actuellement de deux séries : la **première série** comprend 30 volumes (1877-1891) ; la **deuxième**, 20 volumes (1892-1901). La livraison de janvier 1902 a inauguré la **troisième série.**

La revue paraît en livraisons trimestrielles de 352 pages, à la fin de janvier, d'avril, de juillet et d'octobre. Chaque livraison renferme trois parties principales.

La **première partie** se compose d'**Articles originaux**, où sont traités les sujets les plus variés se rapportant à l'ensemble des sciences mathématiques, physiques, naturelles, sociales, etc.

La **deuxième partie** consiste en une **Bibliographie scientifique**, où l'on trouve un compte rendu détaillé et l'analyse critique des principaux ouvrages scientifiques récemment parus.

La **troisième partie** consiste en une **Revue des Revues et des Publications périodiques**, où des écrivains spéciaux résument ce qui paraît de plus intéressant dans les archives scientifiques et littéraires de notre temps.

Chaque livraison contient ordinairement aussi un ou plusieurs articles de **Variétés**.

CONDITIONS D'ABONNEMENT

Le prix d'abonnement à la Revue des Questions scientifiques est de **20 francs** par an. Les membres de la Société scientifique de Bruxelles ont droit à une réduction de **25** °/₀ ; le prix de leur abonnement est donc de **15 francs** par an.

Table analytique des cinquante premiers volumes de la Revue. Un vol. du format de la Revue de XII-168 pages. Prix : 5 francs ; pour les abonnés, 2 francs.

Des volumes isolés seront fournis aux nouveaux abonnés à des conditions très avantageuses.

S'adresser pour tout ce qui concerne la **Rédaction** *et l'***Administration** *au secrétariat de la Société scientifique, 11, rue des Récollets, Louvain.*

Une Notice sur la Société scientifique, son but, ses travaux, est envoyée gratuitement à ceux qui en font la demande au secrétariat.

Louvain. — Imp. F. & R. Ceuterick, rue Vital Decoster, 60.

PUBLICATIONS DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE

ANNALES DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE DE BRUXELLES, t. I à t. XXXIII, 1875 à 1909. Chaque vol. in-8° de 400 à 600 pages fr. **20 00**

TABLE ANALYTIQUE des vingt-cinq premiers volumes des ANNALES DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE (1875-1901). Un vol. in-8° de 250 pages (1904), en vente au prix de . . . . fr. **3 00**

REVUE DES QUESTIONS SCIENTIFIQUES. Première série, 1877 à 1891. Trente volumes. Seconde série, 1892 à 1901. Vingt volumes. Troisième série, commencée en 1902. Les deux volumes annuels, de 700 pages in-8° chacun . . . . fr. **20 00**

TABLE ANALYTIQUE des cinquante premiers volumes de la REVUE DES QUESTIONS SCIENTIFIQUES (1877-1901). Un vol. in-8° de XII-168 pages, petit texte (1904), en vente au prix de 5 fr. ; pour les abonnés . . fr. **2 00**

Ph. Gilbert. Mémoire sur l'application de la méthode de Lagrange à divers problèmes de mouvement relatif. Deuxième édition (1889). Un vol. in-8° de 150 pages . . . . fr. **7 50**

DISCUSSION SUR LE FŒTICIDE MÉDICAL. Brochure in-8° de 38 pages (1904) . . . . fr. **1 00**

LA CRISE DU LIBRE-ÉCHANGE EN ANGLETERRE. Rapports de MM. G. Blondel, Ch. Dejace, A. Viallate, Emm. de Meester, P. de Laveleye, Éd. Van der Smissen. Brochure in-8° de 121 pages (1905). . fr. **2 00**

LES PORTS ET LEUR FONCTION ÉCONOMIQUE : T. I. Introduction, Éd. Van der Smissen. I. La Fonction économique des Ports dans l'Antiquité grecque, H. Francotte. II. Bruges au Moyen âge, G. Eeckhout. III. Barry, H. Laporte. IV. Beira, Ch. Morisseaux. V. Liverpool, P. de Rousiers. VI. Anvers, E. Dubois et M. Theunissen. VII. Les Ports et la vie économique en France et en Allemagne, G. Blondel. Un vol. in-8° de 183 pages, figures et plans. (Épuisé.) **T. II.** VIII. Londres, G. Eeckhout. IX. Délos, A. Roersch. X. Rotterdam, J. Charles. XI. Gênes au Moyen âge, J. Hanquet. XII. Marseille, G. Blondel. Un vol. in-8° de 123 pages, figures et plans. Prix : 3 francs. **T. III.** XIII. Le Port moderne de Gênes, M. Theunissen. XIV. Ostende. L.-Th. Leger. XV. Jaffa, P. Gendebien. XVI. Lisbonne, Ch. Morisseaux. XVII. Le Havre, G. Blondel. XVIII. Hambourg, P. de Rousiers et J. Charles. XIX. Rio-de-Janeiro, F. Georlette. XX. Han-Kow. A. Vanderstichele. Prix : 3 francs. **T. IV.** XXI. Barcelone et Bilbao, J. Charles. XXII. Buenos-Aires, M. Theunissen. XXIII. Brême, J. Charles. XXIV. New-York, Paul Hagemans. XXV. Le Port de Pouzzoles dans l'Antiquité, d'après un livre récent, Alphonse Roersch. XXVI. Shanghaï, A. A. Fauvel. XXVII. Zeebrugge, J. Nyssens-Hart. Un vol. in-8° de 184 pages, figures et plans. Prix : 3 francs. **T. V.** XXVIII Rouen, G. Blondel. XXIX. Montréal, M. Dewavrin. XXX. Seattle et Tacoma, M. Rondet-Saint. XXXI. Trieste, Fiume, Venise, M. Dewavrin. XXXII. Venise au moyen âge, C. Terlinden. XXXIII. Les ports du Nord-Est de l'Angleterre, J. Meuwissen. — Conclusions, G. Blondel. — Appendices : L'administration des Ports, J. Charles, S. J. ; L'industrie des transports maritimes, H. Mansion. Prix : 3 francs.

SUR QUELQUES POINTS DE MORALE SEXUELLE DANS SES RAPPORTS AVEC LA MÉDECINE. Rapport de M. le Dr X. Francotte. Brochure in-8° de 48 pages (1907) (Épuisé) . . . . fr. **0 75**

DE LA DÉPOPULATION PAR L'INFÉCONDITÉ VOULUE. Rapport de M. le Dr Henri Desplats, et discussion. Brochure in-8° de 29 pages (1908) (Épuisé) . . . . fr. **0 75**

PUBLICATIONS DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE

ANNALES DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE DE BRUXELLES, t. I à t. XXXIII, 1875 à 1909. Chaque vol. in-8° de 400 à 600 pages fr. **20 00**

TABLE ANALYTIQUE des vingt-cinq premiers volumes des ANNALES DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE (1875-1901). Un vol. in-8° de 250 pages (1904), en vente au prix de . . . . fr. **3 00**

REVUE DES QUESTIONS SCIENTIFIQUES. Première série, 1877 à 1891. Trente volumes. Seconde série, 1892 à 1901. Vingt volumes. Troisième série, commencée en 1902. Les deux volumes annuels, de 700 pages in-8° chacun . . . . fr. **20 00**

TABLE ANALYTIQUE des cinquante premiers volumes de la REVUE DES QUESTIONS SCIENTIFIQUES (1877-1901). Un vol. in-8° de XII-168 pages, petit texte (1904), en vente au prix de 5 fr. ; pour les abonnés . . fr. **2 00**

Ph. Gilbert. Mémoire sur l'application de la méthode de Lagrange à divers problèmes de mouvement relatif. Deuxième édition (1889). Un vol. in-8° de 150 pages . . . . fr. **7 50**

DISCUSSION SUR LE FŒTICIDE MÉDICAL. Brochure in-8° de 38 pages (1904) . . . . fr. **1 00**

LA CRISE DU LIBRE-ÉCHANGE EN ANGLETERRE. Rapports de MM. G. Blondel, Ch. Dejace, A. Viallate, Emm. de Meester, P. de Laveleye, Éd. Van der Smissen. Brochure in-8° de 121 pages (1905). . fr. **2 00**

LES PORTS ET LEUR FONCTION ÉCONOMIQUE : **T. I.** Introduction, Éd. Van der Smissen. I. La Fonction économique des Ports dans l'Antiquité grecque, H. Francotte. II. Bruges au Moyen âge, G. Eeckhout. III. Barry, H. Laporte. IV. Beira, Ch. Morisseaux. V. Liverpool, P. de Rousiers. VI. Anvers, E. Dubois et M. Theunissen. VII. Les Ports et la vie économique en France et en Allemagne, G. Blondel. Un vol. in-8° de 183 pages, figures et plans. (Épuisé.) **T. II.** VIII. Londres, G. Eeckhout. IX. Délos, A. Roersch. X. Rotterdam, J. Charles. XI. Gênes au Moyen âge, J. Hanquet. XII. Marseille, G. Blondel. Un vol. in-8° de 123 pages, figures et plans. Prix : 3 francs. **T. III.** XIII. Le Port moderne de Gênes, M. Theunissen. XIV. Ostende. L.-Th. Leger. XV. Jaffa, P. Gendebien. XVI. Lisbonne, Ch. Morisseaux. XVII. Le Havre, G. Blondel. XVIII. Hambourg, P. de Rousiers et J. Charles. XIX. Rio-de-Janeiro, F. Georlette. XX. Han-Kow. A. Vanderstichele. Prix : 3 francs. **T. IV.** XXI. Barcelone et Bilbao, J. Charles. XXII. Buenos-Aires, M. Theunissen. XXIII. Brême, J. Charles. XXIV. New-York, Paul Hagemans. XXV. Le Port de Pouzzoles dans l'Antiquité, d'après un livre récent, Alphonse Roersch. XXVI. Shanghaï, A. A. Fauvel. XXVII. Zeebrugge, J. Nyssens-Hart. Un vol. in-8° de 184 pages, figures et plans. Prix : 3 francs. **T. V.** XXVIII Rouen, G. Blondel. XXIX. Montréal, M. Dewavrin. XXX. Seattle et Tacoma, M. Rondet-Saint. XXXI. Trieste, Fiume, Venise, M. Dewavrin. XXXII. Venise au moyen âge, C. Terlinden. XXXIII. Les ports du Nord-Est de l'Angleterre, J. Meuwissen. — Conclusions, G. Blondel. — Appendices : L'administration des Ports, J. Charles, S. J. ; L'industrie des transports maritimes, H. Mansion. Prix : 3 francs.

SUR QUELQUES POINTS DE MORALE SEXUELLE DANS SES RAPPORTS AVEC LA MÉDECINE. Rapport de M. le Dr X. Francotte. Brochure in-8° de 48 pages (1907) (Épuisé) . . . . fr. **0 75**

DE LA DÉPOPULATION PAR L'INFÉCONDITÉ VOULUE. Rapport de M. le Dr Henri Desplats, et discussion. Brochure in-8° de 29 pages (1908) (Épuisé) . . . . fr. **0 75**